

발표자 : 박정규*, 이인원 **

1. 서론

반복구조물이란, 동일한 분할 구조물들이 일정한 간격과 동일한 방식으로 연결되어 전체 구조물을 이루고 있는 것을 말한다. 많은 구조물들은 생산비용과 설계시간의 절감을 위하여 동일한 분할 구조물로 전체구조물을 구성하고 있다. 환형 반복구조물은 위와 같은 반복구조물이 링과 같은 형태를 이루고 있는 것을 말한다. 이런 구조물들의 진동문제를 전체 구조물중 반복적인 한 요소의 구조물과 전체구조물의 경계 조건만으로 유한요소 모형화를 하여 계산효율을 높이하고자 한다.

2. 이론적 해석방법

2.1 전파상수의 개념

그림1과 같은 환형 반복구조물에서 Floquet정리는 다음과 같다.

$$A_1(x) = A_2(x+1) e^{\mu} \quad (2-1)$$

여기서 μ 는 파동전파상수이다. μ 는 복소수이며 실수부 μ_R 은 이웃한 분할구조물사이의 진폭의 감쇠비율, 허수부 μ_I 는 위상차이를 나타낸다. 공진주파수는 $\mu_R = 0$ 인 전파대역에서 존재하게 된다.

2.2 U-변환을 이용한 환형반복구조물의 비연성화

그림1와 같이 각 분할구조물의 중앙점에 국소좌표계를 잡았을때 모든 분할구조물의 지배방정식은 동일하다. 전체 구조물의 변위를 다음과 같이 표현하면

$$\{w\} = [w_0, w_1, \dots, w_{N-1}]^T \quad (2-2)$$

지배방정식과 경계조건은

$$EI \frac{\partial^4 \{w\}}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \{w\}}{\partial t^2} = 0 \quad \{w\} |_{x=1/2} = [\epsilon] \{w\} |_{x=-1/2} \quad (2-3)$$

* : 한국과학기술원 기계공학과 석사과정

** : 한국과학기술원 토목공학과 교수

여기서
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

경계조건에 Floquet정리를 적용하면,

$$w_{N-1}|_{x=l_2} = e^{-jN\mu_1} w_0|_{x=l/2} \quad (2-6)$$

따라서, $e^{-jN\mu_1} = 1$ 이다 즉, 위상차 μ_1 가 $2\pi/N$ 의 정수배일때 환형구조물에서 공진이 일어난다. 이를 이용하여 U 변환을 한다.

$$\{w\} = [U] \{q\} \quad (2-7)$$

여기서

$$\{q\} = [q_0, q_1, \dots, q_{N-1}]^T$$

$$[U] = [U_0, U_1, \dots, U_{N-1}]$$

$$\{U_k\} = (1/\sqrt{N}) \left[1 \ e^{jk\Psi} \ e^{j2k\Psi} \ \dots \ e^{j(N-1)k\Psi} \right]^T, \quad \Psi = 2\pi/N$$

식(2-7)를 식(2-3)에 대입하고 각 항에 앞에 $[U]^T$ 를 곱하면 $[U]^T [U] = [I]$ 이므로 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 \{q\}}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \{q\}}{\partial t^2} = 0, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \quad (2-8)$$

$$\{q\}|_{x=\frac{1}{2}} = [U]^T [\varepsilon] [U] \{q\}|_{x=-\frac{1}{2}} \quad (2-9)$$

여기서
$$[U]^T [\varepsilon] [U] = \begin{bmatrix} e^{j\Psi} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{j2\Psi} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{jN\Psi} \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

식(2-8)은 각 분할구조물에 대한 N개의 동일한 방정식들이다. $e^{jk\Psi}$ 가 주기함수이므로 N이 짝수일 때는 $k = 0, 1, \dots, N/2$ 이며, N이 홀수일 때는 $k = 0, 1, \dots, (N-1)/2$ 까지의 값만 가진다. 식(2-9)은 하나의 분할구조물에 대한 경계조건이며, 다른 분할구조물과 비연성이다.

2-3 유한요소법을 통한 모형화

환형반복구조물의 한 섹터를 m 이라 하면, 이 분할구조물만의 고유치문제는 다음과 같이 표현된다.

$$[K^m - \omega^2 M^m] \{w\}^m = 0 \quad (2-11)$$

Floquet정리를 적용하면,

$$\{w\}^m = \begin{pmatrix} w_L \\ w_I \\ w_R \end{pmatrix}^m = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ e^{-j\mu_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_L \\ w_I \end{pmatrix}^m = T \begin{pmatrix} w_L \\ w_I \end{pmatrix}^m \quad (2-12)$$

여기서 첨자 L, I, R은 섹터모델중 각각 왼쪽, 내부, 오른쪽경계면의 자유도를 나타낸다.

식(2-12) 식을 식(2-11)에 대입하고 T^H 를 각항의 앞에 곱하면,

$$\left[K^m(\mu_1) - \omega^2 M^m(\mu_1) \right] \begin{Bmatrix} w_L \\ w_I \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{여기서, } K^m(\mu_1) = T^H K^m T, M^m(\mu_1) = T^H M^m T \quad (2-13)$$

여기서 $\mu_1 = 2k\pi/N$, N 이 짝수일때는 $k=0, 1, 2, \dots, N/2$, N 홀수일때는 $k = 0, 1, 2, \dots, (N-1)/2$

식(2-13)을 실수부와 허수부로 분리하여 나타내면,

$$\left[\begin{Bmatrix} K^R + jK^I \\ K^I \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{Bmatrix} M^R + jM^I \\ M^I \end{Bmatrix} \right] \left(\begin{Bmatrix} w^R \\ w^I \end{Bmatrix} + j \begin{Bmatrix} w^I \\ w^R \end{Bmatrix} \right) = 0 \quad (2-14)$$

$$\left[\begin{Bmatrix} K^R & -K^I \\ K^I & K^R \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{Bmatrix} M^R & -M^I \\ M^I & M^R \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} w^R \\ w^I \end{Bmatrix} = 0 \quad (2-15)$$

K^R 와 M^R 은 대칭행렬이고 $-K^I = K^I, -M^I = M^I$ 이므로 식(2-15)는 실수이며 대칭인 고유치문제가 된다. 따라서 이 고유치 문제는 종래에 나와있는 루틴을 그대로 사용할 수 있다.

2.4 섹터 모델의 유용성

환형반복구조물을 유한요소법으로 모형화할때 섹터의갯수 N 이고 한섹터당 자유도 j 라 할때 $Nj \times Nj$ 에 해당하는 고유치문제이나, 섹터모델일때는 식(2-15)와 같은 $2j \times 2j$ 에 해당하는 고유치문제이며, N 이 짝수인 경우에는 $(N/2+1)$ 번 반복해서 풀어야 한다. 자코비법의 연산횟수 비교는 표1과 같다.

3. 예제와 고찰

예로 두께가 일정하며 내부는 고정, 외부는 자유인 환형원판을 고려하자. 모델링하는데 있어서 다음과 같은 가정을 하였다. (1) 선형탄성인 재료이다. (2)얇은 평판 이론을 적용하였다. (3) 횡방향 진동만을 고려한다. 유한요소법으로 해석시 참고문헌(5)의 요소를 사용했다. 그림2과 같이 매쉬를 자른경우 사용한 요소의 갯수는 24개, 자유도는 96이다. 그림3과 같은 환형원판의 45도 만큼의 섹터모델을 만들었다. 이때 사용한 요소의 갯수는 3개 자유도는 24이다. 앞의 이론으로 공식화하여 고유치문제를 5번 반복하여 풀은 결과 그림2과 같이 매쉬를 자르고 풀은 결과와 첫번째 고유주파수에서 부터 마지막 고유주파수까지 동일하게 나왔다. $r_o/r_i = 0.3$ 일때, 주파수 파라메타 $\omega r_o^2 (\rho/D)^{1/2}$ 을 엄밀해와 비교하면 표2과 같다. 표1에서 보는 바와 같이 예제의 경우 섹터모델에 의한 연산횟수는 전체환형반복구조물에 비해 1/12에 불과하므로 이 방법의 효율성이 입증되었다.

참고문헌

1. D. J. Mead, 1973, Journal of sound and vibration, Vol 27, 235 - 260, "A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling."
2. Ruth M. Orris, M. Petyt, 1974 Journal of sound and vibration, Vol33, 223 - 236, "A finite

element study of harmonic waves propagation in periodic structures",

3. C. W. Cai, Y. K. Cheung, H. C. Chan, 1988, Journal of sound and vibration, Vol123, 461 - 472, "Dynamic response of infinite continuous beams subjected to a moving force - an exact method".
4. M. Petyt, 1990, Introduction to finite element vibration analysis Cambridge Univ. Press
5. M. D. Olson, 1970, Int. J. Mech. Sci., Vol12, 17 - 32, "Annual and circular sector finite elements for plate bending"
6. K. J. Bathe, 1982, Finite element procedures in engineering analysis, 637-640, Prentice-Hall

표1. 일반적 자코비법에 의한 연산횟수 비교

매트릭스 크기		연산 횟수
$n \times n$		$3n^3 + 6n^2 + 6n + 18$
전체 환형 반복 구조물 $N_j \times N_j$		$3(N_j)^3 + 6(N_j)^2 + 6(N_j) + 18$
섹터 모델	N: 짝수	$(N/2 + 1) \{ 3(2j)^3 + 6(2j)^2 + 6(2j) + 18 \}$
	N: 홀수	$0.5(N + 1) \{ 3(2j)^3 + 6(2j)^2 + 6(2j) + 18 \}$

표2. 주파수파라메타의 엄밀해와의 비교

Nodal diameter	Nodal circles	F E M	Analytical	% Difference
1	0	6.30	6.33	-0.48
0	0	6.67	6.66	0.15
2	0	7.37	7.96	-7.41
3	0	13.26	13.27	-0.08
0	1	42.6	42.6	0.
1	1	44.1	44.6	-1.12
2	1	52.94	50.9	2.95
3	1	60.3	62.1	-2.9

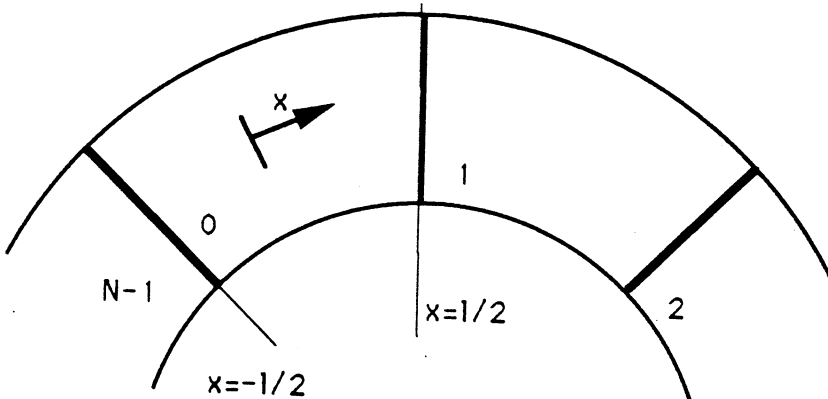


그림1. 환형반복구조물의 간략도

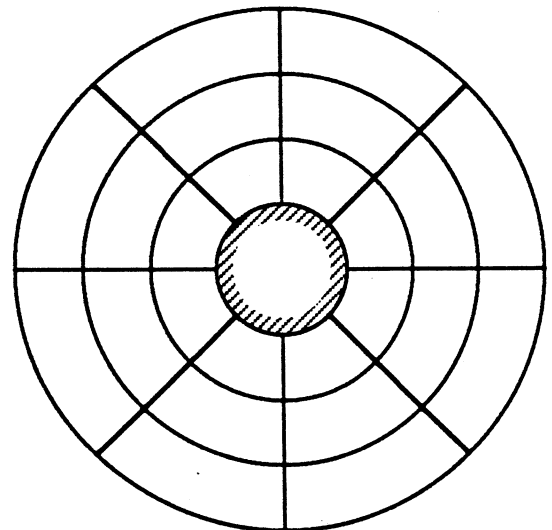


그림2. 환형원판의 매쉬

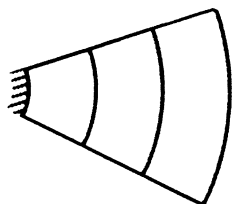


그림3. 섹터모델의 매쉬