

# 대형 구조물의 효율적인 자유진동 해석방법

발표자 : 이 인원<sup>1</sup>, 오김 만철<sup>2</sup>

## 1. 서론

동적 하중을 받는 구조물의 동적 해석은 공학의 많은 분야에서 매우 중요하게 고려된다. 구조물의 동적 해석을 위해서 모우드 중첩법을 사용할 경우, 반드시 고유치 문제의 해석이 선행되어야 한다. 그러나 동적 해석에서 소요되는 대부분의 노력, 즉 시간은 고유치와 그에 대응하는 고유벡터를 구하는 데에 사용된다. 이것은 고유치 문제에 대한 연구를 활성화 시키는 촉매 역할을 해왔으며, 그 결과 해의 정확도를 증가시키기 위한 많은 방법들이 개발되어 졌다. 본 연구에서는 수정된 Newton-Raphson 방법을 이용하여 Robinson-Lee's 방법의 수렴비를 향상시킨 고유치 해법을 제안한다.

## 2. Robinson-Lee's 방법

구조물의 동적 해석에서 고려되는 일반화된 고유치문제는

$$A \bar{x}_j = \lambda_j B \bar{x}_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2.1)$$

식(2.1)에 있어서 초기 근사값을  $\lambda_j^{(0)}$ 와  $\bar{x}_j^{(0)}$ 라 하자. k번 반복연산 후 근사값  $\lambda_j^{(k)}$ 와  $\bar{x}_j^{(k)}$ 을 식(2.1)에 대입하면

$$A \bar{x}_j^{(k)} - \lambda_j^{(k)} B \bar{x}_j^{(k)} = \bar{r}_j^{(k)} \quad (2.2)$$

여기서  $\bar{r}_j^{(k)}$ 는 잔류벡터이다.  $\bar{r}_j^{(k)}$ 가 영벡터이면  $\lambda_j^{(k)} = \lambda_j$ 와  $\bar{x}_j^{(k)} = \bar{x}_j$ 이므로,  $\bar{r}_j^{(k)}$ 를 제거하기 위하여 Newton-Raphson 방법을 도입한다.

$$\begin{aligned} \lambda_j^{(k+1)} &= \lambda_j^{(k)} + \Delta \lambda_j^{(k)} \\ \bar{x}_j^{(k+1)} &= \bar{x}_j^{(k)} + \Delta \bar{x}_j^{(k)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

식(2.3)을 식(2.1)에 대입하고 비선형항  $(\lambda_j^{(k+1)} - \lambda_j^{(0)}) B \Delta \bar{x}_j^{(k)}$ 를 무시하면

<sup>1</sup> : 정회원. 한국과학기술원 토목공학과 부교수

<sup>2</sup> : 정회원. 한국과학기술원 토목공학과 석사과정

$$(A - \lambda_j^{(0)} B) \Delta x_j^{-(k)} - \Delta \lambda_j^{(k)} B x_j^{-(k)} = -r_j^{-(k)} \quad (2.4)$$

식(2.4)에서 미지수는  $(n+1)$ 개이지만, 단지  $(n)$ 개의 방정식이 존재하기 때문에 하나의 부가 조건식을 도입하여야 한다. Robinson과 Lee에 의해서 도입된 부가 조건식은

$$(x_j^{-(k)})^T B \Delta x_j^{-(k)} = 0 \quad (2.5)$$

식(2.4)와 식(2.5)를 연립선형 대수방정식으로 표현하면

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_j^{(0)} B & -B x_j^{-(k)} \\ -(x_j^{-(k)})^T B & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x_j^{-(k)} \\ \Delta \lambda_j^{(k)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} r_j^{-(k)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

위의 Robinson-Lee's 방법에서 계수행렬은  $(n+1)$ 차의 대칭행렬고,  $\lambda_j$ 가 다중근이 아닐 경우, 정칙행렬이다<sup>(1)</sup>.  $\lambda_j^{(k)}$ 와  $x_j^{-(k)}$ 의 오차가 허용치를 만족할 때까지 식(2.3)에서 식(2.6)까지의 과정을 되풀이 한다.

### 3. 제안방법

Robinson-Lee's 방법의 해석에서 일단 계수행렬의 부행렬  $A - \lambda_j^{(0)} B$ 가  $LDL^T$ 로 행렬분해되면, 연속적인 반복 연산에서는  $B x_j^{-(k)}$ 에 대한 부가적인 연산만을 필요로 한다. 그러나 이 방법은 비선형항  $(\lambda_j^{(k+1)} - \lambda_j^{(0)}) B x_j^{-(k)}$ 를 무시하기 때문에 수렴비가 작다. 본 논문에서는 Robinson-Lee's 방법의 수렴비를 증가시키고 해석시간을 감소시키기 위해 수정된 Newton-Raphson 방법을 이용하였다.

$$\begin{aligned} \lambda_j^{(k+1)} &= \lambda_j^{(k)} + \Delta \lambda_j^{(k)} \\ x_j^{-(k+1)} &= x_j^{-(k)} + \alpha \Delta x_j^{-(k)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

식(3.1)에 있어서  $\alpha$ 는  $r_j^{-(k+1)}$ 의 정규를 최소화하기 위한 값이며, 이것을 구하는 과정은

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \{ (r_j^{-(k+1)})^T r_j^{-(k+1)} \} = 0 \quad (3.2)$$

$$\alpha = - \frac{(\Delta x_j^{-(k)})^T (A - \lambda_j^{(k+1)} B) (A - \lambda_j^{(k+1)} B) x_j^{-(k)}}{(\Delta x_j^{-(k)})^T (A - \lambda_j^{(k+1)} B) (A - \lambda_j^{(k+1)} B) \Delta x_j^{-(k)}} \quad (3.3)$$

제안 방법에서 일관 질량행렬인 경우에  $\alpha$ 를 구하기 위하여  $4nm_x + 7n + 1$ 의 부가적인 연산횟

수를, 집중 질량행렬인 경우에는  $2nm_k + 7n + 1$ 의 부가적인 연산횟수를 필요로 한다. 그러나 수렴비의 증가로 허용 오차를 만족하는 고유치를 구하는 데 필요한 전체 반복횟수가 감소하기 때문에 제안 방법은 Robinson-Lee's 방법 보다 해석시간의 감소가 기대된다.

#### 4. 수치해석

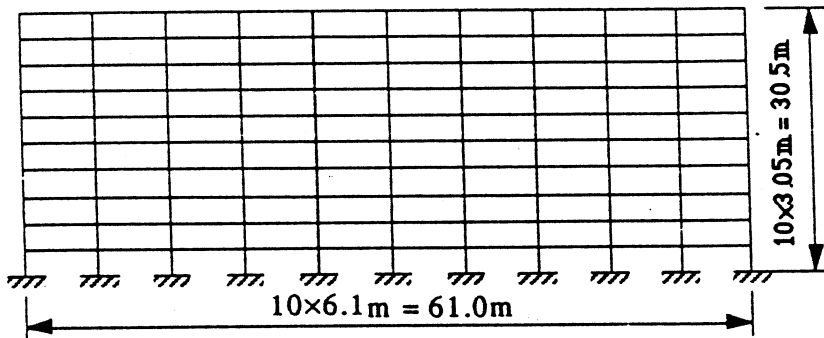
제안 방법의 유용성을 증명하기 위하여 K. J. Bathe가 사용한 평면 프레임 구조물<sup>(3)</sup>을 대상 구조물로 하였다. 이 구조물의 유한요소 모델은 그림4.1에서와 같이, 210개의 빔 요소와 121개의 연결점으로 되어 있고 총 자유도 수는 363개이다. 해석에 사용된 컴퓨터는 12mips의 IRIS이다. 제안방법과 Robinson-Lee's 방법 그리고 상용코드인 ADINA에서 사용되는 subspace iteration 방법을 이용하여, 허용오차  $10^{-9}$ 까지 15개의 고유치를 구했다. 제안 방법과 Robinson-Lee's 방법의 초기 값들은 ADINA에서 사용되는 subspace iteration 방법에서 허용오차  $10^{-1}$ 를 만족하는 중간 결과를 이용하였다. 표4.1에는 제안 방법과 Robinson-Lee's 방법의 각 고유치당 소요되는 연산 횟수를 비교해 놓았다. 그림4.2는  $\alpha$ 가 가장 효율적으로 적용된 14번째의 고유치와 그에 대응하는 고유벡터의 수렴성을 비교한 것이고, 표4.2는 각 방법에 있어서 15개의 고유치를 구하는 데 소요되는 해석시간을 비교한 것이다.

#### 5. 결론

표4.1에서 14번째와 15번째의 고유치와 같이, 고유치들이 매우 근접해 있는 경우에, Robinson-Lee's 방법에서는 수렴하기 위해 많은 반복 횟수를 필요로 한다. 그러나 제안 방법에서는  $\alpha$ 의 효율적인 작용에 의해서 적은 반복 횟수로도 빠른 수렴성을 보여준다. 해석시간을 비교한 표4.2에서 Robinson-Lee's 방법은 subspace iteration 방법 보다 월등히 적은 해석시간이 소요되고, 제안 방법은 이를 더욱 감소시켰다.

#### 6. 참고문헌

- (1) Lee, I. W., and Robinson, A. R. (1979). "Solution techniques for large eigenvalue problems in structural dynamics." *Structural Research Series No. 462*, University of Illinois.
- (2) Robinson, A. R., and Harris, J. F. (1971). "Improving approximate eigenvalues and eigenvectors." *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 97(EM2), 457-475.
- (3) Bathe, K. J., and Wilson, E. L. (1972). "Large eigenvalue problems in dynamic analysis." *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 98, 1471-1485.
- (4) Bathe, K. J., and Ramaswamy, S. (1980). "An accelerated subspace iteration method." *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 23, 313-331.



For all Beams and Columns:

Area of Cross-Section:  $0.2787 \text{ m}^2$   
 Moment of Inertia:  $8.631 \times 10^{-3} \text{ m}^4$   
 Young's Modulus:  $2.068 \times 10^7 \text{ Pa}$   
 Mass Density:  $5.154 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$

그림4.1 TEN-STORY, TEN-BAY PLANE FRAME

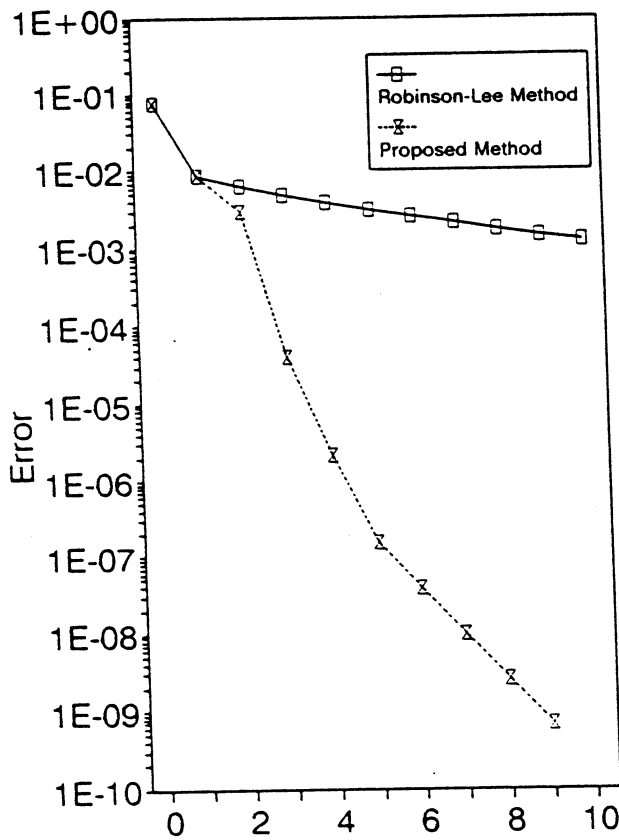


그림4.2 제안방법과 Robinson-Lee's Method의 수렴성 비교

Mode Number	Nat. Freq. (Hz)	Number of Iterations	
		Robinson-Lee's Method	Proposed Method
1	0.11	0	0
2	0.33	0	0
3	0.58	0	0
4	0.85	0	0
5	0.92	0	0
6	0.94	0	0
7	0.98	0	0
8	1.03	1	1
9	1.09	1	1
10	1.14	1	1
11	1.18	1	1
12	1.27	1	1
13	1.31	3	3 •
14	1.36	29	9 •
15	1.37	19	11 •

표4.1 제안방법과 Robinson-Lee's Method의 반복횟수 비교.  
 • :  $\alpha$  적용

Method	Subspace Iteration Method	Robinson-Lee's Method	Proposed Method
Solution Time(sec) (rate)	131.39 (1.98)	66.43 (1)	58.72 (0.88)

표4.2 세가지 방법의 해석시간 비교.