지진하중하의 구조물의 동적 해석을 위한 중적분 방법
A Double Integration Method for the Dynamic Analysis of Structures under Earthquake Load

발표자 : 이 인원[1], °김 진호[2], 김 동옥[3]

1. 서론

일반적으로 구조물의 동적 해석은 모드 해석법과 직접 적분법등을 사용한다. 직접 적분법으로 해석시에는 안정성과 정확성을 고려하여 적분시간 간격을 결정하고, 지진 하중에서와 같이 고주파 성분이 지배적인 가진력이 입력될 경우, 충분한 정확성을 보장하기위해 더 짧은 적분시간 간격으로 해석한다. 그러나 수치적분에 사용되는 시간 간격이 짧을수록 계산량이 증가하는 단점이 있으므로 긴 시간 간격하에서의 정확한 해석 방법의 개발은 매우 중요한 의미를 갖는다.

본 논문은 기존의 적분시간 간격에 대한 제한성을 완화하면서도 정확한 결과를 구할 수 있는 이중적분 방법을 제안한다.

2. 제안방법

제안방법은 다음 두 가지 개념의 조합이다.

1) 운동방정식을 작은 변화율을 갖는 등가 방정식으로 대체한다.
2) 적분방법으로 SSQ (Successive Symmetrical Quadratures) 방법을 사용한다.

2.1 등가방정식

구조물의 지배 방정식은 아래와 같이 표현된다.

$$M\ddot{X}(t) + C(\dot{X}(t)) + K(X(t)) = F(t) \qquad \text{... (2.1.1)}$$

여기서 M, C, K는 각각 구조물의 질량 행렬, 감쇠 행렬, 강성 행렬이고 F(t)는 가진력이다.
시간에 관한 변위의 한 번 적분을 P, 두 번 적분을 Q라 하면,

$$P(t) = \int_{t^*}^{t} X(\xi)d\xi \qquad \text{... (2.1.2)}$$

$$Q(t) = \int_{t^*}^{t} P(\xi)d\xi = \int_{t^*}^{t}\int_{t^*}^{\xi} X(\eta)d\eta d\xi \qquad \text{... (2.1.3)}$$

따라서, 구조물의 변위와 속도는 식 (2.1.4), (2.1.5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$X(t) = \dot{P}(t) = \ddot{Q}(t) \qquad \text{... (2.1.4)}$$

$$\dot{X}(t) = \ddot{P}(t) \qquad \text{... (2.1.5)}$$

식 (2.1.1)은 한 번 적분에 의해 다음과 같이 표현되고,

$$M(\ddot{P} - \ddot{P}_{t^*}) + \int_{t^*}^{t} C(\dot{X}(\xi))d\xi + \int_{t^*}^{t} K(X(\xi))d\xi = \int_{t^*}^{t} F(\xi)d\xi \qquad \text{... (2.1.6)}$$

식 (2.1.6)을 다시 한 번 적분하면,

$$M[\ddot{Q} - \ddot{Q}_{t^*} - \ddot{P}_{t^*}(t - t^*)] + \int_{t^*}^{t}\int_{t^*}^{\xi} C(\dot{X}(\eta))d\eta d\xi + \int_{t^*}^{t}\int_{t^*}^{\xi} K(X(\eta))d\eta d\xi = \int_{t^*}^{t}\int_{t^*}^{\xi} F(\eta)d\eta d\xi \qquad \text{... (2.1.7)}$$

식 (2.1.7)은, 식 (2.1.1)의 유연화된 등가 방정식이다. 두 번의 적분에 의하여 저항함수와 가진력이 유연화되므로 보다 긴 시간 간격을 사용할 수 있다. (그림 2)

2.2 선형문제에의 적용

이중 적분된 지배방정식 (2.1.7)은, 선형 구조물의 경우에는 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$M(\ddot{Q} - \ddot{Q}_{t_0} - \ddot{P}_{t_0} t) + C\dot{Q} + KQ = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\xi} F(\eta)d\eta d\xi \qquad \text{... (2.2.1)}$$

식 (2.2.1)을 Newmark 방법으로 해석하면, 긴 시간 간격을 사용해도 오차가 작은 결과를 얻을 수 있다. 부가적으로 SSQ 방법을 사용하면 더 긴 시간 간격으로 해석할 수 있다.

---

1 : 정회원. 한국과학기술원 토목공학과 부교수
2 : 정회원. 한국과학기술원 토목공학과 석사과정
3 : 정회원. 한국과학기술원 기계공학과 박사과정

2.3 SSQ방법

Newmark 방법으로 긴 시간 간격을 사용하여 적분할 경우 오차는 작아지나 약간의 주파수 변형이 발생하는 것을 볼 수 있다. SSQ방법은 이러한 문제점을 해결할 수 있으며 더 긴 시간 간격을 사용할 수 있다.

SSQ 방법의 개념은 Ehle [1] 에 의해 (Lobatto IIIA-method)처음 제안되었고, 나중에 Healy와 Robinson[2]은 이를 다른 방법으로 유도하여 "successive symmetrical quadratures"라 명명 하였다.

함수의 적분은 식 (2.3.1)과 같이 근사화할 수 있다.

$$\int_{t_{n0}}^{t_{nk}} f(t)dt \cong h\sum_{i=0}^{m} f_i \alpha_{ik} \qquad \text{... (2.3.1)}$$

여기서 $f_i = f(t_{ni})$ 이며, h와 α, m, k는 각각 시간간격과 무차원 가중치, 보간함수의 차수, 시간간격 사이의 보간점을 의미한다.

자유진동의 지배방정식은 식 (2.3.2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0 \qquad \text{... (2.3.2)}$$

식 (2.3.1)을 적용하면, 변위와 속도는 식 (2.3.3), (2.3.4)와 같이 표시할 수 있다.

$$\dot{X}_{nk} = \dot{X}_{n0} - \omega^2 h\sum_{i=0}^{m} \alpha_{ik} X_{ni} \qquad \text{... (2.3.3)}$$

$$X_{nk} = X_{n0} + h\sum_{i=0}^{m} \alpha_{ik} \dot{X}_{ni} \qquad \text{... (2.3.4)}$$

위의 방법은 함수 f(t)를 m차 보간함수로 가정하므로 수치 적분시 발생하는 주파수 변형을 줄여준다.

2.4 SSQ와 Newmark family 방법의 오차비교

위 식 (2.3.2)의 해는 아래와 같은 형태로 표시할 수 있다. 즉,

$$X_{n+1} = X_n \cos\phi + \frac{\dot{X}_n}{\omega}\sin\phi \qquad \text{... (2.4.1)}$$

$$\dot{X}_{n+1} = -X_n\omega \sin\phi + \dot{X}_n \cos\phi \qquad \text{... (2.4.2)}$$

여기서 ϕ는 θ (=ωh)의 함수이며, θ/ϕ는 주기의 실제값과 근사값의 비로 주파수 변형을 의미한다. θ/ϕ = 1인 경우 식 (2.4.1), (2.4.2)값은 정확해이다.

1) SSQ 방법

보간함수가 2차인 경우, $\alpha_{01} = \frac{5}{4}$, $\alpha_{11} = \frac{8}{24}$, $\alpha_{21} = -\frac{1}{24}$, $\alpha_{02} = \frac{1}{6}$,$\alpha_{12} = \frac{2}{3}$, $\alpha_{22} = \frac{1}{6}$이며,

$$\frac{\theta}{\phi} = 1 + \frac{\theta^4}{720} + O(\theta^6) \qquad \text{...(2.4.3)}$$

2) Newmark family 방법

- 평균 가속도법 (β = 1/4, γ = 1/2) :

$$\frac{\theta}{\phi} = 1 + \frac{\theta^2}{12} + O(\theta^4) \qquad \text{...(2.4.4)}$$

- 선형 가속도법 (β = 1/6, γ = 1/2) :

$$\frac{\theta}{\phi} = 1 + \frac{\theta^2}{24} + O(\theta^4) \qquad \text{...(2.4.5)}$$

위 식 (2.4.3), (2.4.4)와 (2.4.5)의 결과로부터 SSQ 방법이 Newmark family 방법보다 에너지 손실이 작음을 알 수 있다. 그러므로 SSQ 방법으로, 적분시 발생하는 주파수 변형을 최소화 하여 정확한 결과를 구할 수 있다.

3. 수치해석

제안방법의 효율성을 증명하기 위하여 평면 뼈대 구조물을 단일 자유도를 갖는 등가 구조물로 해석 하였다. 이 구조물의 고유 진동수는 0.5Hz이며, 고주파 성분이 지배적인 가진력을 사용하였다.

Newmark 방법(평균 가속도법)으로 기존의 운동 방정식과 등가 운동 방정식을 시간 간격 0.05, 0.1sec에 대하여 해석, 비교하였다. 시간간격 0.15sec에 대하여 등가 운동 방정식을 Newmark 방법(평균 가속도법)과 SSQ 방법으로 해석, 비교 하였다.

그림3.a는 시간 간격을 0.05sec로 하여 기존의 운동 방정식을 Newmark 방법으로 구한 결과가 엄밀해와 거의 같음을 보여준다. 그러나 그림 3.b를 보면, 시간간격이 0.1sec로 증가함에 따라 오차가 증가함을 알 수 있다. 그림4.a에서는 시간간격을 0.1sec로 하여 등가 운동 방정식을 Newmark 방법으로 해석 하였을때 기존의 운동 방정식을 이용한 해석보다 훨씬 정확한 결과를 보여준다. 또한, 시간간격이 0.15sec로 증가 했을 경우에도 주파수 변형을 제외 하고는 비교적 정확한 결과를 구할 수 있다.(그림4.b) 그림5는 시간 간격 0.15sec일때 등가 운동 방정식을 SSQ 방법으로 해석하여 위의 주파수 변형을 감소시킨 결과이다. 이결과는 그림3.a의 결과와 거의 같음을 알 수 있다. 즉,제안 방법은

시간간격을 3배로 증가시켜도 정확한 결과를 구할 수 있는 방법이다.

4. 결론

제안방법은 유연화된 저항력과 외력을 이용한 해석으로, 긴 적분시간 간격에서도 정확한 결과를 구할 수 있다. 특히 지진과 같이 변화가 심한 가진력의 경우 그 효과는 현저하다. 부가적으로 SSQ 방법을 이중 적분된 등가 방정식 해석에 적용하므로써 주파수 변형을 줄일 수 있다. 그러므로 제안방법은 고주파 성분이 지배적인 가진력에대한 해석에 매우 효과적이며 해석 시간을 1/3로 단축시킬 수 있었다.

5. 추후 연구과제

비선형 문제의 해석에 있어서 하중과 변위에 따라 변하는 저항함수에 대한 고려가 필요하다. 재하(loading), 제하(unloading)와 항복 상태에 대한 정확한 관찰을 위해 SSQ 방법을 등가 방정식에 적용하므로써 긴 시간 간격에서의 정확한 해석이 기대된다.

6. 참고문헌

[1] Ehle, B. L. (1969). "On Pad*e*′ approximations to exponential function and A-stable methods for the numerical solution of initial value problems." *Research Report CSSR 2010*, Dept. AACS, Univ. of Waterloo, Waterloo, Canada.

[2] Healey, T. J., and Robinson, A. R. (1984). "Successive symmetric quadratures: a new approach to the integration of ordinary differential equations." *Proc. 5th ASCE-Engrg. Mech. Div. Specialty, Conf.*, Asce.

[3] C.-C. Chen., and Robinson, A. R. (1993). "Improved time-history analysis for structural dynamics. I: Treatment of rapid variation of excitation and material nonlinearity." *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. 119, No. 12, 2496-2513.

[4] Bathe, K. J. (1982). "Finite element procedures in engineering analysis." *Prentice-Hall*

[5] Hughes, Thomas J. R. "The finite element method." *Prentice-Hall*

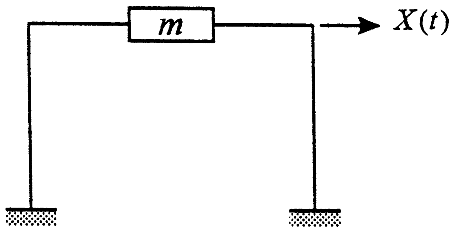
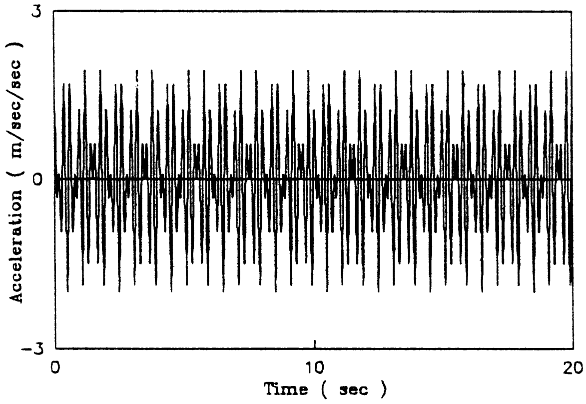
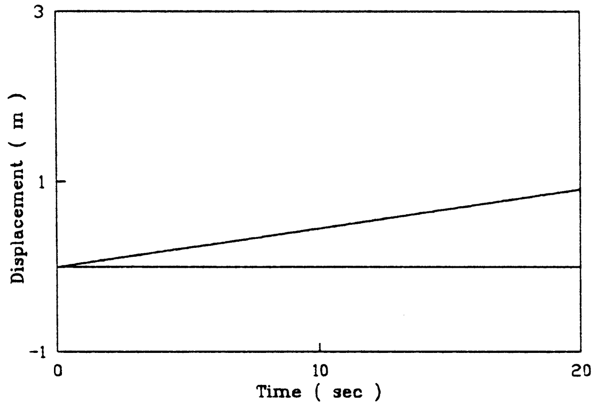


그림 1. 해석대상 구조물

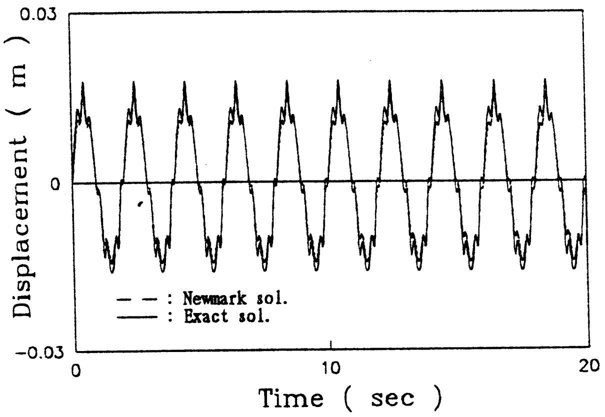


(a) 가속도

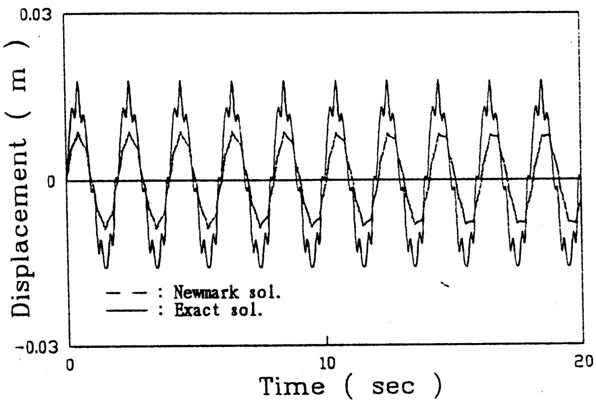


(b) 변위

그림 2. 가진력

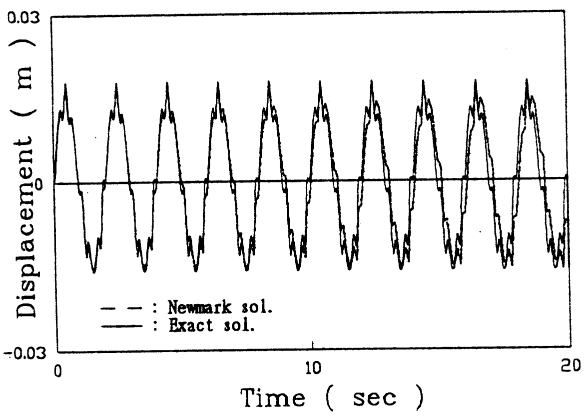


(a) 시간간격 : 0.05sec

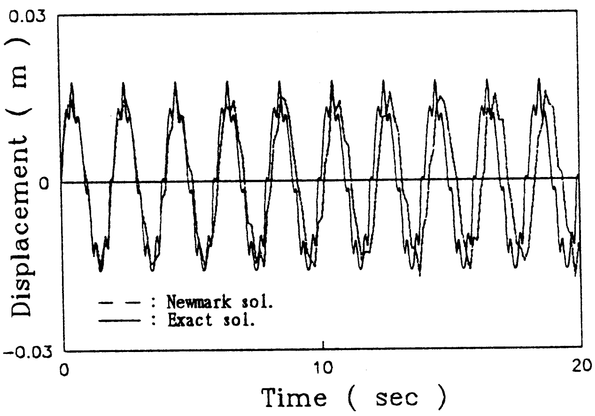


(b) 시간간격 : 0.10sec

그림 3. 기존 운동 방정식에 의한 해석 : Newmark Sol.

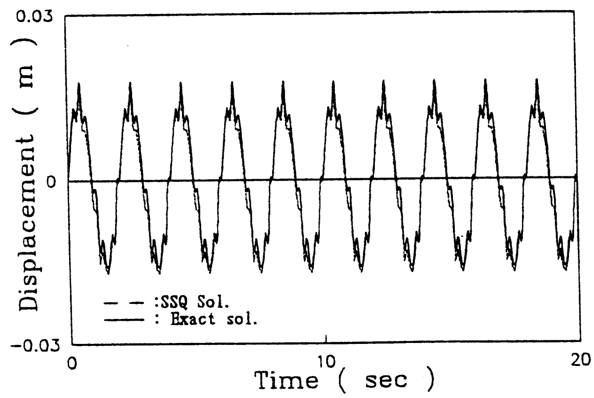


(a) 시간간격 : 0.10sec



(b) 시간간격 : 0.15sec

그림 4. 등가 운동 방정식에 의한 해석 : Newmark Sol.



시간간격 : 0.15sec

그림 5. 등가 운동 방정식에 의한 해석 : SSQ Sol.