

重複된 固有振動數를 갖는 構造物의 效率的인 自由振動 解析方法

An Efficient Free Vibration Analysis of Structures with Multiple Natural Frequencies

이인원,¹ *정형조,² 김만철³

1. 서론

동적 하중을 받는 구조물에 대해서 동적 해석은 필수적이다. 이러한 구조물의 동적 해석에 모우드 중첩법을 이용할 경우, 대부분의 노력 즉 계산시간이 고유치 문제의 해(고유진동수와 모우드형)를 구하는데 소요된다. 특히 다경간 교량, 원자력 격납구조물, 사장교, 타이어 등과 같은 구조물의 동특성 해석에 있어서 그것의 고유진동수에는 중복근이 존재하게 되며, 이를 기존방법으로 해석할 경우에는 수치적 불안정이 유발되는 문제점이 발생한다. 본 연구에서는 위의 수치적 불안정성을 해결하고 수렴성을 향상시키기 위해 accelerated modified Newton-Raphson 방법을 이용하여 Robinson-Lee 방법의 수렴성을 개선한 고유치해법을 제안한다.

2. Robinson-Lee 방법

구조물의 동적 해석에서 고려되는 일반화된 고유치문제는 다음과 같다.

$$A \bar{x}_i = \lambda_i B \bar{x}_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad \dots\dots(2.1)$$

여기서 A는 강성행렬, B는 질량행렬을 나타내고 두 행렬 모두 n차의 대칭행렬이며 B는 정부호(positive definite)이다. 또한 \bar{x}_i 는 i번째 모우드형(ϕ_i)을, λ_i 는 i번째 고유진동수의 제곱(ω_i^2)을 의미한다.

식(2.1)에서 고유치들이 서로 다른 경우에 대해서는 참고문헌([1],[2])을 참고하고, 여기서는 고유치가 중복근인 경우 ($\lambda_m = \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_{m+s-1}$; s=중복도)만을 고려하기로 한다.

s개의 정수로 구성된 집합 $S = [m, m+1, \dots, m+s-1]$ 를 생각해 보자. 또한 고유치 λ_j ($j \in S$)에 대응하는 고유벡터 \bar{x}_j ($j \in S$)에 의해 span되어지는 s차원 부분공간을

R이라 하고, B에 대해 정규직교하고 부분공간 R에 근접해 있는 s개의 벡터를 \bar{y}_j ($j \in S$)라 한다.

위의 정의에 의해서 고유벡터 \bar{x}_j ($j \in S$)의 부분공간 R은 '제한된 정적치 문제(Constrained Stationary-Value Problem)'로 표현할 수 있고 그 식은 다음과 같은 Lagrangian으로 나타낼 수 있다.^[1]

$$L = \sum_{i \in S} \bar{y}_i^T A \bar{y}_i - \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \mu_{ij} (\bar{y}_i^T B \bar{y}_j - \delta_{ij}) \quad \dots\dots(2.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{y}_j} = 0 ; A \bar{y}_j = \sum_{i \in S} \mu_{ij} B \bar{y}_i \quad (j \in S) \quad \dots\dots(2.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_{ij}} = 0 ; \bar{y}_i^T B \bar{y}_j = \delta_{ij} \quad (i, j \in S) \quad \dots\dots(2.4)$$

여기서 undetermined multipliers μ_{ij} 는 대칭, 즉 $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ 이다.

여기에서 식(2.3)과 식(2.4)를 행렬식을 이용하여 나타내면 식(2.5)와 식(2.7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$A \bar{y}_j = B Y \bar{d}_j \quad (j = m, m+1, \dots, m+s-1) \quad \dots\dots(2.5)$$

또는

$$A Y = B Y D \quad \dots\dots(2.6)$$

그리고

$$Y^T B Y = I_s \quad \dots\dots(2.7)$$

여기서

$$Y = [\bar{y}_m, \bar{y}_{m+1}, \dots, \bar{y}_{m+s-1}]$$

$$\bar{d}_j^T = (\mu_{mj}, \mu_{m+1,j}, \dots, \mu_{m+s-1,j}) \quad (j = m, m+1, \dots, m+s-1)$$

$$D = [\bar{d}_m, \bar{d}_{m+1}, \dots, \bar{d}_{m+s-1}]$$

$I_s = s$ 차의 단위행렬

식(2.5)를 초기근사값 $\bar{d}_j^{(0)}$, $\bar{y}_j^{(0)}$ 으로 k번 반복연

¹ : 한국과학기술원 토목공학과 부교수
² : 한국과학기술원 토목공학과 석사과정
³ : 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

산하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\bar{r}_j^{(k)} = A \bar{y}_j^{(k)} - B Y^{(k)} \bar{d}_j^{(k)} \quad \dots\dots(2.8)$$

여기서 $\bar{r}_j^{(k)}$ 는 잔류벡터를 의미하며 $\bar{d}_j^{(k)} = \bar{d}_j$, $\bar{y}_j^{(k)} = \bar{y}_j$ 가 되려면 잔류벡터가 영벡터(null vector)이어야 한다. 이를 위해서 다음과 같은 Newton-Raphson 방법을 적용한다.

$$\begin{aligned} \bar{r}_j^{(k+1)} &= 0 \\ &= A \bar{y}_j^{(k+1)} - B Y^{(k+1)} \bar{d}_j^{(k+1)} \quad \dots(2.9) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{d}_j^{(k+1)} &= \bar{d}_j^{(k)} + \Delta \bar{d}_j^{(k)} \\ \bar{y}_j^{(k+1)} &= \bar{y}_j^{(k)} + \Delta \bar{y}_j^{(k)} \end{aligned} \quad \dots\dots(2.10)$$

식(2.10)을 식(2.9)에 대입한 후, 비선형항을 무시하고 정리하면 다음과 같은 선형식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} -A \bar{y}_j^{(k)} + B Y^{(k)} \bar{d}_j^{(k)} &= \\ A \Delta \bar{y}_j^{(k)} - B \Delta Y^{(k)} \bar{d}_j^{(k)} - B Y^{(k)} \Delta \bar{d}_j^{(k)} & \end{aligned} \quad \dots\dots(2.11)$$

여기서 $\lambda_j (j=m, m+1, \dots, m+s-1)$ 가 중복근일 때, D의 비대각 요소들은 영(zero)이다.^[1] 그러므로 식(2.11)의 우변의 두번째 항을 $\mu_{jj}^{(k)} B \Delta \bar{y}_j^{(k)}$ 로 근사할 수 있고 식(2.11)을 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} -A \bar{y}_j^{(k)} + B Y^{(k)} \bar{d}_j^{(k)} &= \\ A \Delta \bar{y}_j^{(k)} - \mu_{jj}^{(k)} B \Delta \bar{y}_j^{(k)} - B Y^{(k)} \Delta \bar{d}_j^{(k)} & \end{aligned} \quad \dots\dots(2.12)$$

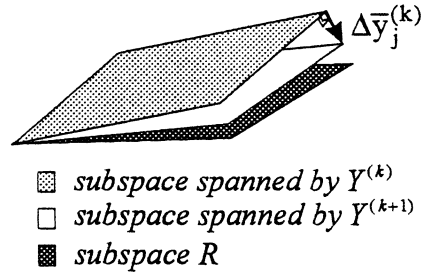
식(2.12)에서 미지수는 $(n+s)$ 개 ($\bar{d}_j^{(k)}$ 의 s 개 요소, $\bar{y}_j^{(k)}$ 의 n 개 요소)이지만 방정식은 n 개이므로, $\Delta \bar{d}_j^{(k)}$ 와 $\Delta \bar{y}_j^{(k)}$ 를 구하기 위해서는 s 개의 방정식이 더 필요하다.

추가적으로 필요한 s 개의 방정식은 $Y^{(k)T} B Y^{(k)} = I_s$ 에 Newton-Raphson 방법을 적용하고 비선형항을 무시하면 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$Y^{(k)T} B \Delta \bar{y}_j^{(k)} = 0 \quad \dots\dots(2.13)$$

이 식은 증분벡터 $\Delta \bar{y}_j^{(k)}$ 가 질량행렬 B에 대하여 현 벡터 $\bar{y}_j^{(k)} (j \in S)$ 에 직교하도록 하므로써, 증분벡터

의 비제한적인 변화를 막아서 현 벡터가 가장 효율적으로 구조물의 고유벡터 $\bar{x}_j (j \in S)$ 에 수렴하도록 함을 의미한다. [참고 그림[2.1]]



그림[2.1] 식(2.13)의 의미(가정: B=I)

식(2.12)와 (2.13)을 하나의 선형대수 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} A - \mu_{jj}^{(k)} B & -B Y^{(k)} \\ -Y^{(k)T} B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{y}_j^{(k)} \\ \Delta \bar{d}_j^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{r}_j^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(2.14)$$

미지수 $\bar{d}_j^{(k)}$ 와 $\bar{y}_j^{(k)}$ 에 대해서 계수행렬은 대칭이고 또한 정칙(nonsingular)이다.^[1]

식(2.14)의 알고리즘은 반복할 때마다 계수행렬이 변하기 때문에 많은 연산이 필요하게 된다. 이러한 비효율성을 개선하기 위하여 수정된 Newton-Raphson 방법을 사용하면 식(2.14)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A - \mu_{jj}^{(0)} B & -B Y^{(k)} \\ -Y^{(k)T} B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{y}_j^{(k)} \\ \Delta \bar{d}_j^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{r}_j^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(2.15)$$

이 식은 수렴을 위해서 식(2.14)보다 많은 반복횟수를 필요로 하지만, 일단 계수행렬의 부행렬 $A - \mu_{jj}^{(0)} B$ 가 각 반복 때마다 항상 일정하기 때문에 연속적인 반복연산에서는 적은 연산만을 필요로 하게 되어 전체적인 해석시간을 감소시킨다.^[1]

3. 제안방법

본 연구에서는 Robinson-Lee 방법을 더욱 개선하기 위하여 accelerated modified Newton-Raphson 방법을 이용하였다. 즉

$$\begin{aligned} \bar{d}_j^{(k+1)} &= \bar{d}_j^{(k)} + \Delta \bar{d}_j^{(k)} \\ \bar{y}_j^{(k+1)} &= \bar{y}_j^{(k)} + \alpha \Delta \bar{y}_j^{(k)} \end{aligned} \quad \dots\dots(3.1)$$

식(3.1)에서 step length(α)는 $(k+1)$ 번째 잔류벡터 $\bar{r}_j^{(k+1)}$ 의 정규를 최소화하기 위한 값으로 최소자승법을 이용하였다. 즉

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \{ (\bar{r}_j^{(k+1)})^T \bar{r}_j^{(k+1)} \} = 0 \quad \dots\dots(3.2)$$

$$\alpha = - \frac{(\Delta \bar{y}_j^{(k)})^T (A - \mu_{jj}^{(k+1)} B) (A - \mu_{jj}^{(k+1)} B) \bar{y}_j^{(k)}}{(\Delta \bar{y}_j^{(k)})^T (A - \mu_{jj}^{(k+1)} B) (A - \mu_{jj}^{(k+1)} B) \Delta \bar{y}_j^{(k)}} \quad \dots\dots(3.3)$$

제안방법에서 step length(α)를 벡터에 대해서만 적용한 이유는 고유치에 대한 수렴성이 고유벡터의 수렴성보다 좋기 때문이다.

4. 수치해석

제안방법의 효율성을 증명하기 위하여 15층 3차원 뼈대 구조물을 대상 구조물로 해석하였다. 이 구조물의 유한요소 모델은 그림[4.1]에서와 같이, 315개의 보 요소와 144개의 연결점으로 되어 있고 총 자유도 수는 810개, 최대 띠폭(max. half bandwidth)은 60이다. 이 구조물의 제원은 그림[4.1]에 표시되어 있다. 해석에 사용된 컴퓨터는 12 mips의 IRIS이다. 제안방법과 Robinson-Lee 방법 그리고 널리 사용되고 있는 ADINA-84의 subspace iteration 방법과 determinant search 방법을 이용하여, 허용 오차정규 10^{-9} 까지 10개의 고유치를 구했다. 제안방법과 Robinson-Lee 방법의 초기값들은 ADINA-84의 subspace iteration 방법에서 오차정규 10^{-1} 을 만족하는 중간 결과를 이용하였다.

표[4.1]은 각 방법에 있어서 10개의 고유치를 구하는데 소요되는 해석시간을 비교한 것으로, 기존방법에 비해서 Robinson-Lee 방법이나 제안방법의 해석시간이 훨씬 적게 소요되었다. 이것은 Robinson-Lee 방법과 제안방법이 determinant search 방법의 단점 즉, secant 방법이 적용되는 부분의 낮은 수렴성과 subspace iteration 방법의 단점 즉, 수렴에 대한 안정성 확보를 위한 추가적인 연산을 해소하였기 때문이다. 표[4.2]는 각 모드당 소요되는 반복횟수를 비교한 것으로, 고유치들이 중복근인 경우는 물론이고 서로 다른 경우에도 기존방법에 비해서 Robinson-Lee 방법이나 제안방법이 허용 오차정규를 만족하는 데 소요되는 반복횟수가 훨씬 적었다. 그림[4.2]는 중복된 고유치들 사이에 있는 3번째 고유치에 대응하는 고유벡터의 수렴성을 비교한 것이고 그림[4.3]은 중복근 중 하나인 7번째 고유치에 대응하는 고유벡터의 수렴성을 비교한 것이다. 두 경우 모두 기존방법에 비해 Robinson-Lee 방법과 제안방법이 훨씬 빨리 수렴됨을 알 수 있다. 또한 같은 반복횟수일지라도 제안방법은 α 의 적용으로

인해 Robinson-Lee 방법에 비해 오차가 좀 더 작음을 알 수 있다.

5. 결론

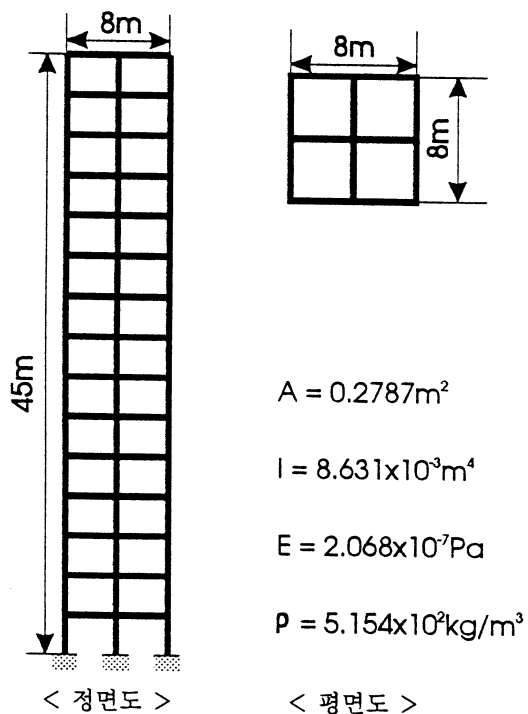
본 연구에서는 accelerated modified Newton-Raphson 방법을 Robinson-Lee 방법에 도입하여 중복근을 갖는 고유치문제에 대한 효율적인 수치해석법을 제안하였다.

즉, 제안방법은 구조물의 고유진동수에 중복근이 존재해서 수치적 불안정성을 가지기 쉬운 경우에도 수치적 안정성을 가지고 구조물의 동특성을 구할수 있을 뿐만 아니라, 비록 step length를 구하기 위해 추가적인 연산을 필요로 하지만 수렴성을 향상시킴으로써 전체 해석시간을 감소시킨 효율적인 고유치 해법이다.

본 연구에서는 구조물의 고유진동수가 근접한 경우에 대해서도 수치해석을 수행하여 해석결과를 얻어냈으나 지면관계상 여기서는 생략한다.

6. 참고문헌

- [1] Lee, I. W., and Robinson, A. R. (1979). "Solution techniques for large eigenvalue problems in structural dynamics." *Structural Research Series No. 462*, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [2] 김만철 (1994). "대형구조물의 효율적인 자유진동 해석 방법." 석사학위논문, 한국과학기술원.



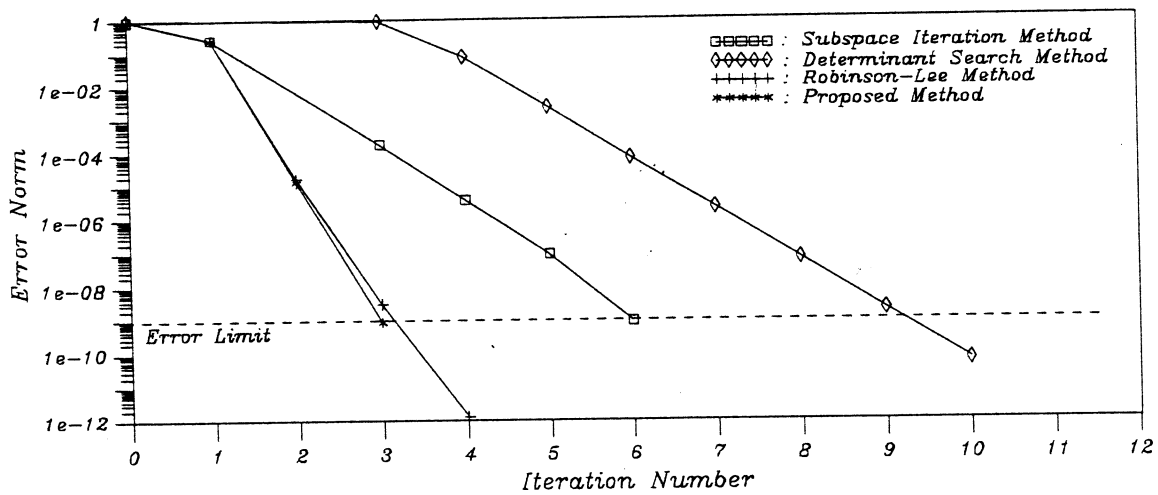
그림[4.1] 15층 3차원 뼈대 구조물

표[4.1] 허용 오차정규 10^{-9} 을 만족하는 10개의 고유치를 구하는 데 소요되는 해석시간

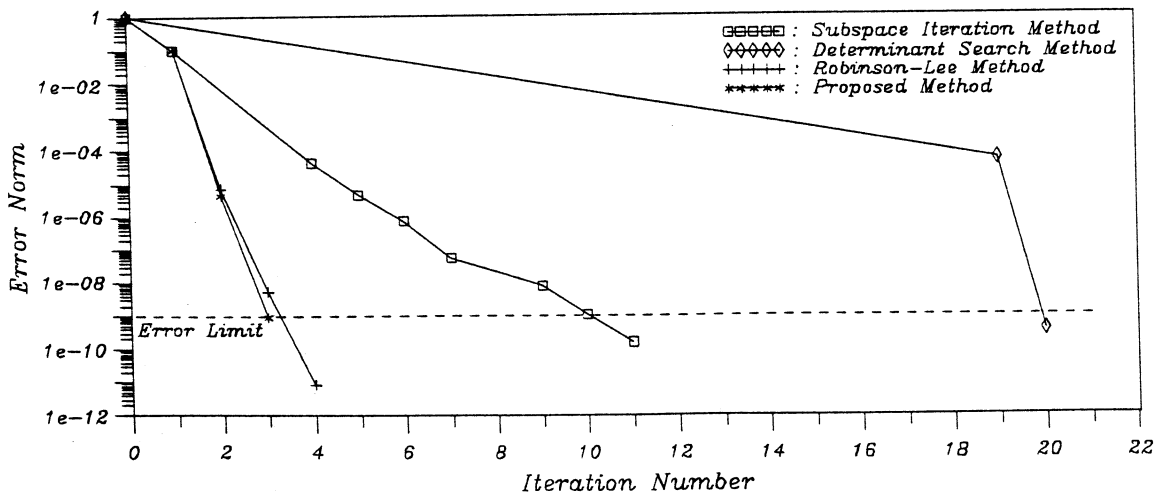
Methods	Solution Time(sec) (Ratio)
Proposed Method	153.37 (1.00)
Robinson-Lee Method	160.48 (1.05)
Subspace Iteration Method	424.13 (2.77)
Determinant Search Method	560.15 (3.65)

표[4.2] 모우드당 허용 오차정규 10^{-9} 을 만족하는 데 소요되는 반복횟수 (* : α 적용)

모우드 수	고유 진동수 (Hz)	Number of Iteration			
		Subspace Iteration Method	Determinant Search Method	Robinson-Lee Method	Proposed Method
1	0.065	4	3	2	2
2	0.065	4	7	2	2
3	0.094	6	10	4	3*
4	0.213	7	19	3	3
5	0.213	6	3	3	3
6	0.284	20	11	8	6*
7	0.403	11	20	4	3*
8	0.403	9	4	4	3*
9	0.481	12	13	5	5*
10	0.584	13	22	6	6*



그림[4.2] 3번째 고유치의 수렴성 비교



그림[4.3] 7번째 고유치의 수렴성 비교