

고유진동수와 모우드의 미분값을 구하기 위한 효율적인 수치해석법

An Efficient Numerical Method for Computation of Natural Frequency and Mode Shape Derivatives

°정길호¹, 정형조², 이인원³

1. 개요

시스템의 거동은 고유치문제의 해, 즉 고유진동수와 모우드를 구함으로써 완전히 결정된다. 이러한 고유치문제의 해는 시스템의 설계변수가 변함에 따라 변하게 되고, 따라서 시스템의 동응답 특성도 변하게 된다. 그래서 고유쌍의 미분값들은 동응답의 민감도를 결정하는데 대단히 유용할 뿐만 아니라, 설계 경향 연구나 실제 시스템 거동에 대한 직관을 얻는데도 유용하다.

1974년에 Rudisill과 Chu^[1,2]가 고유벡터 미분을 구할 수 있는 대수적인 방법을 제안했다. 이 방법은 최종적으로 풀어야 하는 선형 대수 방정식의 계수 행렬이 비대칭이고, 서로 다른 고유치를 갖는 고유치문제에 국한되어 있다. 1976년에 Nelson^[3]도 서로 다른 고유치를 갖는 일반적인 실계수행렬에 대한 고유쌍을 계산하는 알고리즘을 제안했다. 이 방법도 한 개의 고유쌍 미분을 계산하기 위하여 그에 해당하는 한 쌍의 고유치가 필요하기 때문에 효율적이긴 하지만, 고유치가 중근을 갖는 경우에 어려움이 있다. 일반적인 구조물은 구조물의 대칭성때문에 많은 중근이 존재한다. 그래서 중근을 갖는 경우에 고유진동수 및 모우드의 미분을 구하기 위하여 많은 연구가 진행되고 있다^[4,5]. Nelson의 방법을 중근을 갖는 경우까지 확장한 Ojalvo^[4] 방법이 있고, 이 방법을 수정한 Mills-Curren방법과 Dailey^[5] 방법이 있다. 이 방법들 또한 Nelson의 방법을 기본적인 알고리즘으로 사용하기 때문에 프로그래밍에 어려움이 있고 모우드의 미분값을 구할 때 대단히 복잡하다. 그렇지만 제안 방법은 계수행렬이 대칭을 유지하도록 제약 조건을 첨가하여 대칭으로 만들어서 선형 대수 방정식을 풀기 때문에 band형태나 sky-line형태로 계산하여서 컴퓨터 메모리나 해석 시간을 절약할 수 있는 장점이 있다. 또한 시스템의 고유진동수가 중복근을 갖는 경우에도, 설계변수가 변할 때 나타나는 m (중복근의 갯수)개의 고유벡터에 근접한 원래 시스템의 고유벡터 집합을 구하면, 이 벡터들을 이용한 제약조건을 첨가하여 모우드의 미분을 계산할 수 있다.

2장에서는 기존 방법들의 고유치문제에 대한 민감도 해석을 간략히 살펴보았다. 3장에서는 제안 방법과 제안 방법의 수치적 안정성을 증명하였고, 4장에서는 예제를 통한 수치해석을 수행하였다.

2. 기존의 민감도 해석 기법

2.1 이론적 배경

동적 해석에서 일반화된 고유치문제는 다음과 같다.

$$K\phi_j = \lambda_j M\phi_j \quad (1)$$

여기서 K 와 M 은 각각 시스템의 강성행렬과 질량행렬이다. M 은 positive definite이고, K 는 positive definite 또는 semi-positive definite이다. K 와 M 은 n 차의 대칭 행렬이고 λ_j 는 시스템의 j 번째 고유진동수의 제곱이고, ϕ_j 는 시스템의 모우드이다. 모우드는 일반적으로 다음과 같이 정규화한다.

$$\phi_j^T M \phi_j = 1 \quad (2)$$

고유치의 미분을 구하기 위하여 설계변수에 대하여 식(1)을 미분하면, 다음과 같다.

$$(K - \lambda_j M)\phi_j' = -(K' - \lambda_j M')\phi_j + \lambda_j' M\phi_j \quad (3)$$

식(3)의 양변 앞에 ϕ_j^T 를 곱하고 정리하면, 고유치 미분을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\lambda_j' = \phi_j^T (K' - \lambda_j M') \phi_j \quad (4)$$

여기서 $\lambda_j' = \partial \lambda_j / \partial p$, $K' = \partial K / \partial p$, $M' = \partial M / \partial p$ 이고, p 는 설계변수이다.

이제 모우드의 미분값을 살펴 보면, 행렬 $(K - \lambda_j M)$ 가 정칙행렬이 아니기 때문에 직접적으로는 ϕ_j' 을 구할 수 없다. 그래서 Rudisill 과 Chu는 제약조건을 첨가해서 비대칭 정칙행렬을 구성하여 ϕ_j' 을 계산했고, Nelson은 particular solution과 homogeneous solution의 합으로 ϕ_j' 를 구하는 알고리즘을 제시했다. 이외에도 모우드형의 미분을 모우드의 조합으로 표시하여 계산하는 modal method^[6]와 이를 수정·보완한 많은 방법들이 있지만, 한 개의 모우드의 미분을 구하기 위하여 전부, 또는 여러개의 모우드들이 필요하기 때문에 계산량이 많은 단점이 있다.

2.2 Nelson 방법

이 방법은 particular solution v 과 homogeneous solution $c\phi_j$ 의 합으로 모우드의 미분을 계산한다. 즉,

$$\phi_j' = v + c\phi_j \quad (5)$$

여기서 c 는 계수이다. particular solution v 는 j 번째 고유벡터의 요소중에서 가장 큰 값에 해당하는

¹: 한국과학기술원 기계공학과 박사과정
²: 한국과학기술원 토목공학과 박사과정
³: 한국과학기술원 토목공학과 교수

위치를 k 라고 하면, ϕ_j' 의 요소중에서 k 번째 값을 0으로 하고 계산함으로써 얻을 수 있다. 계수 c 는 식(2)을 미분한 식에 식(5)을 대입하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$c = -vM\phi_j - 0.5\phi_j^T M' \phi_j \quad (6)$$

이 방법은 중복근을 갖는 경우에 ϕ_j' 을 구할 수 없다. Ojalvo, Mills-Curren 그리고 Dailey등이 Nelson의 방법을 확장하여 중복근을 갖는 경우에 해법을 개발하였지만, 대단히 복잡할 뿐만 아니라 계산량도 많다.

2.3 Rudisill & Chu 방법

이 방법은 제약조건을 첨가하여 비대칭 선형 대수 방정식을 푸는 방법이다. 식(1)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$(K - \lambda_j M)\phi_j = 0 \quad (7)$$

식(7)를 미분한 식(3)를 다시 쓰면,

$$(K - \lambda_j M)\phi_j' - \lambda_j' M\phi_j = -(K' - \lambda_j M')\phi_j \quad (8)$$

고유 벡터를 길이로 정규화한 다음 미분하면 다음과 같다.

$$\phi_j^T \phi_j = 1 \quad (9)$$

$$\phi_j^T \phi_j' = 0 \quad (10)$$

식(8)과 식(10)를 다음과 같이 행렬 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \phi_j^T & 0 \\ K - \lambda_j M & -M\phi_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_j' \\ \lambda_j' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(K' - \lambda_j M') \end{Bmatrix} \phi_j \quad (11)$$

식(11)에서 계수 행렬을 Choleski의 행렬 분해법을 이용하여 ϕ_j' 과 λ_j' 을 구할 수 있다. 이 방법은 계수 행렬이 비대칭이고, 중복근이 있는 경우에 사용할 수 없는 단점이 있다.

3. 제안 방법

3.1 서로 다른 고유치를 갖는 경우

제안방법은 식(2)의 정규화 조건을 미분한 식을 제약조건으로 하여 대칭인 계수행렬을 만들고, 수치적 안정성을 확보하여 고유벡터의 미분을 구하는 방법이다. 식(8)을 다시 써 보면 다음과 같다.

$$(K - \lambda_j M)\phi_j' - \lambda_j' M\phi_j = -(K' - \lambda_j M')\phi_j \quad (12)$$

식(2)과 같이 정규화한 식을 미분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\phi_j^T M\phi_j' + 0.5\phi_j^T M' \phi_j = 0 \quad (13)$$

식(12)과 식(13)를 합해서 계수행렬이 대칭인 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K - \lambda_j M & -M\phi_j \\ -\phi_j^T M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_j' \\ \lambda_j' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(K' - \lambda_j M')\phi_j \\ -0.5\phi_j^T M' \phi_j \end{Bmatrix} \quad (14)$$

식(14)에서 계수행렬을 LDL^T 로 행렬 분해해서 ϕ_j'

과 λ_j' 을 간단히 구할 수 있다. 계수행렬이 대칭인 것은 대단히 중요하다. 계수 행렬을 band형태나 skyline형태로 저장할 수 있기 때문에 컴퓨터 메모리나 계산 시간이 절약된다. 제안방법의 안정성은 3.3절에서 증명하였다.

3.2 중복된 고유치를 갖는 경우

고유치문제의 고유진동수가 m 개 중복되었다고 하면, 설계변수가 변함에 따라 중복되었던 m 개의 고유진동수가 서로 다른 값을 갖게 된다. 이 경우 m 개의 서로 다른 고유진동수에 대해서 유일한 고유 벡터를 구할 수 있다. 그러나 고유벡터의 미분이 존재하기 위해서는 설계변수가 변하기 전의 고유치가 중복근을 갖는 공간에서 설계변수가 변할 때 나타나는 고유벡터에 가장 근접한 고유벡터 집합을 먼저 구해야 한다. 이러한 근접한 고유벡터 집합을 구하기 위해서 다음과 같은 고유치문제를 고려한다.

$$K\Psi = M\Psi \Lambda \quad (15)$$

여기서 $\Lambda = \lambda I$, $\Psi^T M\Psi = I$ 그리고, λ 는 Ψ 에 의해 span되는 고유공간(eigenspace)의 고유치이다. 즉, λ 는 m 개의 중복근을 갖는다. 또한 Ψ 는 $n \times m$ 행렬이고, Λ 는 $m \times m$ 행렬이다. 근접한 고유벡터 들은 orthonormal transformation에 의해 Ψ 의 항으로 표시된다.

$$Z = \Psi \Gamma \quad (16)$$

여기서, Γ 는 $m \times m$ orthonormal transformation 행렬이다.

$$Z^T M Z = \Gamma^T \Psi^T M \Psi \Gamma = \Gamma^T \Gamma = I \quad (17)$$

고유벡터 미분을 구하기 위하여 먼저 Γ 를 계산해야 한다. 설계변수가 변함에 따라 서로 다른 m 개의 값을 갖게 되기 때문에, $\Lambda' = \partial \Lambda / \partial p = \text{diag}(\lambda_1', \dots, \lambda_m')$ 로 쓸 수 있다. Γ 를 구하기 위하여 다음과 같이 근접한 고유벡터 Z 로 구성된 고유치문제를 고려하면,

$$KZ = MZ \Lambda \quad (18)$$

식(18)을 미분하고 정리하면 다음과 같다.

$$(K - \lambda M)Z' = -(K' - \lambda M')Z + MZ \Lambda' \quad (19)$$

식(19)의 양변에 Ψ^T 를 곱하고, $Z = \Psi \Gamma$ 를 대입하면,

$$[\Psi^T (K' - \lambda M') \Psi] \Gamma = D \Gamma = \Gamma \Lambda' \quad (20)$$

고유치문제 식(20)을 풀면 Γ 를 구할 수 있다. 그러므로 식(16)을 이용하여 근접한 고유벡터들로 이루어진 행렬 Z 를 구할 수 있다. $Z^T M Z = I$ 를 설계 변수에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$Z^T M Z' + 0.5Z^T M' Z = 0 \quad (21)$$

식(19)과 식(21)을 행렬 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K - \lambda M & -MZ \\ -Z^T M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z' \\ \Lambda' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(K' - \lambda M')Z \\ -0.5Z^T M' Z \end{Bmatrix} \quad (22)$$

여기서 식(22)의 계수행렬의 차수는 $(n+m) \times (n+m)$ 이다. 이 행렬은 대칭이므로 고유치가 서로 다른 경우와 같은 장점이 있다.

3.3 제안 방법의 수치적 안정성

고유치가 중복근을 갖는 일반적인 경우에 대하여 제안 방법의 수치적 안정성을 증명하자. 수치적 안정성은 제안 방법의 최종 결과식에서 계수 행렬의 정칙성 (nonsingularity)을 증명하면 된다. 증명의 간단화를 위하여 처음 m 개의 고유값이 중복되었다고 가정하고, 다음과 같은 행렬 K^* 를 정의하자.

$$K^* = \begin{bmatrix} K - \lambda M & -MZ \\ -Z^T M & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서 Z 는 근접한 고유벡터들로 이루어진 $n \times m$ 행렬이다. 행렬 K^* 가 정칙행렬임을 증명하기 위하여 다음과 같은 고유치문제를 도입한다.

$$K^* U = M^* U D \quad (24)$$

여기서,

$$M^* = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_{n+m}] \quad (26)$$

$$D = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+m}) \quad (27)$$

I_m 은 m 차의 단위행렬이고, U 와 D 는 $(n+m) \times (n+m)$ 행렬이다. 식(24)의 고유치문제의 $n+m$ 개의 고유벡터와 고유치는 다음과 같다.

고유벡터,

$$u: \begin{cases} \begin{Bmatrix} z_i \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} z_j \\ -1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} z_k \\ 0 \end{Bmatrix} & i = 1, 2, \dots, m \\ & k = m+1, m+2, \dots, n \end{cases} \quad (29)$$

고유치,

$$\gamma: \begin{cases} -1, \dots, -1 \quad (m \text{ 개}) \\ 1, \dots, 1 \quad (m \text{ 개}) \\ \lambda_k - \lambda \quad (n-m \text{ 개}), \\ (k = m+1, m+2, \dots, n) \end{cases} \quad (30)$$

여기서 λ 는 중복된 고유치이다.

식(24)의 determinant 관계를 고려하면,

$$\begin{aligned} \det[K^*] &= \det[M^*] \det[D] \\ &= (-1)^m \det[M] \prod_{k=m+1}^n (\lambda_k - \lambda) \end{aligned} \quad (31)$$

식(31)에서 $\det[M]$ 은 정의에 의해 0(zero)이 아니므로 $\det[K^*] \neq 0$ 이다. 이상에서 제안 방법의 수치적 안정성이 증명되었다.

4. 수치 해석

제안 방법의 효율성을 증명하기 위하여 서로 다른 고유치를 갖는 경우인 평판과, 중복된 고유치를 갖는 경우인 외팔보를 예제로 하여 해석하였다. 해석에 사용한 컴퓨터는 계산 속도가 10 MIPS이고, 0.9 MFLOPS인 IRIS4D20-S17이다.

4.1 평판

서로 다른 고유치를 갖는 시스템의 예로 그림 1의 평판 구조물을 고려하자. 이 구조물은 36개의 삼각형 요소로 모델링하였다. 각 절점은 3자유도(z -변위, x -각변위, y -각변위)이기 때문에 한 요소는 9자유도이다. 전체 자유도는 72이다.

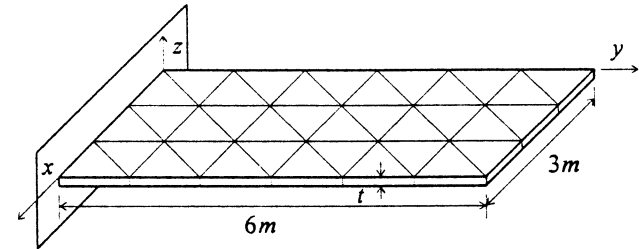


Figure 1 Cantilever plate with the thickness t as the design parameter

탄성계수는 $10.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 이고, 밀도는 $7.85 \times 10^5 \text{ kg/m}^3$ 이다. Poisson비는 0.3이다. 설계변수는 평판의 두께 t 이다. 고유진동수 10개를 표1에 표시하였다. 강성행렬과 질량행렬의 각각 t^3 과 t 에 비례한다. 그래서 이 경우 강성행렬과 질량행렬의 미분은 t 에 대하여 미분함으로써 간단히 구할 수 있다.

Table 1 The lowest 10 natural frequencies of the cantilever plate.

Natural frequency(No.)	Natural frequency(Hz)	Eigenvalue
1	0.868	0.2973E+02
2	3.459	0.4724E+03
3	5.267	0.1095E+04
4	10.90	0.4687E+04
5	14.70	0.8535E+04
6	18.86	0.1405E+05
7	20.98	0.1738E+05
8	24.52	0.2373E+05
9	28.19	0.3138E+05
10	33.35	0.4629E+05

이 예제의 경우 해석 시간은 Nelson 방법과 비교하였다. 10개의 고유값 미분을 구하는 데 걸린 시간은 Nelson 방법의 경우 1.20 sec이고, 제안 방법은 1.18 sec이다. Nelson 방법은 n 차의 선형 대수 방정식과 상수 c 를 계산하고, 제안 방법은 $n+1$ 차의 선형 대수 방정식을 계산하기 때문에 계산 시간은 비슷하다. 이결과를 그림 2에 표시하였다.

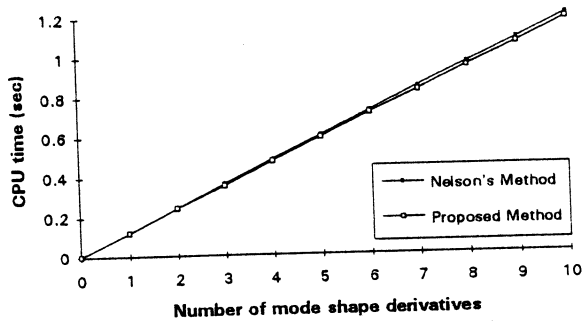


Figure 2 Computatinal time according to the number of mode shape derivatives to be calculated in case of the cantilever plate.

4.2 외팔보

중복된 고유치를 갖는 시스템의 예로 그림 3의 외팔보를 고려하자. 이 구조물은 18개의 보요소로 모델링하였다. 각 절점은 4자유도(y -변위, z -변위, y -각변위, z -각변위)이기 때문에 한 요소는 8 자유도이다. 전체 자유도는 72이고, 고유치 문제의 차수는 72×72 이다.

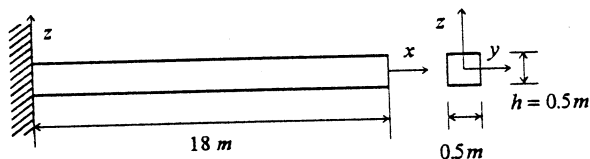


Figure 3 Cantilever beam with the height h as the design parameter

탄성계수는 $2.10 \times 10^{11} N/m^2$ 이고, 밀도는 $7.85 \times 10^3 kg/m^3$ 이다. Poisson비는 0.3이고, 보의 폭과 높이는 모두 0.5 m이다. 설계변수는 보의 높이 h 이다. 고유진동수 10개를 표2에 표시하였다. 이 외팔보는 첫번째와 두번째, 세번째와 네번째의 순으로 중복된 고유치를 갖는다.

Table 2 The lowest 10 natural frequencies of the cantilever beam.

Natural frequency(No.)	Natural frequency(Hz)	Eigenvalue
1	1.440	0.8188E+02
2	1.440	0.8188E+02
3	9.015	0.3209E+04
4	9.015	0.3209E+04
5	25.20	0.2507E+05
6	25.20	0.2507E+05
7	49.25	0.9577E+05
8	49.25	0.9577E+05
9	81.16	0.2600E+06
10	81.16	0.2600E+06

이 예제의 경우 해석 시간은 Dailey 방법과 비교하였다. 10개의 고유쌍 미분을 구하는 데 걸린

시간은 Dailey 방법의 경우 0.75 sec이고, 제안 방법은 0.70 sec이다. Dailey 방법에서 n 차의 선형 대수 방정식과 상수 행렬 C 를 계산하는 데, 상수 행렬을 구하기가 복잡하기 때문에 제안방법에 비해서 계산 시간이 다소 많이 걸린다. 제안방법은 $n+2$ 차의 선형 대수 방정식을 계산한다. 이 결과를 그림 4에 표시하였다.

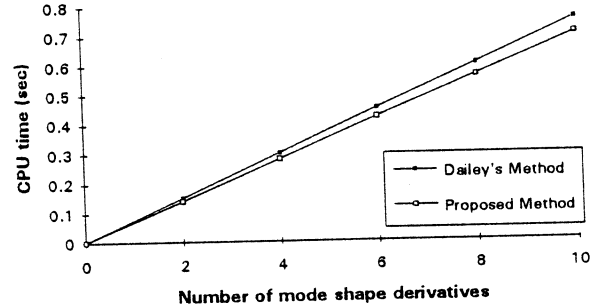


Figure 4 Computatinal time according to the number of mode shape derivatives to be calculated in case of the cantilever beam.

5. 결론

본 논문에서 모드 미분을 구하기 위해 수치적으로 안정한 수치해석 기법을 개발하였다. 제안방법은 최종 결론식의 계수행렬이 대칭이기 때문에 기존의 상용 코드에 무리없이 적용할 수 있고, band형태나 sky-line 형태로 저장할 수 있기 때문에 컴퓨터 메모리나 계산 시간이 절약된다. 또한 고유치가 중복근을 갖을 때에도 쉽게 모드의 미분을 구할 수 있다.

참고문헌

1. Rudisill, C. S. and Chu, Y., "Numerical Methods for Evaluating the Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors," *AIAA Journal*, Vol. 13 Oct. 1974.
2. Rudisill, C. S., "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors of a General Matrix," *AIAA Journal*, Vol. 12, May 1974.
3. Nelson, R. B., "Simplified Calculations of Eigenvector Derivatives," *AIAA Journal*, Vol. 14 Sept. 1976.
4. Ojalvo, I. U., "Efficient Computation of Modal Sensitivities for Systems with Repeated Frequencies," *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 3, 1988.
5. Dailey, R. L., "Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues," *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 4, Feb. 1989.
6. Fox, R. L. and Kapoor, M. P., "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors," *AIAA Journal*, Vol. 6, Dec. 1968.