

# 다목적 최적화를 위한 효율적인 기법의 개발 Development of an Efficient Algorithm for Multiobjective Optimization

°김주태<sup>1</sup>, 이인원<sup>2</sup>

## 1. 서론

구조물의 설계에 있어서 최적설계 기법을 도입하는 데는 많은 어려움이 있다. 특히 실제 구조물의 설계시 최적화하고자 하는 것으로는 구조물의 다면적, 최대처짐, 안전도, 고유진동수, 동적응답 등 여러가지가 존재하므로 어느 한 가지만을 고려한다면 전체 시스템의 측면에서는 최적의 해를 제공하지 못하는 결과가 된다. 이런 현실적 문제에 대한 해결 방안으로 다목적 최적화 기법에 대한 연구가 최근 활발히 진행되고 있다.

다목적 최적화 기법은 최적화하고자 하는 수개의 목적함수를 동시에 고려해서 최적해를 구하는 것으로, 여기에는 제약식법( $\epsilon$ -constraint Method), 가중치법(Weighting Method), 목표계획법(Goal Programming Method), 게임이론(Game Theory)에 의한 방법 등이 있다.<sup>[1]</sup> 그 중에서 특히 제약식법은 최적해의 집합인 Pareto Optima를 제공하기 때문에 실제 응용에 적합한 방법으로 알려지고 있다.<sup>[2]</sup> 그러나 이 방법은 Pareto Optima를 구하기 위해 매번 제약조건식을 바꾸어야 하며 수치적으로 안정적인 수렴을 보장하는 초기값을 선택하는 데 어려움이 있어 프로그래밍이 용이하지 못하다는 단점을 가지고 있다. 그래서 본 연구에서는 제약조건식을 변형시키지 않으면서 각 단계별 문제에 대해 안정적인 수렴을 보장하는 초기값을 제공함으로써 Pareto Optima를 구하는데 매우 효율적인 수치해석 기법을 제안하고자 한다.

## 2. 제안방법

두개 이상의 목적함수를 가지는 다목적 최적화 문제의 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$\text{Minimize } F(X) = [f_1(X) \quad f_2(X) \quad \cdots \quad f_L(X)] \quad (1.a)$$

$$\text{subject to } g_j(X) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (1.b)$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.c)$$

여기서  $X = \{x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n\}^T$ 는 설계변수로 이루어진 벡터이고  $f_i(X)$ 는 고려하는 개개의 목적함수를 나타낸다. 이와 같이 표현된 다목적 최적화 문제를 풀기 위해 L개의 목적함수 중 가장 주된 목적함수  $f_p$ 를 제외한 나머지 L-1개의 부목적함수들을 다음과 같이 변환하면 기존의 수리계획법 등을 그대로 이용해 풀 수 있다.

$$\text{Minimize } f_p \quad (2.a)$$

$$\text{subject to } g_j(X) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.b)$$

$$f_i^k(X) \leq f_i^{k-1}(X) \quad i = 1, 2, \dots, L( \neq P) \quad (2.c)$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.d)$$

변환된 최적화 문제에서  $f_i^k(X)$ 는 수리계획법에 의한 반복과정에서 k번째 함수값을 의미한다. 즉 L-1개의 부목적함수들은 k번째 반복과정에서 k-1번째 함수값을 상한치로 설정하므로써 반복의 진행에 따라 더이상은 커지지 않게 된다.

<sup>1</sup> 한국과학기술원 토목공학과 석사과정

<sup>2</sup> 한국과학기술원 토목공학과 교수

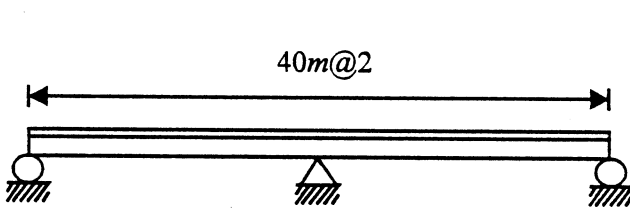
변환된 문제에서는 부목적함수들의 첫번째 상한치가 초기값에 따라 달라지므로 초기값을 적절히 변화시키면서 최적해의 집합인 Pareto Optima를 구할 수 있다. 이를 위해 초기값을 다음 식(3), (4)에 의해 결정한다.

$$X^0 = \sum_{l=1}^L c_l X_l^* \quad (3)$$

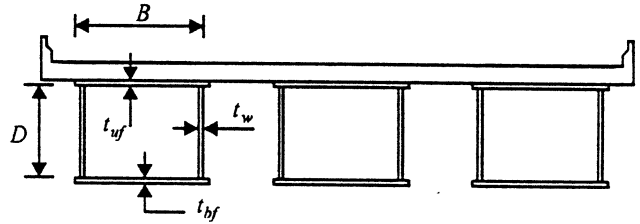
$$\sum_{l=1}^L c_l = 1 \quad (4)$$

여기서  $X_l^*$ 는  $l$ 번째 목적함수만을 고려했을 때의 최적해이다. 식(3)과(4)는 제약조건식과 목적함수가 볼록성(convexity)을 만족할 때 초기값  $X^0$ 가 항상 설계가능 영역에 존재하도록 하므로 결과적으로 수리계획법상 우수한 초기값을 제공한다.

### 3. 최적화 문제의 구성



그림[1] 2경간 연속 강박스거더교



그림[2] 박스거더교의 단면(3주형)

그림[1]의 2경간 연속 강박스거더교를 최적화하기 위해 강재 거더의 단면적과 지간 중앙부의 처짐을 목적함수로 고려했고 설계변수로는 그림[2]에 나타난 거더높이(D), 플랜지 폭(B), 상연플랜지 두께( $t_{wf}$ ), 하연플랜지 두께( $t_{bf}$ ) 및 복부두께( $t_w$ )등으로 설정했다. 거더 단면적에 대한 목적함수는 다음과 같이 설계변수들의 함수로 표현할 수 있다.

$$f_1(X) = B(t_{bf} + t_{wf}) + 2Dt_w \quad (cm^2) \quad (5)$$

처짐에 대한 목적함수는 DB24하중에 의한 지간 중앙부의 처짐으로 다음과 같이 표현된다.

$$f_2(X) = \Delta_L + \Delta_D = \frac{96.186 \times 10^6}{I(X)} \quad (cm) \quad (6)$$

여기서  $I (cm^4)$ 는 휨에 대한 관성 모멘트로서 설계변수의 함수이다.

2경간 연속 강박스거더교에 대한 다목적 최적화 문제는 다음과 같이 정식화할 수 있다.

$$\text{Minimize } f_1(X) = B(t_{bf} + t_{wf}) + 2Dt_w \quad (cm^2) \quad (7.a)$$

$$f_2(X) = \frac{96.186 \times 10^6}{I} \quad (cm) \quad (7.b)$$

$$\text{subject to } \frac{My_t}{I} - \sigma_{sa} \leq 0 \quad (7.c)$$

$$\frac{My_c}{I} - \sigma_{sa} \leq 0 \quad (7.d)$$

$$\frac{S}{A_w} - \tau_{sa} \leq 0 \quad (7.e)$$

$$\left[ \frac{\sigma_m}{\sigma_{sa}} \right]^2 + \left[ \frac{\tau_m}{\tau_{sa}} \right]^2 \leq 1.2 \quad (7.f)$$

$$\frac{B}{48fn} - t_{bf} \leq 0 \quad (7.g)$$

$$\frac{1}{80}(B - t_w - 20) - t_{uf} \leq 0 \quad (7.h)$$

$$\frac{D}{130} - t_w \leq 0 \quad (7.i)$$

여기서 식(7.c), (7.d) 및 (7.e)는 각각 부재의 인장응력 압축응력 전단응력에 대한 제약조건이며 식(7.f)는 합성응력에 대한 제약조건이다. 그리고 식(7.g), (7.h), (7.i)는 각각 하연플랜지 상연플랜지 및 복부에 대한 도로교 시방서의 최소두께 규정이다.<sup>[3]</sup>

#### 4. 수치해석

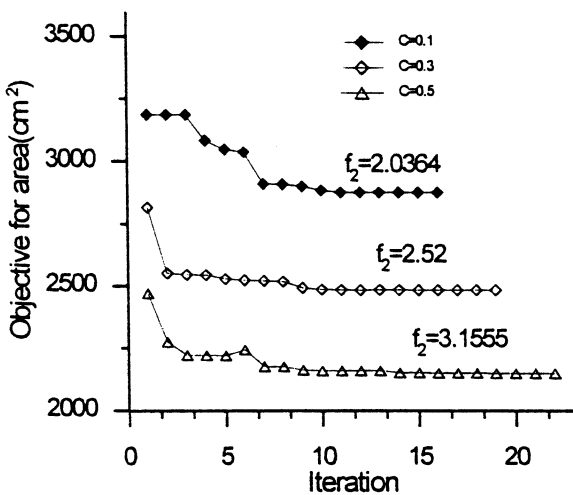
제안방법의 검증을 위해 2경간 연속 강박스거더교를 대상으로 수치해석을 수행하였다. 교량은 그림[2]에 나타난 바와 같이 3주형 박스거더이고 교폭이 19m인 4차선 도로교이다. 설계하중은 DB24, DL24 하중을 사용해 부재에 최대응력이 발생하도록 재하하여 식(7.a)~식(7.i)의 최적화 문제를 정식화하였다. 다목적최적화를 수행하기 위해 목적함수  $f_1$ (거더의 단면적),  $f_2$ (최대처짐)를 각각 최적화한 결과는  $f_1(X_1^*)=1701.1 \text{ cm}^2$ ,  $f_2(X_2^*)=1.8377 \text{ cm}$ 이며 설계값은 다음 표[1]에 나타내었다.

표[1] 목적함수  $f_1$  과  $f_2$  각각에 대한 최적화 결과

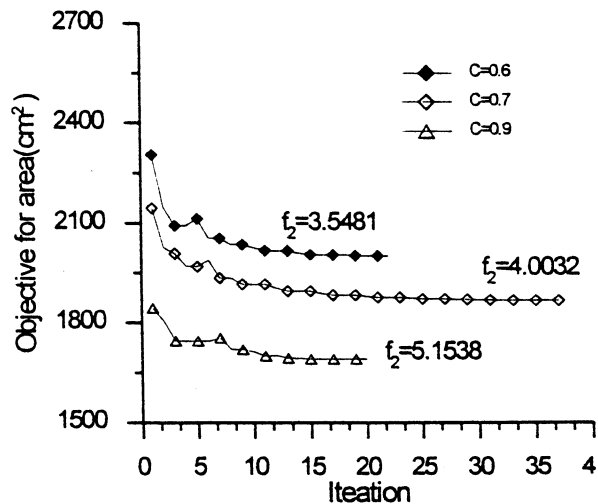
	B (m)	D (m)	$t_{bf}$ (cm)	$t_{uf}$ (cm)	$t_w$ (cm)
$X_1^*$	2.00	2.221	2.486	2.229	1.708
$X_2^*$	2.63	3.00	3.00	3.00	3.00

표[1]의 두 설계값을 이용해 다음 식(8)로부터 값 c를 변화시키면서 초기값을 구하고 단면적에 대한 목적함수를 주목적함수로 하여 제안방법에 의한 다목적 최적화를 수행하였다. 변환된 최적화 문제에는 Feasible Direction Method<sup>[4]</sup>를 적용하였으며 이 때 c값에 따른 최적해로의 수렴과정은 그림[3], [4]와 같다.

$$X^0 = cX_1^* + (1-c)X_2^*, \quad c \in [0.1] \quad (8)$$



그림[3] 다목적 최적화의 수렴과정(1)

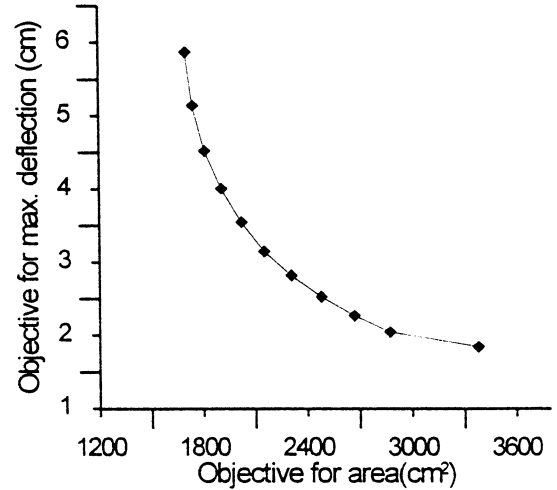


그림[4] 다목적 최적화의 수렴과정(2)

그림[3], [4]에서 볼 수 있듯이  $f_1^*$ 가 작아질수록  $f_2^*$ 는 커지며 반대로  $f_1^*$ 가 커질수록  $f_2^*$ 는 작아지는 경향을 보이고 있다. 이러한 경향은 다목적 최적화에서 최종적으로 얻어지는 Pareto Optima의 성질을 나타내는데, 서로 다른 초기값 11개에 대한 최종적인 다목적 최적화 결과는 표[2]와 같다. 이것을 목적함수로 이루어진 공간상에 나타내보면 그림[5]와 같다.

표[2] 다목적 최적화 결과

C	$f_1$ (cm <sup>2</sup> )	$f_2$ (cm)	B (m)	D (m)	$t_{bf}$ (cm)	$t_{uf}$ (cm)	$t_w$ (cm)
0.0	3378	1.843	2.630	3.000	3.000	3.000	3.000
0.1	2872	2.040	2.538	3.000	2.863	2.998	2.307
0.2	2670	2.263	2.286	3.000	2.713	2.911	2.307
0.3	2480	2.523	2.087	3.000	2.522	2.728	2.307
0.4	2308	2.817	2.000	3.000	2.149	2.469	2.307
0.5	2151	3.145	2.000	3.000	1.614	2.221	2.307
0.6	2022	3.548	2.000	2.959	1.154	2.222	2.276
0.7	1906	4.003	2.000	2.848	1.070	2.223	2.190
0.8	1810	4.520	2.000	2.639	1.469	2.225	2.029
0.9	1742	5.144	2.000	2.423	1.970	2.227	1.863
1.0	1702	5.872	2.000	2.221	2.486	2.229	1.708



그림[5] Pareto Optimal Solutions

## 5. 결론

본 연구에서는 목적함수가 2개 이상인 다목적 최적화 문제를 풀기 위한 새로운 방법을 제안하였으며 수치해석을 통한 검증결과 다음의 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 다목적 최적화 문제를 효율적으로 풀 수 있는 새로운 방법을 제안하였다.
- 2) 제안 방법에서는 변환된 최적화 문제의 제약조건식을 매번 바꾸지 않고도 초기값을 변화시키므로써 Pareto Optima를 쉽게 구할 수 있었다.
- 3) 제안방법의 초기값 결정방법은 설계 가능영역의 초기값을 발생시키므로 수치적으로 안정적인 수렴을 가능케함은 물론 프로그래밍시 매우 용이한 방법이다.
- 4) 일반적으로 각종 구조물을 최적으로 설계하기 위해서는 수개의 목적함수를 고려해야 하는데 이를 위해서는 제안방법을 비롯한 다목적 최적화 기법이 매우 유용함을 알 수 있었다.

## 6. 참고문헌

1. S. S. Rao, "Multiobjective Optimization in Structural Design with Uncertain Parameters and Stochastic Process." AIAA J., Vol. 22, No. 11, 1984, pp. 1670-1678.
2. Z. Lounis, M. Z. Cohn, "Multiobjective Optimization of Prestressed Concrete Structures." ASCE J. of Structural Engineering, Vol. 119, No. 3, 1993, pp. 794-808.
3. 건설부, "도로교표준시방서" 1992.
4. Garret N. Vanderplaats, "An Efficient Feasible Directions Algorithm for Design Synthesis" AIAA J., Vol. 22, No. 11, 1984, pp. 1633-1640.
5. P. Hajela, C. J. Shih, "Multiobjective Optimum Design in Mixed Integer and Discrete Design Variable Problems." AIAA J., Vol. 28, No. 4, 1989, pp. 670-675.