

Subtangential follower force를 받는 스프링-질량-기둥계의 불안정 Instability of Spring-Mass-Column System subjected to a Subtangential Follower Force

오 상 진¹⁾ · 이 병 구²⁾ · 이 인 원³⁾
OH, Sang Jin LEE, Byoung Koo LEE, In Won

ABSTRACT : The main purpose of the present paper is to obtain both the critical divergence and flutter loads of the spring-mass-column system subjected to a subtangential follower force. The column model is based on the Bernoulli-Euler beam theory. The critical divergence and flutter loads are presented as functions of four dimensionless system parameters: (1) the subtangential parameter, (2) the mass, (3) the moment of inertia of the attached mass and (4) the spring stiffness.

1. 서 론

축하중을 받는 기둥요소의 자유진동 및 안정 문제는 토목, 건축, 기계, 항공산업 등에서 광범위하게 적용되고 있어 이에 대한 많은 연구가 이루어져 왔다. 이 연구들에서는 기둥을 연속계 또는 이산계로서 모형화하였으며, 기둥에 작용하는 축하중으로는 보존력(conservative force) 또는 비보존력(nonconservative force)을 고려하였다.

비보존력을 받는 구조물의 안정성에 관한 문제는 현대 공학문제에서 특히 중요하게 다루어지고 있다. 예를 들어 비행체의 날개 또는 몸체에 작용하는 공기력(aerodynamic force), 전동기의 회전자(rotor)에 작용하는 힘은 비보존력이며, 자동제어가 이루어지는 많은 구조계는 비보존력계를 형성하고 있다^[1]. 또한 1940년에 발생한 Tacoma Narrows교의 붕괴는 비보존력인 풍하중에 의한 것이다^[2].

비보존력인 subtangential follower force를 받는 기둥의 임계하중은 subtangential parameter에 따라 divergence 또는 flutter형태로서 나타난다. 이와 같은 비보존력을 받는 기둥의 안정해석을 위해서는 관성효과가 고려된 동적개념(dynamic concept)에 의한 해석이 수행되어야 한다.

본 논문에서는 subtangential follower force를 받는 스프링-질량-기둥계의 여러 가지 제변수에 따른 임계하중의 변화를 고찰하는데 연구목적이 있다. 이 논문에서 대상기둥은 Bernoulli-Euler 보이론에 의하여 모형화하였다.

2. 수학적 모형

그림 1은 subtangential follower force P가 작용하는 한쪽단은 고정, 타단은 스프링과 집중질량으로 이루어진 지간길이 l인 기둥을 나타낸 것이다. 이 그림에서 w(x,t)는 기둥축상 임의점에서 진동변위이며, K는 스프링강성, M과 J는 각각 집중질량 및 단면2차모멘트이다. 또한 γ 는 subtangential parameter로서 $\gamma=0$ 이면 Euler기둥, $\gamma=1$ 이면 Beck기둥을 의미하게 된다. 그림 1에 나타낸 기둥의 자유진동에 대한 지배방정식은 일반적인 축하중을 받는 기둥의 지배방정식의 형태로서 표현되며, Bernoulli-Euler 보이론을 적용한 지배미분방정식은 다음과 같다^[3].

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

윗 식에서 A, I는 기둥의 단면적과 단면2차모멘트, E와 ρ 는 각각 탄성계수 및 단위체적당 질량이다.

대상기둥이 조화진동을 한다면, 진동변위에 대한 조화진동식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x,t) = w_x \sin(\omega_i t), \quad i=1,2,\dots \quad (2)$$

(2)식에서 w_x 는 조화진동의 진폭으로 x만의 함수이며, ω_i 는 고유각진동수(angular frequency), i는 모드 번호이다.

자유진동을 지배하는 상미분방정식을 무차원형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

- 1) 한국과학기술원 토목공학과, 박사후연수과정
- 2) 원광대학교 토목환경공학과, 교수
- 3) 한국과학기술원 토목공학과, 교수

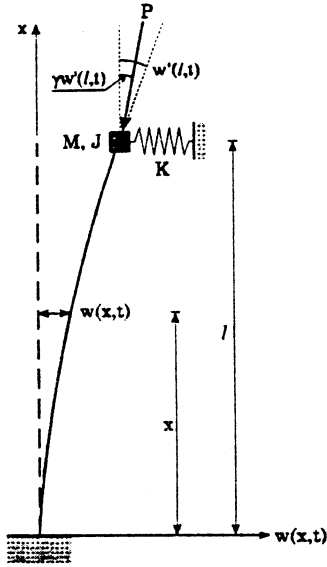


그림 1. Subtangential follower force를 받는 스프링-질량-기둥계의 진동형

$$\xi = x/l, \quad \eta = w_x/l \quad (3,4)$$

$$p = P l^2/(EI) \quad (5)$$

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho A/(EI)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

윗 식들에서 ξ 와 η 는 각각 x 와 w_x 를 지간길이 l 로 정규화한 것이며, p 는 무차원하중(dimensionless load), C_i 는 무차원 고유진동수(frequency parameter)이다.

(1)식에 (2)식을 대입하고 (3)~(6)식의 무차원 변수들을 이용하여 정리하면, (1)식은 다음 (7)식과 같은 형태로 표현된다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = -p \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + C_i^2 \eta \quad (7)$$

한쪽단은 고정, 타단은 스프링과 집중질량으로 이루어져 있으므로 이에 대한 경계조건은 다음과 같다. 먼저 고정단에서는 $w_x=0$ 및 $dw_x/dx=0$ 이므로 무차원 변수들을 이용하여 경계조건을 나타내면 다음 (8), (9)식과 같다.

$$\eta = 0, \quad d\eta/d\xi = 0 \quad (8,9)$$

다음으로 타단은 스프링과 집중질량으로 구성되어 있으므로 이에 대한 경계조건은 $EI \cdot d^2 w_x/dx^2 = \omega^2 J dw_x/dx$, $EI \cdot d^3 w_x/dx^3 = -P(1-\gamma)dw_x/dx + Kw_x - \omega^2 M w_x$ 이다. 이를 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 다음 (10), (11)식과 같다.

$$d^2 \eta/d\xi^2 - C_i^2 j d\eta/d\xi = 0 \quad (10)$$

$$d^3 \eta/d\xi^3 + p(1-\gamma)d\eta/d\xi - k\eta + C_i^2 m\eta = 0 \quad (11)$$

(10), (11)식에서 새로운 무차원변수인 j (dimensionless moment of inertia), k (dimensionless spring stiffness), m (dimensionless mass)의 내용은 다음과 같다.

$$j = J/\rho A l^3, \quad k = K l^3/EI, \quad m = M/\rho A l \quad (12-14)$$

3. 해석방법

그림 2는 subtangential follower force를 받는 기둥의 일반적인 하중-고유진동수 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서 축하중이 증가함에 따라 고유진동수가 감소하다가 제1고유진동수가 "0"이 되는 하중은 divergence형 임계하중 p_d 로서 $\gamma=0$ 인 모든 Euler기둥은 반드시 이와 같은 경향을 보이게 된다. 또한 이 그림의 다른 곡선에서 $C_1=C_2$ 인 지점의 하중은 flutter형 임계하중 p_f 로서 $\gamma=1$ 인 모든 Beck기둥은 반드시 이와 같은 경향을 보이게 된다. 그러나 subtangential follower force가 작용하는 기둥인 경우에는 γ 에 따라 이러한 두 가지 경향을 모두 보일 수 있다. 이에 본 연구에서는 (7)식의 미분방정식을 수치해석하여 축하중에 따른 고유진동수를 찾는 과정에서 반분법을 이용하여 최저차의 임계하중을 산출하였다. divergence형의 임계하중은 제1고유진동수가 0.01 이하가 되는 지점의 하중, flutter형의 임계하중은 제1고유진동수와 제2고유진동수의 차이가 0.1이하가 되는 지점의 하중을 임계하중으로 결정하였다.

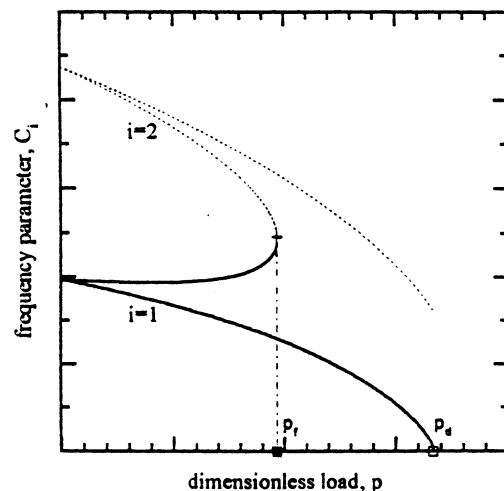


그림 2. 하중-고유진동수 곡선

4. 해석 예 및 고찰

그림 3은 $(m=1.0, j=0.5)$, $(m=0.5, j=0.5)$, $(m=0.5, j=1.0)$ 인 경우 subtangential parameter γ 의 변화에 따

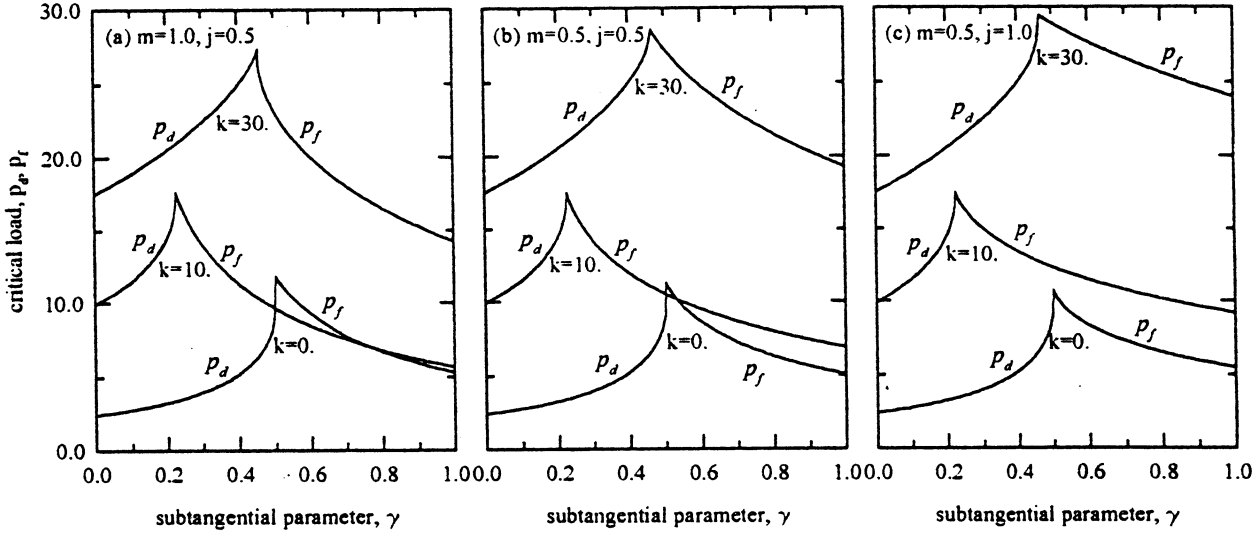


그림 3. γ 에 따른 임계하중의 변화

큰 최저차의 divergence와 flutter형 임계하중을 나타낸 것이다. 이 그림에서 γ 가 일정값에 도달할 때까지 최저차 임계하중은 divergence형, 이후에는 flutter형으로 나타남을 알 수 있다. 최저차 임계하중의 형태가 이와 같이 변환되는 γ 는 k 에 따라 변화하지만, m, j 와는 관계없이 일정함을 알 수 있다.

그림 4는 $k=10., m=1.0, j=0.5$ 인 경우 $\gamma=0, 0.1, 0.223, 0.225, 0.5$ 및 1.0 에 대한 하중-고유진동수 관계를 나타낸 것이다.

그림 5는 $j=1.0, 0.5$ 인 경우 m 에 따른 flutter형 최저차 임계하중의 변화를 나타낸 것으로 일반적으로 m 이 증가함에 따라 p_f 는 감소함을 알 수 있다. 그러나 $\gamma=0.5, k=0$ 인 경우에는 m 이 증가함에 따라 p_f 는 항상 증가하며, $\gamma=1.0, k=0$ 인 경우에는 m 이 증가함에 따라 p_f 는 감소하다가 최소값을 보인 후에 다시 증

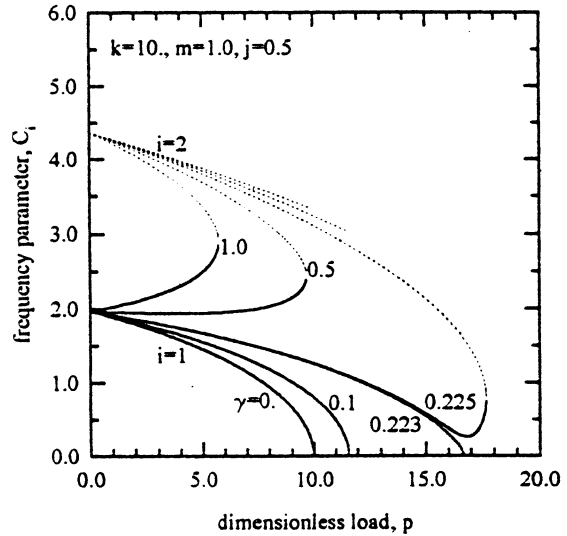


그림 4. 하중-고유진동수 관계

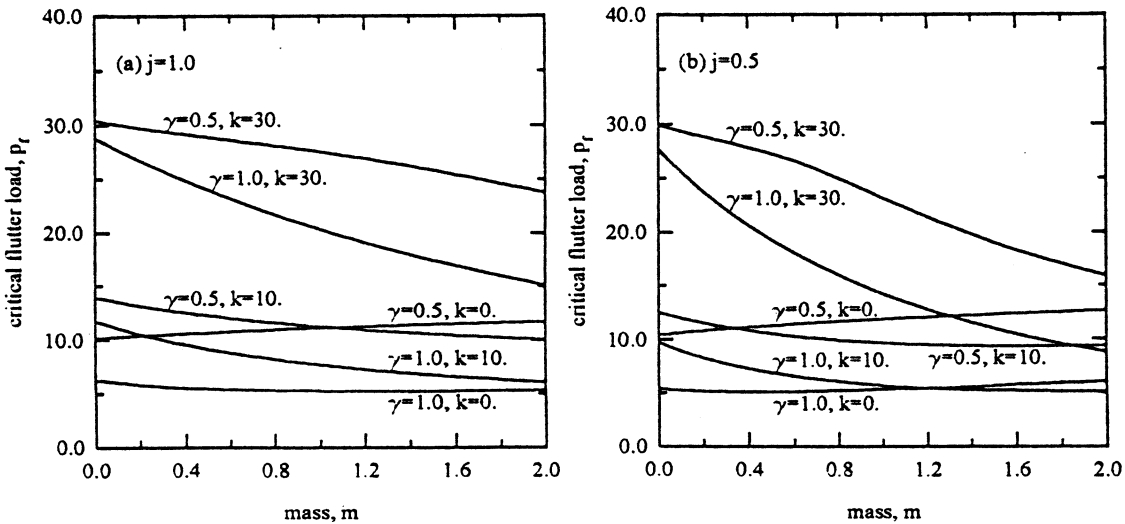


그림 5. m 에 따른 flutter형 임계하중의 변화

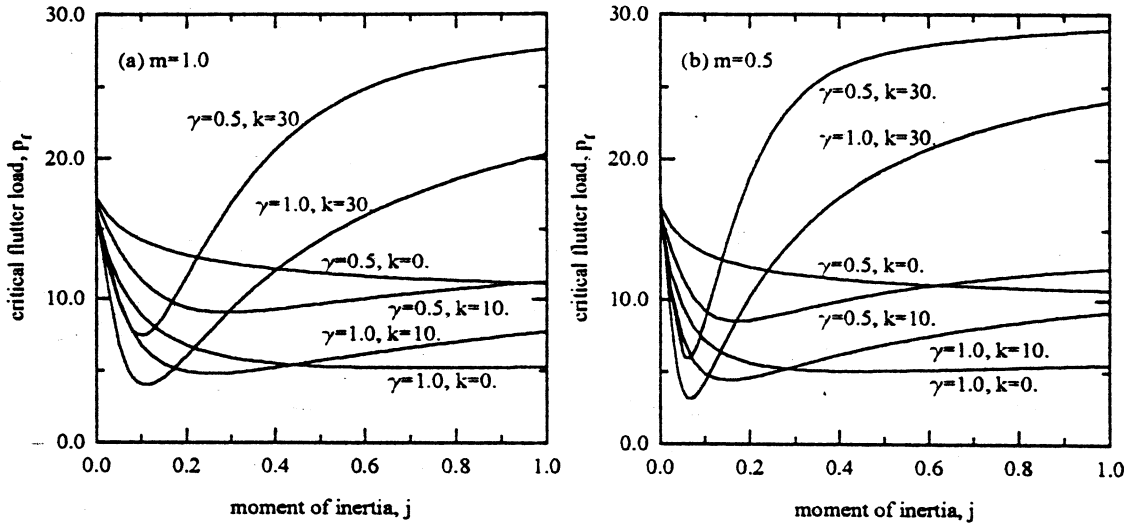


그림 6. j에 따른 flutter형 임계하중의 변화

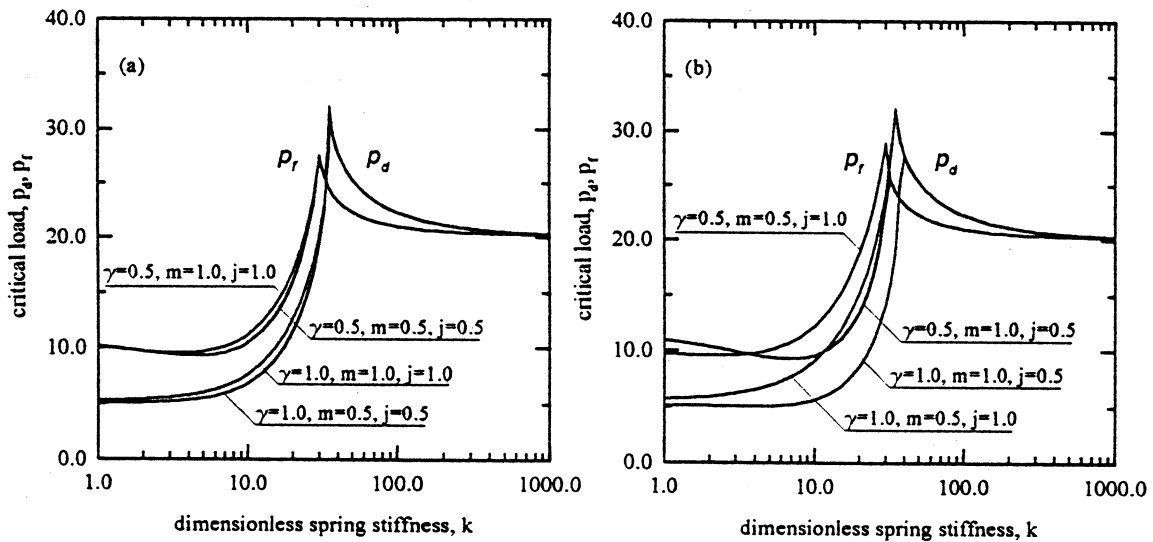


그림 7. k에 따른 임계하중의 변화

가하는 경향을 보이고 있다.

그림 6은 j에 따른 flutter형 최저차 임계하중 변화를 나타낸 것으로 $\gamma=0.5, k=0$ 인 경우 j가 증가함에 따라 p_r 는 항상 감소함을 알 수 있다. 그러나, 다른 경우에는 j가 증가함에 따라 p_r 는 감소하다가 최소값을 보인 후에 다시 증가하는 경향을 보이고 있다.

그림 7은 k에 따른 최저차 임계하중의 변화를 나타낸 것으로 k가 일정값에 도달할 때까지 최저차 임계하중은 flutter형, 이후에는 divergence형으로 나타남을 알 수 있다. 또한 k가 증가함에 따라 divergence형의 임계하중은 고정-회전인 기둥의 임계하중 20.2로 수렴해 감을 알 수 있다.

5. 요약 및 결론

본 논문은 subtangential follower force를 받는 스프링-질량-기둥계의 불안정에 관한 연구로서 대상기

둥의 여러 가지 제변수 변화에 따른 최저차의 divergence형과 flutter형 임계하중을 산출하였다. 해석결과 subtangential parameter, 집중질량 및 단면2차모멘트, 스프링강성을 적절하게 조정하는 경우 구조계의 안정성을 확보할 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

1. V.V. Bolotin, *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, Hoden-Day, Inc., 1964.
2. S.R. Kuo and Y.B. Yang, "Critical Load Analysis of Undamped Nonconservative Systems Using Bieigenvalue Curves," *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 12, 1994, pp.2462-2468.
3. S.P. Timoshenko, D.H. Young and W. Weaver, Jr., *Vibration Problems in Engineering*, 4th Edition, John Wiley & Sons, 1974.