

고유모드 안정도를 이용한 모드 편재현상의 예측

Prediction of Mode Localization Using the Eigenmode Stability

°김동욱¹, 이종원², 이인원³

1. 서 론

모든 구조물은 고유진동수와 고유진동형을 갖고 있으며 자유진동 시 이에 따라 진동하게 된다. 이러한 진동수와 진동형은 구조물의 고유한 특성으로 동하중을 받는 구조물의 경우 설계 과정에서부터 정확하게 고려돼야 하는 특성이다. 동하중의 진동수가 구조물의 고유진동수와 유사하거나 구조물의 고유진동형과 유사한 경우 구조물의 안전성은 확보될 수 없다. 구조물의 전체 혹은 일부분의 형상이나 물성치가 변하면 이러한 구조물의 동특성 역시 변하게 된다. 특히 구조물의 작은 변화로 동특성이 심각하게 바뀐다면 설계과정에서 예측한 안전성은 신뢰하기 어렵다. 일부 구조물에 있어서 작은 오차로 인한 동특성의 변화는 때때로 매우 심각하다. 특히 약연성된 반복구조물(weakly coupled periodic structure)의 경우 구조물의 진동형이 구조물의 특정 부분에 편중되는 현상인 모드 편재(mode localization)현상이 발생한다. 모드 편재현상에 관해 많은 연구가 이루어졌지만 어떤 모드가 편재에 민감한가에 대한 연구는 아직 미흡하다.

모우드 편재현상에 관한 최초의 연구는 고체 물리학자인 Anderson^[1]에 의해 이루어 졌다. 구조 역학에 있어서 모드 편재현상에 관한 연구는 1982년 Hodges^[2]에 의해 시작됐으며 규칙성이 상실된 일차원 반복구조물(periodic structure)에서 발생하는 파동 편재(wave localization)현상이 모우드 편재현상의 원인임을 증명하였다. Pierre와 Tang 그리고 Dowell^[3]은 수정된 섭동법과 실험을 통하여 약연성된 불규칙한 다경간 보의 모드 편재현상을 연구하였다. Bouzit와 Pierre^[4]은 불규칙하게 배열된 단순지지대 위에 놓여진 약연성된 다경간 보에서 발생하는 강편재(strong localization)현상과 약편재(week localization)현상을 연구하였으며 편재계수(localization factor)를 계산하였다. Vakakis^[5]는 비선형 시스템에서 발생하는 모드 편재현상을 연구하였다.

본 연구에서는 모드 안정도 계수를 정의하였으며 반복구조물에서 발생하는 모드 편재현상을 모드 안정도 계수를 이용하여 예측하였다. 본 논문에서는 예제를 통하여 모드 안정도 계수의 특성을 검증하였으며 이를 이용하여 반복구조물에서 발생하는 모드 편재에 관하여 검토하였다.

2. 모드 안정도 계수(Mode Stability Factor)

일반 구조물의 고유치문제는 다음과 같이 구해진다.

$$K\phi_i = \lambda_i M\phi_i \quad (1)$$

위식에서 K 과 M 은 실수 대칭행렬이며 각각은 정칙행렬로 그 차수는 n 이다. λ_i 는 구조물의 i

(1) 한국과학기술원 기계공학과 박사과정

(2) 중앙대학교 기계공학과 교수

(3) 한국과학기술원 토목공학과 교수

번째 고유치이며 ϕ_i 는 이에 대응하는 고유벡터이다. 구조물에 매우 작은 변동이 발생하면 고유치와 고유벡터 역시 변하게 되며 이는 다음 식으로 근사할 수 있다.

$$\bar{\lambda}_i \approx \lambda_i + \frac{\partial \lambda_i}{\partial p} \delta p, \quad \bar{\phi}_i \approx \phi_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial p} \delta p. \quad (4, 5)$$

여기서 $\bar{\lambda}_i$ 와 $\bar{\phi}_i$ 는 변동된 구조물의 고유치와 고유벡터이며 p 는 구조물의 시스템 변수이다. 위 식에서 고유치와 고유벡터의 미분값은 민감도 해석법의 기본식인 식(6)을 이용하면 구할 수 있다.

$$[K - \lambda_i M] \frac{\partial \phi_i}{\partial p} = - \left[\frac{\partial K}{\partial p} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial p} \right] \phi_i + \frac{\partial \lambda_i}{\partial p} M \phi_i, \quad (6)$$

양변에 ϕ_i^T 를 전치하고 질량행렬을 이용한 고유벡터의 정규화조건을 고려하면 고유치의 미분에 관한 식을 구할 수 있다. 그러나 고유벡터의 미분을 식(6)으로부터 구하는 것은 좌변의 행렬이 특이(singular) 행렬이므로 간단하지가 않다. 이러한 문제점을 극복하기 위한 방법 중의 하나인 모달 방법은 고유벡터의 미분을 여러개의 고유벡터의 선형조합으로 근사하는 것이다.

$$\bar{\phi}_i = \phi_i + \delta p \sum_{j=1}^m c_{ij} \phi_j \quad (7)$$

전체 구조물은 q 개의 부구조물로 구성되어 있으며 구조물의 변화는 각 부구조물에서 균일하게 발생한다고 가정하면 식(7)의 계수는 다음식으로 구할 수 있다.

$$c_{ij} \delta p = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \phi_j^T \left[\sum_{k=1}^q \alpha_k K_k^s - \lambda_i \sum_{k=1}^q \beta_k M_k^s \right] \phi_i, & j \neq i \\ -\frac{1}{2} \phi_j^T \left[\sum_{k=1}^q \beta_k M_k^s \right] \phi_i, & j = i \end{cases} \quad (8)$$

위식에서 K_k^s 와 M_k^s 은 k 번째 부구조물의 강성행렬과 질량행렬이며 α_k 와 β_k 는 각 부구조물의 강성 또는 질량행렬의 변화 비이다. 많은 경우에 있어서 구조물의 질량행렬의 변화는 무시할 수 있으므로 본 연구에서는 질량행렬의 변화를 무시하고 k 번째 부구조물의 강성이 일만큼 변했다고 가정하여 모드 안정도 계수를 다음과 같이 정의하였다.

$$C_{ik} \equiv \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^m \left(\frac{\phi_j^T K_k^s \phi_i}{\lambda_i - \lambda_j} \right)^2}{1 + \sum_{j=1, j \neq i}^m \left(\frac{\phi_j^T K_k^s \phi_i}{\lambda_i - \lambda_j} \right)^2}, \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (9)$$

C_{ik} 가 일에 가까운 경우 i 번째 모드는 불안정다. 즉 k 번째 부구조물에 변화가 발생하는 것에 대하여 매우 민감하게 반응한다. C_{ik} 가 영에 가까운 경우 i 번째 모드는 매우 안정다. 즉 k 번째 부구조물에 변화가 발생하더라도 고유진동형에는 별 변화가 나타나지 않는다. 모드 안정도 계수는 구조물의 변화에 따른 고유진동형의 민감도를 대표하는 값이다. 그러므로 이를 이용하면 반복구

조물의 편재에 대한 민감도를 평가할 수 있다.

3. 예 제

3.1 모드 안정도 계수의 검사

본 연구에서는 모드 안정도 계수의 검사를 위해 등간격 2경간 연속보의 모드 편재현상을 검사하였다. 이 구조물은 1987년에 Pierre^[4]가 해석한 구조물로 모드 편재현상의 특징을 매우 잘 보여주는 구조물이다. 구조물의 지지는 단순지지이며 중앙 지점에는 회전 스프링에 의해 지반에 연결되어 있다. 그림 1에서 알 수 있듯이 경간 사이의 회전강성이 클수록 구조물의 일부분이 변할 때 모드 편재현상이 심각하게 발생한다. 또한 이러한 것은 모드 안정도 계수를 이용하여서도 예측할 수 있다. 표 1은 강성감쇠가 일어나기 전의 구조물에서 구한 고유치와 모드 안정도 계수이다. 이를 보면 편재에 민감한 구조물(b)의 모드 안정도 계수가 모드 1에 가까움을 알 수 있다.

3.2 다경간 구조물의 편재 민감도 검사

본 예제에서는 3경간, 4경간, 5경간 연속보의 편재 민감도를 모드 안정도 계수로 검사하였다. 구조물의 물성치는 앞의 예제와 같으며 경간들 사이에 연결된 회전 스프링의 강성에 따른 모드 안정도를 검사하였다. 표 2는 각 구조물의 모드 안정도 계수의 최대값을 정리한 것이다.

4. 결 론

본 연구에서는 구조물의 일부분에서 발생한 변화가 전체 모드형에 미치는 영향을 모드 안정도 계수로 정의하였으며 이를 이용하여 반복구조물의 편재 민감도를 평가하였다. 안정도 계수를 이용하면 구조물과 모드의 안정도(stability)를 평가할 수 있다. 구조물의 일부분에 미소 변동이 발생할 때 구조물의 모드가 심각히 변하는 경우를 불안정(unstable)한 모드라고 하면 편재현상에 민감한 모드는 불안정한 모드이며 그 구조물은 불안정한 구조물이라고 할 수 있다. 모드 안정도 계수의 특성을 살펴보면 이웃한 모드간에 진동수와 모드형이 유사한 모드는 불안정함을 알 수 있다. 예제에서와 같은 반복구조물에 있어서 부구조물간의 회전강성이 큰 경우 즉 약연성일수록 편재에 민감하며 불안정하다. 이것은 기존 연구의 결과와 같지만 반복구조물에서 모드 편재특성은 모든 모드에서 항상 동일하지는 않다는 것을 본 연구에서 증명하였다.

참고문헌

- [1] Anderson, P.W., "Absence of Diffusion in Certain Random Lattices," Physical Reviews, Vol. 109, March 1958, pp.1492-1505.
- [2] Hodges, C. H., "Confinement of Vibration by Structural Irregularity," Journal of sound and vibration, Vol.82, No. 3, 1982, pp. 411-424.
- [3] Pierre, C., Tang, D. M. and Dowell, E. H., "Localized vibrations of disordered multi-span beams: theory and experiment," AIAA Journal, Vol. 25, No. 9, 1987, pp. 1249-1257.
- [4] Bouzit, D. and Pierre, C., "Vibration confinement phenomena in disordered, mono-coupled, multi-span beams," Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 114, No. 4, 1992, pp. 521-530.
- [5] Vakakis, A., "Non-similar normal oscillations in a strongly non-linear discrete system," Journal of Sound and Vibration, Vol. 158, No. 2, 1991, pp. 341-361.

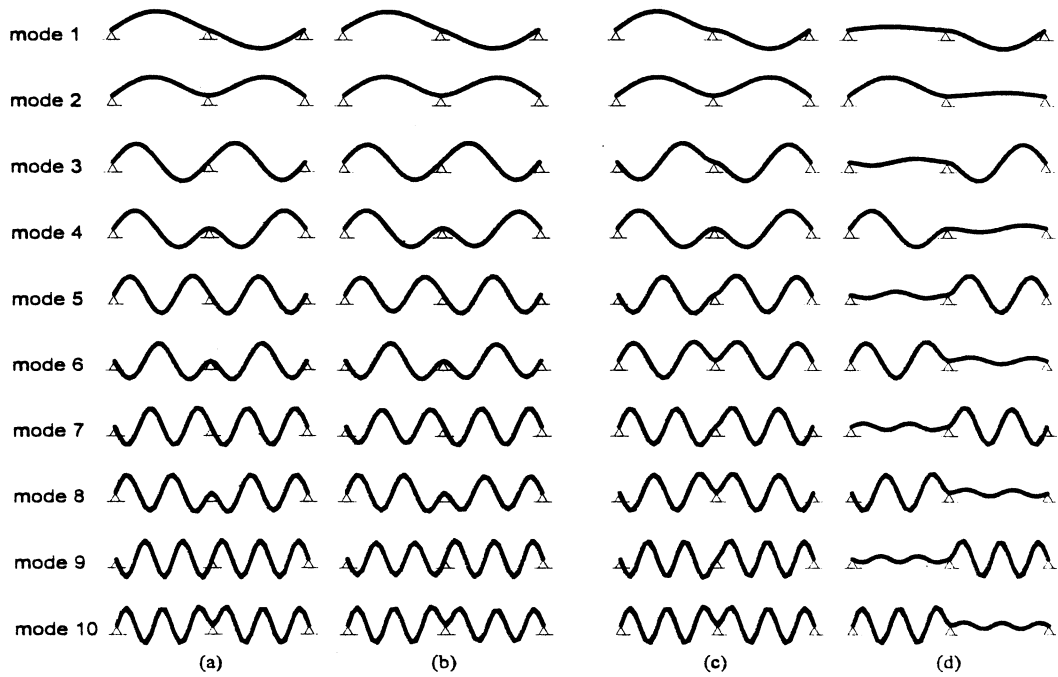


그림 1. 등간격 2경간 연속보의 진동모드 : (a) 회전강성 $2 \times 10^8 Nm$, (b) 회전강성 $2 \times 10^8 Nm$, 두번째 경간에 2%강성감소, (c) 회전강성 $2 \times 10^{10} Nm$, (d) 회전강성 $2 \times 10^{10} Nm$, 두번째 경간에 2%강성감소.

표 1. 등간격 2경간 연속보의 고유진동수와 모드 안정도 계수

Mode	Case 1 (회전강성 $2 \times 10^8 Nm$)		Case 2 (회전강성 $2 \times 10^{10} Nm$)	
	Eigenvalue	Mode Stability	Eigenvalue	Mode Stability
1	1.248×10^8	0.4725	1.887×10^8	0.9997
2	1.902×10^8	0.4740	1.902×10^8	0.9997
3	1.475×10^9	0.6556	1.982×10^9	0.9997
4	1.997×10^9	0.6569	1.997×10^9	0.9997
5	6.875×10^9	0.7687	8.627×10^9	0.9998
6	8.695×10^9	0.7695	8.695×10^9	0.9998
7	2.101×10^{10}	0.8375	2.523×10^{10}	0.9998
8	2.543×10^{10}	0.8380	2.543×10^{10}	0.9998
9	5.043×10^{10}	0.8808	5.878×10^{10}	0.9998
10	5.924×10^{10}	0.8812	5.924×10^{10}	0.9998

표 2. 다경간 보의 모드 안정도 계수

Mode	Case 1 (회전강성 $2 \times 10^8 Nm$)			Case 2 (회전강성 $2 \times 10^{10} Nm$)		
	3 경간	4 경간	5 경간	3 경간	4 경간	5 경간
1	0.7811	0.8784	0.8230	0.9999	1.0000	1.0000
2	0.7988	0.8901	0.8205	0.9999	1.0000	1.0000
3	0.3687	0.6310	0.2596	0.9994	0.9998	0.9999
4	0.8631	0.3057	0.6898	0.9999	0.9989	0.9996
5	0.8762	0.9246	0.6434	0.9999	1.0000	0.9983
6	0.5399	0.9331	0.8862	0.9994	1.0000	1.0000
7	0.9097	0.7666	0.8845	0.9999	0.9998	1.0000
8	0.9192	0.4593	0.4084	0.9999	0.9989	0.9999
9	0.6648	0.9505	0.8163	0.9994	1.0000	0.9996
10	0.9371	0.9566	0.7839	0.9999	1.0000	0.9983