

자유단에 질량 및 스프링을 갖는 변단면 기둥의 플러터 임계하중 및 고유진동수

Critical Flutter Load and Flutter Frequency of Tapered Columns with Tip Mass and Spring

오상진¹⁾, 이병구²⁾, 이인원³⁾

1. 서론

비보존력이 작용하는 구조물의 자유진동 및 안정문제는 토목, 기계, 항공우주산업 등 많은 분야에서 중요하게 고려되고 있어 이에 대한 많은 연구가 이루어져 왔으며, 문헌 [1,2]에서는 비보존력계를 구성하는 다양한 구조부재의 안정성에 대하여 논하였다. 종동력(follower force)을 받는 기둥의 안정문제는 Beck에 의하여 최초로 연구되었고, 집중질량을 갖는 기둥을 대상으로 하는 안정문제는 Pflüger에 의하여 논의되었으며, 이후 많은 연구자들에 의하여 이와 관련한 연구가 이루어졌다[3-5].

본 논문에서는 종동력이 작용하는 일단은 고정, 타단은 강성질량과 스프링을 갖는 캔틸레버형 변단면 기둥의 여러가지 제변수 변화에 따른 플러터 임계하중(critical flutter load)과 플러터 고유진동수(flutter frequency)의 변화를 고찰하고자 한다.

2. 수학적 모형

그림 1은 종동력 P 가 작용하는 지간길이 l 인 캔틸레버형 변단면 기둥의 진동형을 나타낸 것으로 일단은 고정, 타단은 강성질량과 스프링으로 구성되어 있다. 이 그림에서 A 와 I 는 각각 기둥축상 임의점, A_0 와 I_0 는 고정단, A_l 와 I_l 는 자유단에서 기둥단면의 단면적과 단면2차모멘트를 나타내며, $w(x,t)$ 는 진동변위, $w'(l,t)$ 는 자유단에서의 단면회전각이다. 또한 K 는 스프링강성, M 과 J 는 각각 질량의 크기 및 단면2차모멘트이다. Bernoulli-Euler 보이론을 적용하면 종동력을 받는 변단면 기둥의 자유진동에 대한 지배방정식은 다음 (1)식과 같이 나타낼 수 있다[1].

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

(1)식에서 E 와 ρ 는 각각 탄성계수 및 단위체적당 질량이다.

-
- 1) 한국과학기술원 토목공학과, 박사후 연수과정
 - 2) 원광대학교 토목환경공학과, 교수
 - 3) 한국과학기술원 토목공학과, 교수

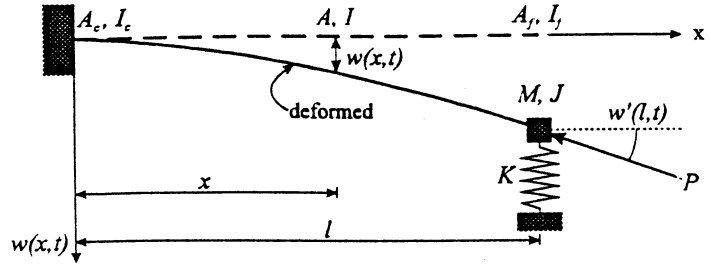


그림 1. 종동력을 받는 변단면 기둥

대상기둥의 진동변위에 대한 조화진동식은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega_i t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

윗 식에서 w_x 는 조화진동의 진폭으로 x 만의 함수이며, ω_i 는 고유각진동수, i 는 모드번호이다.

본 논문에서는 해석대상으로 다음 (3), (4)식에 나타낸 바와 같이 고정단의 단면적 및 단면2차 모멘트를 기준으로 x 에 관한 1차식으로 단면이 변화하는 구형단면의 변단면 기둥을 택하였다.

$$A = A_c [1 + (\beta - 1)x/l]^m, \quad I = I_c [1 + (\beta - 1)x/l]^n \quad (3,4)$$

윗 식들에서 β 는 고정단과 자유단의 단면제원(단면높이/단면폭) d_c 와 d_f 의 비로서 이후 단면비라 한다. 또한 m 과 n 은 단면형상계수로서 변화높이 변단면인 경우 ($m=1, n=3$), 변화폭 변단면인 경우 ($m=1, n=1$), 정방형 변단면인 경우 ($m=2, n=4$)이다.

지배방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = w_x/l, \quad p = Pl^2/(EI_c), \quad C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho A_c / (EI_c)} \quad (5-8)$$

(7)식의 p 는 무차원 하중, (8)식의 C_i 는 무차원 고유진동수이다.

(2)-(4)식을 (1)식에 대입하고 (5)-(8)식의 무차원변수들을 이용하여 정리하면 다음 (9)식과 같다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = - \frac{2n(\beta-1)}{[1+(\beta-1)\xi]} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} - \left\{ \frac{n(n-1)(\beta-1)^2}{[1+(\beta-1)\xi]^2} + \frac{p}{[1+(\beta-1)\xi]^n} \right\} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + C_i^2 [1+(\beta-1)\xi]^{m-n} \eta \quad (9)$$

고정단의 경계조건은 $w_x = dw_x/dx = 0$ 이므로 무차원 변수를 이용하여 다시쓰면 다음과 같다.

$$\eta = 0, \quad d\eta/d\xi = 0 \quad (10,11)$$

다음으로 자유단은 스프링과 질량으로 구성되어 있으므로 경계조건은 $EId^2 w_x/dx^2 = \omega_i^2 J dw_x/dx$, $EId^3 w_x/dx^3 = Kw_x - \omega_i^2 M w_x$ 이며 무차원 변수를 이용하여 나타내면 다음 식들과 같다.

$$d^2 \eta/d\xi^2 - \beta^{-n} C_i^2 j \theta d\eta/d\xi = 0, \quad d^3 \eta/d\xi^3 - \beta^{-n} (k - C_i^2 \mu \theta) \eta = 0 \quad (12,13)$$

(12), (13)식에서 새로운 무차원 변수 j , k 및 μ 의 내용은 (14)-(16)식과 같다. 또한 θ 는 변단면 기둥을 동일지간의 등단면 기둥으로 고려하는 경우 기둥단면의 단면적 A_m 과 고정단에서의 단면적 A_c 의 비로서 단면비 β 의 항으로 표시되며, 변화높이/변화폭 변단면인 경우에는 (17a)식, 정방형 변단면인 경우에는 (17b)식과 같이 구할 수 있다.

$$j = J/(\rho A_m l^3), \quad k = Kl^3/(EI), \quad \mu = M/(\rho A_m l); \quad \theta = (\beta + 1)/2, \quad \theta = (\beta^2 + \beta + 1)/3 \quad (14-17a,b)$$

3. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서는 (10)~(13)식의 경계조건을 적용, (9)식의 지배미분방정식으로부터 C_1 과 C_2 를 산출하는 과정에서 $(C_2 - C_1) \leq 0.1$ 인 중동력을 플러터 임계하중 p_f , $(C_1 + C_2)/2$ 를 플러터 고유진동수 C_f 로 결정하였다.

그림 2는 $\mu=1, j=0.1$ 인 경우 β 에 따른 p_f 와 C_f 의 변화를 나타낸 것이며, 그림 3은 $j=0.1$ 인 경우 μ 에 따른 p_f 와 C_f 의 변화를 나타낸 것이다. 그림 4는 $\mu=1$ 인 경우 j 에 따른 p_f 와 C_f 의 변화를 나타낸 것이며, 그림 5는 $\mu=1, j=0.1$ 인 경우 k 에 따른 p_f 와 C_f 의 변화를 나타낸 것이다.

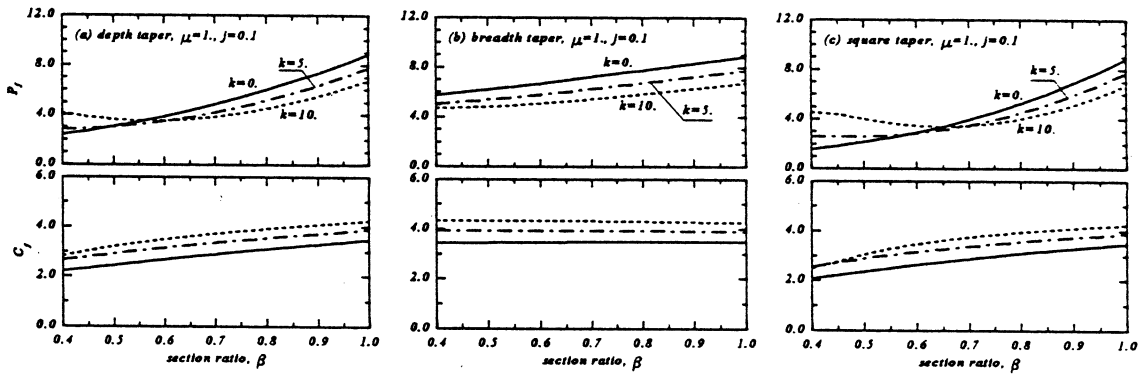


그림 2. β 에 따른 p_f 와 C_f 의 변화

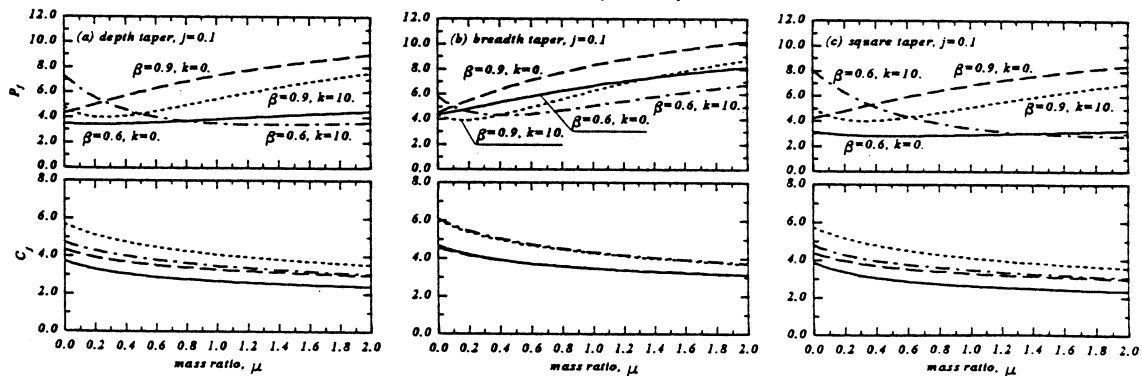


그림 3. μ 에 따른 p_f 와 C_f 의 변화

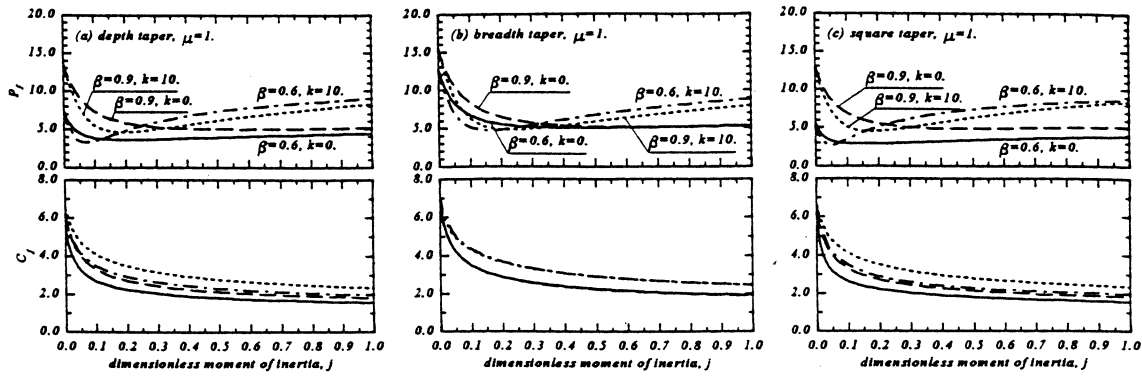


그림 4. j 에 따른 p_j 와 C_j 의 변화

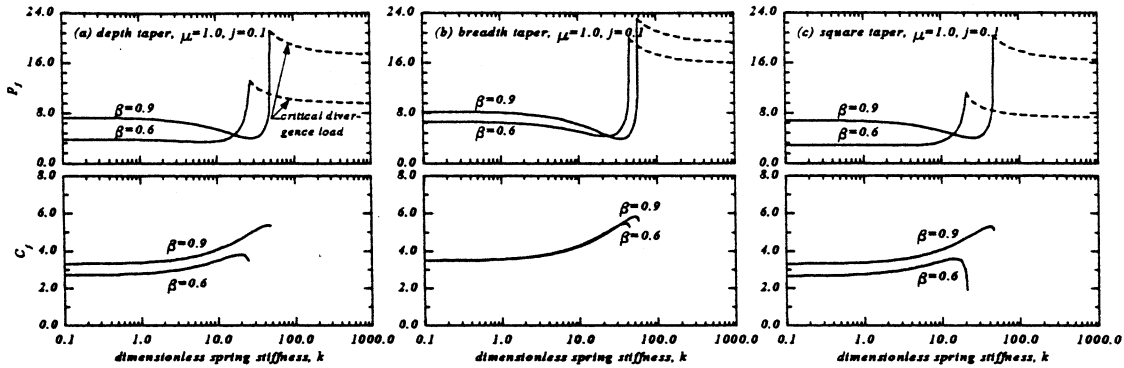


그림 5. k 에 따른 p_j 와 C_j 의 변화

4. 요약 및 결론

이 논문에서는 중동력이 작용하는 일단 고정, 타단은 강성질량과 스프링을 갖는 캔틸레버형 변단면 기둥에 대한 해석결과로서 단면비, 질량비, 무차원 단면2차모멘트 및 스프링강성에 따른 플러터 임계하중과 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

참고문헌

1. V.V. Bolotin, *Nonconservative Problems of the Theory of Elasticity*, Pergamon Press, 1963.
2. H. Leipholz, *Stability Theory*, Academic Press, 1970.
3. A.N. Kounadis and J.T. Katsikadelis, "On the Discontinuity of the Flutter Load for Various Types of Cantilevers," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 16, 1980, pp.375-383.
4. L.W. Chen and D.M. Ku, "Eigenvalue Sensitivity in the Stability Analysis of Beck's Column with a Concentrated Mass at the Free End," *J. Sound and Vibration*, Vol. 153, 1992, pp.403-411.
5. S.R. Kuo and Y.B. Yang, "Critical Load Analysis of Undamped Nonconservative Systems using Bi-eigenvalue Curves," *AIAA J.*, Vol. 32, 1994, pp.2462-2468.