

# 비비례 감쇠시스템에 대한 효율적인 모드중첩법의 개발

## Development of an Efficient Mode Superposition Method for Non-classically Damped System

○조상원\*, 김만철\*\*, 박선규\*\*\*, 이인원\*\*\*\*

### 1. 서론

각종 구조물의 설계에 있어서 동적해석은 필수적이다. 동적해석의 방법은 크게 직접적분법과 모드중첩법으로 나눌 수 있다. 모드중첩법은 소수의 저차모드를 이용해서 전체시스템을 축소하여 동적해석을 수행하는 방법으로 각 모드별 동적 특성을 잘 나타내 주며, 해석시간이 적게 소모되기 때문에 직접적분법보다 효율적인 방법이다. 그러나 모드중첩법은 저차모드만을 이용하여 축소된 구조물을 해석할 때 고려되지 않는 모드들이 구조물의 응답거동에 포함되지 않기 때문에 직접적분법에 비해 정확도가 낮다. 이러한 단점을 해결하기 위해 여러가지 개선방법<sup>1)</sup>들이 제안되었다.

이러한 방법들은 비비례감쇠시스템의 대각행렬화의 어려움과 고유벡터의 생성의 비효율성등으로 인해 비례감쇠시스템에 국한되어 사용되어져 왔다. 따라서 실제 동하중을 받는 지반-구조물 상호작용 시스템, 진동 제어 시스템이 설치된 구조물 그리고 여러 가지 재료로 구성된 구조물등과 같은 감쇠행렬이 결합(coupled)되는 비비례감쇠시스템의 경우 비례감쇠로 근사화되어 해석되어왔다.

본 연구에서는 효율적으로 생성된 고유벡터<sup>2)</sup>로써 비례감쇠시스템으로 근사화하지 않고, 직접 복소영역에서 비비례감쇠시스템에 적용할 수 있는 효율적이고 정확한 모드중첩법을 개발하였다. 또한 예제들을 통해 각 방법의 효율성을 비교하였다.

### 2. 비비례감쇠시스템의 모드중첩법<sup>3)</sup>

구조물의 운동방정식은  $[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{F(t)\} = \{R_0\}r(t)$ 이다. 여기서  $[M]$ ,  $[C]$ 와  $[K]$ 는 차수가  $n$ 이고 대칭인 질량, 감쇠 그리고 강성행렬이며,  $\{u(t)\}$ 는 변위벡터이다. 그리고  $\{R_0\}$ 는 입력하중에서 시간에 관계없이 일정한 부분이고,  $r(t)$ 는 시간에 따라 변하는 부분이다. 감쇠행렬은 비비례감쇠시스템으로, Rayleigh Damping,  $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ 이 일반적으로 많이 사용된다. 구조물의 운동방정식에서 정확한 변위,  $\{u(t)\}$ 는  $\{u(t)\} = \{u_s(t)\} + \{u_r(t)\}$ 으로 주어진다. 여기서  $\{u_s(t)\}$ 는 저차 고유모드에 의해 구해지는 변위이고,  $\{u_r(t)\}$ 는 해석에 포함되지 않는 모드들에 의한 변위이다.  $\{u_s(t)\}$ 는  $\{u_s\} = [\Phi]\{\eta(t)\}$ 의 관계를 아

\* 한국과학기술원 토목공학과 석사과정

\*\* 한국과학기술원 토목공학과 박사후 연수과정

\*\*\* 성균관대학교 토목공학과 조교수

\*\*\*\* 한국과학기술원 토목공학과 교수

용하여, 저차 모드에 의해 모드좌표로 변환된  $\ddot{\eta}_n(t) + 2\beta\omega_n\dot{\eta}_n(t) + \omega_n^2\eta_n(t) = \{\phi_n\}^T\{R_0\}r(t)$ 를 해석함으로써 구할 수 있다. 여기서  $\beta$ 는 감쇠율,  $\omega_n$ 은 고유진동수이며,  $\{\phi_n\}$ 은  $n$ 번째 고유벡터이다. 해석에 포함되지 않는 모드에 의한 변위  $\{u_i(t)\}$ 를 구하는 방법에는, Mode Acceleration Method(이하 MA방법)와 Modal Truncation Augmentation Method(이하 MT방법)가 있다.

MA방법에 의한 변위,  $\{u(t)\}$ 는 식(1)과 같다.

$$\{u(t)\} = [K]^{-1}\{R_0\}r(t) - [K]^{-1}[M][\Phi]\{\ddot{\eta}(t)\} - [K]^{-1}[C][\Phi]\{\dot{\eta}(t)\} \quad (1)$$

식(1)에서 저차모드에 의해 표현되지 않는  $\{u_i(t)\}$ 는 식(2)와 같다.

$$[K]\{u_i(t)\} = \{R_i\}r(t) \quad (2)$$

단,  $\{R_i\}$ 는  $\{R_0\}$ 에서 모드로 표현되는  $\{R_s\}$ 를 제외한 부분이다. 모드에 의해 표현되는  $\{R_s\}$ 는 주어진 고유치문제  $[K]\{\phi_n\} = [M]\{\phi_n\}\omega_n^2$ 와  $\{R_0\}$ 에 의한 정적변위  $[K]\{u(t)\} = \{R_0\}$ 로부터 구한다. 여기서  $\{u(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\}$ 는 모드좌표로부터 구해진 실제변위이다. 그리고 모드로 표현된 정적변위는 식(3)과 같다.

$$\begin{aligned} \{\phi_n\}^T[K]\{\phi_n\}\eta_n(t) &= \{\phi_n\}^T\{R_0\} \\ \omega_n^2\eta_n(t) &= \{\phi_n\}^T\{R_0\} = \alpha_n, \quad \eta_n(t) = \frac{\alpha_n}{\omega_n^2} \end{aligned} \quad (3)$$

따라서 각각의 모드에 의해 표현되는  $\{R_s\}$ 는 식(4)와 같다.

$$\{R_s\} = [K]\{\phi_n\}\eta_n(t) = [M]\{\phi_n\}\omega_n^2\eta_n(t) = [M]\{\phi_n\}\alpha_n \quad (4)$$

식(2)에서와 같이 MA방법은 저차모드에 의해 표현되지 않는  $\{u_i(t)\}$ 를 정적인 방법으로 나타낸다.

MT방법은  $\{R_i\}$ 로부터 유도된 Ritz벡터에 의해 구성된 "유사 고유(pseudo eigen)"<sup>3)</sup> 또는 MT 벡터를 구성하여 기존의 저차모드와 함께 해석하는 방법이다. 이때 MT벡터는 기존의 저차모드와 질량과 강성행렬에 대해 직교한다. MT벡터,  $P$ 는 식(5)과 같다.

$$[K]\{X\} = \{R_i\}, \quad \bar{K}Q = \bar{M}Q \bar{\omega}_p^2, \quad \{P\} = \{X\}Q \quad (5)$$

여기서  $[\bar{K}] = \{X\}^T[K]\{X\}$  와  $[\bar{M}] = \{X\}^T[M]\{X\}$ 로 주어진다. 모드에 의해 표현되지 않고 식(5)의 MT벡터,  $P$ 에 의해서 고려되는 부분은 식(6)과 같다.

$$[M]\{\ddot{u}_i(t)\} + [C]\{\dot{u}_i(t)\} + [K]\{u_i(t)\} = \{R_i\}r(t) \quad (6)$$

저차모드에 의해 나타내지지 않고, MA방법과 MT방법에 의해 각각 표현되는 부분을 식(2)와 식(6)에서 비교하여 보면 MA방법은 MT방법의 근사해임을 알 수 있다. 즉 MT방법이 동적인 영향을 고려하는데 반해서, MA방법은 동적인 영향을 정적인 방법으로 근사화한다.

### 3. 비비례감쇠시스템의 모드중첩법

본 논문에서는 비례감쇠시스템의 MA와 MT방법을 비비례감쇠시스템에 다음과 같이 적용하였다. 비비례감쇠시스템에서는 감쇠행렬,  $[C]$ 가 결합(coupled)<sup>5)</sup>되어 있어 비례감쇠시스템에서 전개된 모드중첩법을 사용할 수

없다. 따라서 비비례감쇠행렬을 갖는 시스템의 2차 고유치 문제를 차수  $2n$ 을 갖는 상태공간 방정식<sup>4)</sup>으로 나타내고 이에 대하여 모드중첩법을 전개하였다. 적용된 상태공간 방정식을 나타내면 식(7)과 같다.

$$[B]\{\dot{y}(t)\}-[A]\{y(t)\}=\{R_0\}r(t) \quad (7)$$

여기서  $[B]=\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}$ ,  $[A]=\begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$  그리고  $\{y(t)\}=\begin{Bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{Bmatrix}$ 이다.

식(7)에 대한 고유치 문제는 식(8)과 같다.

$$[A]\phi_i=s_i[B]\phi_i \quad (8)$$

여기서  $s_i=-\xi_i\omega_i\pm i\omega_{Di}$ ,  $\phi_i=\begin{Bmatrix} \phi_i \\ s_i\phi_i \end{Bmatrix}$ ,  $\omega_i=|s_i|$ ,  $\xi_i=\frac{-\text{Real}(s_i)}{|s_i|}$  그리고  $\omega_{Di}=\omega_i\sqrt{(1-\xi_i^2)}$ 이다.

식(8)에서 고유치와 고유벡터는 일반적으로 허수부를 갖는 복소수이고 또한 공액(conjugate) 복소짝으로 존재한다.  $\{y(t)\}=[\Phi]\{z(t)\}$ 이므로, 식(7)을 모드좌표로 변환하면, 식(9)와 같다.

$$\dot{z}_i(t)-s_iz_i=\hat{\phi}_i^T\{R_0\}r(t) \quad (9)$$

여기서  $s_i=\hat{\phi}_i^T[A]\phi_i$ 이다. 따라서 비비례감쇠시스템에서의 변위,  $\{y_i\}$ 는 식(10)과 같다.

$$y(t)=\Phi z=\sum_{i=1}^{2n}\phi_iz_i \quad (10)$$

여기서  $\Phi=[\phi_1\ \phi_2\ \dots\ \phi_{2n}]$ 이다. 식(10)에서 고유벡터는 일반적으로 공액(conjugate)복소짝의 형태로 존재하므로 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$y(t)=2\times\text{real}\left(\sum_{i=1}^n\phi_iz_i\right) \quad (11)$$

비비례감쇠시스템에서 MA방법에 의한 변위는 식(12)와 같다.

$$\{y(t)\}=[A]^{-1}\{R_0\}r(t)-[A]^{-1}[B][\phi_i]\{z_i\} \quad (12)$$

비례감쇠시스템에서와 같이 저차 모드에 의해 나타나지 않는 부분을 표시하면 다음과 같다.

$$[A]\{y_i(t)\}=-\{R_i\}r(t) \quad (13)$$

비례감쇠시스템에서와 같이, MA방법은 저차모드에 의해 표현되지 않는  $\{u_i(t)\}$ 를 정적인 방법으로 나타낸다. 그러나 비비례감쇠시스템과 다른 것은 비비례감쇠행렬을 행렬분해하기 위해서 상태공간방정식을 도입하고, 그 결과 복소영역의 고유치와 고유벡터에 대하여 모드중첩법을 전개해야 한다는 것이다. 비비례감쇠시스템에서  $\{R_s\}$ 는 식(3)과 식(4)와 유사한 방법으로 구한다.

비비례감쇠시스템에 대한 MT방법은 식(14)과 같다.

$$\begin{aligned} \{R_s\}&=[B]\{\phi_i\bar{\phi}_i\}\{\phi_i\bar{\phi}_i\}^T\{R_0\}, \\ \{R_s\}&=\{R_0\}-\{R_t\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$[A]\{X\}=\{R_t\}, \quad \bar{K}Q=s_i\bar{M}Q, \quad \{P\}=\{X\}Q$$

여기서  $[\bar{K}]=\{X\}^T[A]\{X\}$ ,  $[\bar{M}]=\{X\}^T[B]\{X\}$ 이고,  $\bar{\phi}_i$ 는  $\phi_i$ 의 공액(conjugate) 복소짝이다. 식(14)에서 MT벡터, P를 유도할 때,  $\bar{\phi}_i$ 와  $\phi_i$ 의 공액복소짝으로 부터 유도된 MT벡터, P는 실수벡터이다.

#### 4. 예제

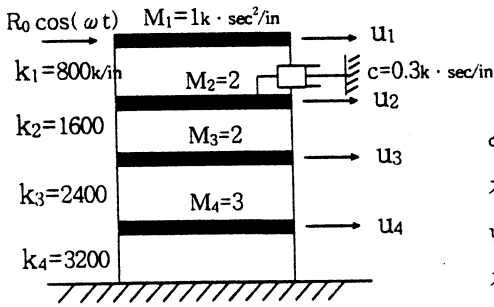


그림 1. 예제 구조물

그림1은 2번 절점에 집중 감쇠가 설치된 비비례감쇠시스템의 예제구조물이다. 그림2, 그림3 그리고 그림4는 절점  $u_4$ 에서의 각각의 해석방법에 의한 시간

이력곡선이다. 그림2와 같이 저차모드 1개만을 사용하여 해석한 경우, 모드 4개를 모두 사용한 정확한 시간이력곡선과는 차이가 난다. 해석에 사용되는 모드의 수를 늘려 3개의 모드로 해석한 경우, 정확한 시간이력곡선에 수렴함을 알 수 있다. 아래의 결과에서, MA방법과 MT방법은 복소영역의 비비례감쇠시스템에 적용가능하며, 저차모드 3개로 전체시스템의 거동을 해석할 수 있

는 효과적인 방법임을 보였다. 또한 그 수렴성은 MA방법과 MT방법이 같음을 알 수 있다.

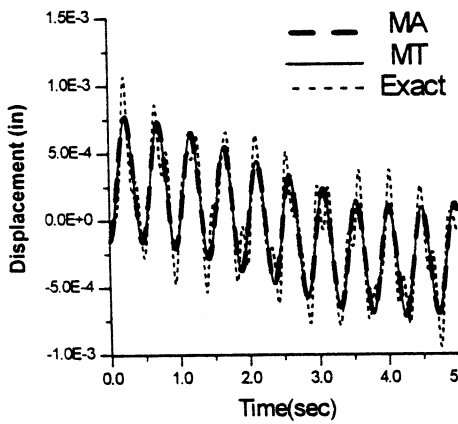


그림 2. 시간이력곡선 (1개의 모드)

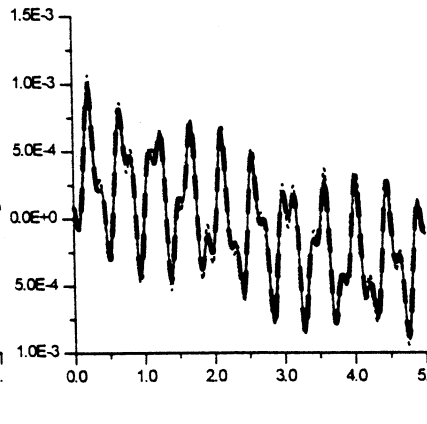


그림 3. 시간이력곡선 (2개의 모드)

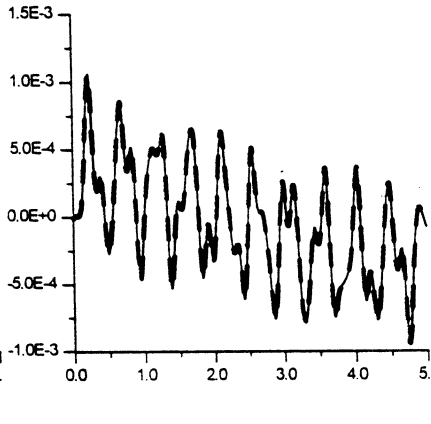


그림 4. 시간이력곡선 (3개의 모드)

#### 5. 결론

복소영역의 비비례감쇠시스템에 대하여 직접 적용할 수 있는 개선된 모드중첩법을 제안하였다. 제안 방법은 기존의 구조물을 비례감쇠시스템으로 근사화시키지 않기 때문에 보다 정확한 해석을 할 수 있으며, 저차의 모드만으로도 시스템전체의 거동을 정확하게 예측할 수 있다. 복소영역의 비비례감쇠시스템에 대해 모드중첩법의 적용가능함을 예제구조물을 통하여 증명하였고, 비비례감쇠시스템에 대하여서는 MA방법과 MT방법의 수렴성이 같음을 보였다.

#### 6.참고 문헌

1. ROY R. CRAIG, Jr.(1981), "Structural Dynamics", John Wiley & Sons, 341-379
2. 김만철, "비비례 감쇠 시스템의 효율적인 자유진동 해법" 박사학위논문, 한국과학기술원 (1998)
3. J. M. Dickens, J. M. Nakagawa and M. J. Wittbrodt (1997), "A critique of mode acceleration and modal truncation augmentation methods for modal response analysis", Comput. Struct., 62(6), 985-998
4. E. Igusa, A. D. Kiureghian and J. L. Sackman (1984), "Modal decomposition method for stationary response of nonclassically damped systems", Earthquake Engineering & Structural Dynamics, vol.12, 121-136
5. D. E. Newland, (1989), "Mechanical Vibration Analysis and Computation", Longman Scientific & Technical, 122-178