

## 비비례 감쇠시스템의 해석을 위한 효율적인 모드 중첩법

Efficient Mode Superposition Method for Non-Classically Damped Systems

조 상 원<sup>1)</sup> · 정 형 조<sup>1)</sup> · 김 동 옥<sup>2)</sup> · 이 인 원<sup>3)</sup>  
*Cho, Sang Won Jung, Hyung Jo Kim, Dong Ok Lee, In Won*

요 약 : 본 연구에서는 비비례 감쇠시스템을 효율적으로 해석할 수 있도록 모드 가속도법(Mode Acceleration Method)과 모드 절삭 보강법(Modal Truncation Augmentation Method)을 확장하고 그 사용성을 검증하였다. 비례 감쇠시스템의 동응답 해석에 널리 사용되는 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법은 누락된 고차모드 영향을 보정하여 모드 중첩법의 결과를 개선하는 방법이다. 기존의 방법들로 비비례 감쇠시스템을 해석하는 경우, 비비례 감쇠를 비례 감쇠로 근사하는 것이 일반적인 방법이다. 이러한 근사화 과정에서 필연적인 오차가 발생한다. 이에 본 연구에서는 구조물의 비비례 감쇠특성을 무시하지 않으며 정확하고 효율적으로 해석할 수 있도록 모드 가속도법과 모드 절삭보강법을 확장하였다. 비례 감쇠시스템에서는 모드 가속도법보다 모드 절삭 보강법이 더 효율적인 반면에, 비비례 감쇠시스템에서는 대부분의 경우에 있어서 확장된 두 방법의 효율성이 동일하다. 그러나 수치적 안정성은 확장된 모드 가속도법이 모드 절삭 보강법보다 우수하다. 이와같은 확장된 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법의 사용성 검증을 위해서 이론적 방법과 수치예제를 수행하였다.

ABSTRACT : The improved mode superposition methods for non-classically damped systems are presented in this paper. Generally, the mode superposition method uses a relatively small subset of the normal modes of structures. The mode acceleration method and the modal truncation augmentation method improve the results of the mode superposition method by considering effects of truncated high modes. For using these methods to analyze non-classically damped systems, the systems are approximated to the classically damped systems and thereby the errors are induced. In this paper, the mode acceleration method and the modal truncation augmentation method are expanded to analyze the non-classically damped systems. The applicability of the expanded methods is verified by closed form solutions and numerical examples. The expanded modal truncation augmentation method is conditionally stable depending on the pattern of the

- 
- 1) 한국과학기술원 토목공학과 박사과정
  - 2) 한국원자력연구소 박사후연수과정
  - 3) 정회원, 한국과학기술원 토목공학과 교수

external loading in the non-classically damped systems whereas the expanded mode acceleration method is stable for the all cases of loading. In the stable case, the results are the same with those of the expanded mode acceleration method.

핵심용어 : 모드 중첩법, 비비례 감쇠, 모드 가속도법, 모드 절삭보강법

KEYWORDS : Mode superposition method, Non-proportional damping, Mode acceleration method, Modal truncation method

## 1. 서론

동응답의 수치적 해석법으로는 직접 적분법과 모드 중첩법이 있다. 직접 적분법은 구조물의 운동방정식을 축약하지 않고 해석하기 때문에 정확하지만 계산량이 많고 시간이 오래 걸린다. 이에 반해 모드 중첩법은 구조물의 동적 특성을 잘 나타내는 소수의 저차 모드로써 구조물의 운동방정식을 축약하여 해석하기 때문에 계산량과 계산시간이 단축되어 경제적이다. 그러나 모드 중첩법은 구조물의 운동방정식을 축약하여 해석하므로 누락되는 고차 모드로 인해 오차가 발생한다. 이에 모드 중첩법의 결과를 개선하기 위하여, 누락되는 고차 모드들의 영향을 보정한 방법들이 제안되었다. 누락되는 고차 모드로 인한 오차를 보정한 방법으로 모드 가속도법(Mode Acceleration Method)과 모드 절삭 보강법(Modal Truncation Augmentation Method)이 있다.

이러한 일반적인 모드 중첩법과 개선된 모드 중첩법인 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법은 비비례 감쇠시스템의 해석에 적합한 형태이다. 그러나 대부분의 일반적인 구조물은 비비례 감쇠 특성을 갖고 있다. 특히 지반구조 상호작용 시스템, 진동 제어기를 갖춘 대형구조물 그리고 다양한 재료로 구성된 실제 구조물 등은 감쇠력이 매우 큰 비비례 감쇠 거동을 한다. 비비례 감쇠시스템의 해석에 기존의 모드 중첩법을 적용하는 경우 비비례 감쇠를 비례 감쇠로 근사하여 사용하는 것이 일반적이다. 그러나 이러한 방법은 필연적으로 오차<sup>(1)</sup>를 포함하게 되어 신뢰할 수 없는 결과를 준다. 그러므로 실제 구조

물의 동응답해석을 정확하고 효율적으로 수행하기 위해서는 비비례 감쇠시스템에 적용가능하며 정확한 결과를 주는 해석방법이 필요하다.

## 2. 비비례 감쇠시스템에서의 모드 중첩법

### 2.1 비비례 감쇠시스템에서의 모드 중첩법

행렬식으로 표현된 구조물의 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = R_0 r(t) \quad (1)$$

여기서  $M, C, K$ 는 각각 구조물의 질량, 감쇠, 강성행렬이다. 또한  $R_0$ 는 하중벡터이고,  $r(t)$ 는 하중의 시간함수이다. 모드 중첩법<sup>(2),(3)</sup>은 식(1)과 같은 구조물의 운동방정식을 각 독립적인 모드로 분리하여 해를 구한 뒤, 각 모드별 전체 거동에 대한 기여를 조합하여 전체결과를 구하는 방법이다. 따라서 식(1)의 운동방정식은 시스템의 고유 벡터,  $\phi_i$ 의 직교성에 의해 식(2)와 같은  $n$ 개의 독립된(uncoupled) 방정식으로 변환된다.

$$\ddot{q}_i + 2\beta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \phi_i^T R_0 r(t) \quad (2)$$

여기서  $\beta_i$ 는 감쇠비이며,  $\omega_i$ 는 구조물의  $i$  번째 고유진동수이다. 이와 같은 방법으로 구해진 모드 좌표를 다시 조합한 시스템의 응답은

$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^m \phi_i q_i(t)$  이다. 모드 중첩법에서 구조물이 갖는  $n$ 개의 모드 중에 저차의  $m$ 개만을 사용함으로써, 구조물의 동응답 해석에 소요되는 시간을 직접 적분법을 이용하는 경우 보다 월등히 절약할 수 있다.

비비례 감쇠시스템<sup>(2),(4)</sup>에서는 고유벡터로써 감쇠행렬  $\mathbf{C}$ 를 대각화 할 수 없으므로, 운동방정식을  $n$ 개의 독립된 모드좌표로 변환할 수 없다. 이러한 비비례 감쇠시스템에서는 운동방정식을 식(3)의 상태공간 방정식으로 바꾸어 모드 중첩법을 적용하는 것이 일반적<sup>(4),(5),(6)</sup>이다.

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}_0 r(t) \quad (3)$$

여기서 행렬  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}$  그리고  $\mathbf{F}_0$ 는 식(4)와 같다.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \mathbf{y}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix}, \mathbf{F}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서  $\mathbf{R}_0$ 는 비례 감쇠시스템에서 정의되던 차수  $n$ 의 하중 벡터이다. 따라서  $\mathbf{y}(t)$ 와  $\mathbf{F}_0$ 는 차수  $2n$ 의 크기를 갖는다. 식(3)의 상태공간 방정식에 모드 중첩법을 적용하기 위해서는 고유치 문제,  $\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i = s_i \mathbf{B}\boldsymbol{\psi}_i$ 로부터 고유 벡터와 고유치를 먼저 구한다.

$\boldsymbol{\psi}_i$ 는 차수  $2n$ 의 고유모드 벡터이며  $s_i$ 는 구조물의 고유치로, 비례 감쇠시스템과는 다르게 식(5)와 같은 공액 복소쌍(complex conjugate pair)의 형태이다.

$$s_i = -\xi_i \omega_i \pm i\omega_{D_i} \quad \boldsymbol{\psi}_i = \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_i \\ s_i \hat{\phi}_i \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\Psi}z(t)$ 의 변환과  $\boldsymbol{\psi}_i$ 의 직교성을 이용하면 상태공간 방정식을 식(6)과 같은 독립된(uncoupled)  $2n$ 개의 방정식으로 변환할 수

있다.

$$\dot{z}_i - s_i z_i = \boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{F}_0 r(t) \quad (6)$$

식(6)의 변환된 모드 좌표에서의 응답  $z_i$ 는 역시 복소수로 구해지며  $\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\Psi}z(t)$ 를 이용하여 다시 실제 공간으로 역 변환하면 식(7)과 같다.

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{2q} \boldsymbol{\psi}_i z_i(t) \quad (q \ll n) \quad (7)$$

## 2.2 비비례 감쇠시스템에서의 모드 가속도법

일반적인 모드 중첩법에서는 식(7)과 같이 전체  $2n$ 개의 모드 중에서 저차의  $2q$ 개만을 해석에 이용하므로 효율적이지만 고차 모드의 영향이 누락되어 오차를 유발한다. 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법은, 전체 시스템에 대하여 추가적인 모드를 사용하지 않고, 누락되는 고차 모드의 영향을 보정하여 일반적인 모드 중첩법의 결과를 개선하는 효율적인 방법이다.

그러나 기존의 모드 가속도법<sup>(2),(7)</sup>은 비례 감쇠시스템에 적합한 형태를 가지고 있다. 이러한 기존의 모드 가속도법을 비비례 감쇠시스템에 적용하는 것은 복소 영역으로 확장하는 것을 의미한다. 따라서 차수  $n$ 의 운동방정식을 차수  $2n$ 의 상태공간 방정식으로 변환하여 모드 가속도법을 적용한다.

모드 가속도법에 의한 변위는 해석에 사용된 저차 모드에 의한 변위,  $\mathbf{y}_r$ 와 누락된 고차 모드의 영향을 보정한 변위,  $\mathbf{y}_{i_m}$ 로 구성되므로  $\mathbf{y}_{i_m} = \mathbf{y}_r + \mathbf{y}_{i_m}$ 로 나타낼 수 있다. 누락된 고차 모드의 보정 변위량,  $\mathbf{y}_{i_m}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다. 상태공간 방정식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$(\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}\dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}(t)) \quad (8)$$

식(7)의 해를  $\dot{\mathbf{y}}(t) = \sum_{i=1}^{2q} \boldsymbol{\psi}_i \dot{z}_i$ 로 변환하여 식

(8)에 대입하면, 비비례 감쇠시스템에서의 모드 가속도법의 변위는 다음과 같다.

$$\mathbf{y}_{\text{mod}}(t) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \sum_{i=1}^{2q} \psi_i \dot{z}_i - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}(t) \quad (q \ll n) \quad (9)$$

식(9)에서 식(7)의 저차모드에 의한 변위량을 빼면, 식(10)의 누락된 고차모드의 보정 변위량,  $\mathbf{y}_{\text{tr}}$ 를 구할 수 있다.

$$\mathbf{y}_{\text{tr}} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}_t r(t) \quad (10)$$

여기서  $\mathbf{R}_t$ 는 누락 하중 벡터(Force Truncation Vector)로서  $\mathbf{R}_t = \mathbf{F}_0 - \mathbf{R}_s$ 로 정의되며  $\mathbf{R}_s$ 는 모드 하중 벡터 중에서 해석에 포함된 소수의 저차 모드에 의해 표현되는 부분으로써  $\mathbf{R}_s = \mathbf{B}[\psi_i \bar{\psi}_i][\psi_i \bar{\psi}_i]^T \mathbf{F}_0$ 이다.

여기서  $\psi_i$  고유 벡터이며,  $\bar{\psi}_i$ 는 공액 복소짝이다. 위와 같이 해석에 포함되는 저차 모드에 의한 변위,  $\mathbf{y}_s$  외에 비비례 감쇠시스템에서의 고차 모드 보정 변위  $\mathbf{y}_{\text{tr}}$ 가 모드 가속도법에 의해 추가되었으며, 그 보정 방법은 식(10)과 같이 정적인 방법으로 이루어진다.

### 2.3 비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법

비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법에 의한 변위는 모드 가속도법에서와 같이  $\mathbf{y}_{\text{mod}} = \mathbf{y}_s + \mathbf{y}_{\text{tr}}$ 의 두 부분으로 이루어진다.  $\mathbf{y}_{\text{tr}}$ 는 모드 절삭 보강법에 의한 누락된 고차 모드의 보정 변위량이다. 모드 절삭 보강법은 누락되는 고차모드의 영향을 P벡터를 생성하여 보정하는 방법으로, P벡터는 누락하중벡터  $\mathbf{R}_t$ 를 사용하여 구한 Ritz 벡터와 같다. 따라서 P 벡터는 행렬 A와 행렬 B에 대해서 기존의 고유 벡터들과 직교하지만 고유치 문제,  $\mathbf{A}\mathbf{P} \neq \omega_p \mathbf{B}\mathbf{P}$

를 만족하지 않는다. 이러한 특성 때문에 P 벡터를 유사 고유벡터라고도 한다. 비비례 감쇠시스템에 대한 유사 고유 벡터, P벡터는 식(11)과 같이 구한다.

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{R}_t, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{\alpha} \bar{\mathbf{P}} \quad (11)$$

여기서  $\alpha = (\bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{B} \bar{\mathbf{P}})^{1/2}$ 이고  $\mathbf{R}_t$ 는 누락 하중 벡터이다. 생성된 P벡터는 비례 시스템<sup>(7),(9)</sup>과는 달리 차수 2n의 벡터이다. 이렇게 생성된 P 벡터에 의한 누락 고차 모드의 보정 변위를  $\mathbf{y}_{\text{tr}} = \mathbf{P}z_p(t)$ 로 놓으면 상태공간 방정식을 식(12)와 같이 변형시킬 수 있다.

$$\mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P} \dot{z}_p(t) - \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} z_p(t) = \mathbf{P}^T \mathbf{R}_t r(t) \quad (12)$$

또한 식(12)는 P벡터의 직교성에 의해 식(13)과 같은 모드 좌표로 변환할 수 있다.

$$\dot{z}_p(t) - s_p z_p(t) = \mathbf{P}^T \mathbf{R}_t r(t) \quad (13)$$

여기서  $s_p = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ 이다. 식(13)에 의해  $z_p(t)$ 를 구한 후,  $\mathbf{y}_{\text{tr}} = \mathbf{P}z_p(t)$ 을 이용하여 역변환을 하면, 비비례 감쇠시스템에서 모드 절삭 보강법에 의한 누락되는 고차 모드의 보정 변위,  $\mathbf{y}_{\text{tr}}$ 를 구할 수 있다.

비례 감쇠시스템에서는 일반적으로 모드 가속도법에 비해서 모드 절삭 보강법이 더 효율적이고 정확하다.<sup>(9)</sup> 그러나 비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법은 비례 감쇠시스템에서와는 다른 특성을 갖는다. 비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법의 특성을 안정성과 안정한 경우에 대하여 수렴특성으로 나누어 살펴 보았다.

### 3. 비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법의 특성

### 3.1 비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법의 안정성

비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법의 수치적 안정성을 알아보기 위해서 식(13)의 일반 해를 구하여 보자. 미분 방정식의 초기 조건을  $z_p(0)=0$ , 입력하중의 시간 함수를  $r(t)=\sin(\omega t)$ 로 놓으면, 해는 다음과 같다.

$$z_p(t) = \frac{\mathbf{P}^T \mathbf{R}_t}{s_p^2 + \omega^2} (\omega e^{s_p t} - s_p \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) \quad (14)$$

지진과 같이 복잡한 입력하중의 시간함수도 삼각함수의 조합으로 나타낼 수 있으므로, 입력하중의 시간함수를 삼각함수로 가정한 것은 타당하다. 식(14)의 해가 물리적으로 안정하기 위해서는  $s_p < 0$ 의 제한조건이 필요하다.

$s_p = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ 이므로,  $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} < 0$ 를 만족하는 경우에만 비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법이 수치적으로 안정하다. 행렬  $\mathbf{A}$ 는 일반적으로 정칙행렬이 아니므로 모드 절삭 보강법의 수치적 안정성은  $\mathbf{P}$ 벡터와 연관된다. 또한  $\mathbf{P}$ 벡터는 누락하중벡터  $\mathbf{R}_t$ 에 의해 영향을 받으므로 하중벡터의 형태에 따라 모드 절삭보강법의 안정성이 결정된다.

### 3.2 비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법의 수렴특성

실제 구조물에서  $\mathbf{A}$ 행렬은 질량과 강성행렬로 이루어지는 차수  $2n$ 의 행렬로써, 실제 구조물의 물성치를 행렬의 요소로 갖는다. 또한  $\omega$ 는 구조물에 가해지는 입력하중의 주파수로서, 그 값이 수십에서 수백 rad/sec로 제한되어 있다. 즉 실제 구조물에서는  $s_p$ 가 입력하중의 가진 주파수  $\omega$ 에 비해 그 절대값이 훨씬 크다.  $|s_p| \gg \omega$

따라서 모드 절삭 보강법이 안정한 경우, 식(14)를 다음과 같이 정리한다.

$$z_p = \frac{-s_p \mathbf{P}^T \mathbf{R}_t}{s_p^2 + \omega^2} \sin(\omega t) \quad (15)$$

$y_{t,\omega} = \mathbf{P} z_p(t)$ 의 관계를 이용하여 역변환을 하면, 고차 모드에 대한 보정 변위  $y_{t,\omega}$ 는 다음과 같다.

$$y_{t,\omega} = \mathbf{P} z_p(t) = \mathbf{P} \frac{-s_p \mathbf{P}^T \mathbf{R}_t}{s_p^2 + \omega^2} \sin(\omega t) \quad (16)$$

$\mathbf{P}$ 벡터는  $\mathbf{P} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}_t$ 의 관계가 있으므로 식(18)과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$y_{t,\omega} = -\frac{s_p \mathbf{P}^T \mathbf{R}_t}{\alpha(s_p^2 + \omega^2)} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}_t \sin(\omega t) \quad (18)$$

여기서 식(10)의 모드 가속도법에 의한 고차 모드의 보정량  $y_{t,\omega}(t)$ 를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$y_{t,\omega} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}_t r(t) \quad (10)$$

식(17)은 식(10)의 모드 가속도법에 의한 결과와 유사하며, 계수 항이  $\frac{s_p \mathbf{P}^T \mathbf{R}_t}{\alpha(s_p^2 + \omega^2)} \approx 1$ 의 조건을 만족할 경우 모드 가속도법의 결과와 일치한다.

식(17)의 계수 항의 분자와 분모를  $s_p$ 로 나누어 주고,  $|s_p| \gg \omega$ 과  $\hat{\mathbf{R}}_t = \alpha \mathbf{A} \mathbf{P}$ ,  $s_p = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$

을 이용하면  $\frac{s_p \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{R}}_t}{\alpha(s_p^2 + \omega^2)} \approx \frac{\mathbf{P}^T \hat{\mathbf{R}}_t}{\alpha s_p} = \frac{\alpha \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}}{\alpha \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}} = 1$ 이다.

일반적인 경우에 위의 계수가 1이므로,  $s_p < 0$ 을 만족하는 모드 절삭보강법의 결과는 식(18)로 정리되며 이것은 식(10)에 표기한 모드 가속도법의 결과와 같다.

$$y_{t_m} = -\frac{s_p \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{R}}_t}{\alpha(s_p^2 + \omega^2)} \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_t \sin(\omega t) \approx -\mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_t \sin(\omega t) = y_{t_m}$$

(18)

입력하중의 시간 함수가 *cosien* 함수인 경우에  
도 같은 방법으로 증명한다.

위의 결과들을 정리하면, 비비례 감쇠시스템  
에서의 모드 절삭보강법은  $s_p < 0$ 의 조건에 따  
라 제한적으로 적용가능하며, 적용된 모드 절  
삭보강법은 모드 가속도법과 같은 결과를 주는  
것을 증명하였다. 위식의 유도는 *sine* 입력하중  
과 *cosine* 입력하중에 대해 증명하였으나 다양한  
입력하중의 시간함수는 *sine* 함수와 *cosine* 함수  
의 조합으로 나타낼 수 있으므로 일반적인 증명  
이다.

비례 감쇠시스템에서는 누락된 고차 모드를  
정적으로 보정하는 모드 가속도법에 비해 동적  
으로 보정하는 모드 절삭 보강법이 일반적으로  
더 효율적<sup>[8]</sup>인 반면에, 비비례 감쇠시스템으로  
확장된 모드 가속도법과 모드 절삭보강법은 누  
락된 고차모드를 보정하지 않는 일반적인 모드  
중첩법에 비해 더 효율적이긴 하지만 두 방법사  
이에는 차이가 없다. 그러나 수렴의 안정성을  
고려한다면 확장된 모드 가속도법이 확장된 모  
드 가속도법보다 우수한 방법이라고 할 수 있  
다. 4절의 수치예제에서는 모드 가속도법과 모  
드 절삭 보강법의 수렴성을 일반적인 모드 중첩  
법과 비교하였다. 또한 비비례 감쇠시스템에서  
 $s_p$ 의 조건에 따라 모드 절삭 보강법의 결과가  
발산하는 경우와 수렴하는 경우를 나타내었고,  
수렴하는 경우에는 모드 가속도법과 일치함을  
보였다. 수렴하는 경우에는 모드 가속도법과 일  
치함을 보였다.

#### 4. 수치예제

각 수치예제의 결과 비교는 각 절점에서의  
최대 휨 모멘트를 비교하였다. 결과의 표시는  
각각의 방법에 의한 각 절점에서의 최대 휨 모

멘트를 직접 적분법으로 해석한 결과의 최대값  
으로써 정규화하여 나타내었다.

#### 4.1 지진 하중이 작용하는 집중 감쇠가 설치 된 외팔보

첫 번째의 수치예제는 누락된 고차 모드의  
영향을 보정한 모드 가속도법과 모드 절삭보강  
법의 효율성을 일반적인 모드 중첩법과 비교하  
기 위하여 수행하였다. 입력하중은 Elcentro  
지진하중을 사용하였다. 그림1의 예제 구조물은  
10개의 빔 요소로 구성된 캔틸레버빔으로써,  
탄성계수, 단면적, 감쇠계수, 관성모멘트, 밀도  
는 각각  $3.0 \times 10^7$  psi,  $4 \text{ in}^2$ ,  $0.1 \text{ lb} \cdot \text{sec}/\text{in}$ ,  
 $1.25 \text{ in}^4$ ,  $7.41 \times 10^{-4} \text{ lb}/\text{in}^3$  이다.

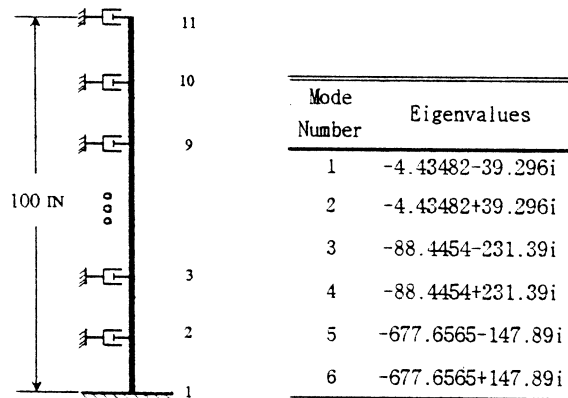


그림1 예제 구조물과 고유치

지진 하중에 대한 각 방법의 응답비교를 그  
림 2와 그림3에 나타내었다. md1은 한 개의  
저차 모드만을 사용한 일반적인 모드 중첩법  
(mode superposition method : 이하 MD방  
법)의 결과이며, md2, md3는 각각 2개와 3  
개의 저차 모드가 중첩된 결과를 나타낸다. 이  
러한 표시법은 모드 가속도법과 모드 절삭보강  
법의 결과에도 동일하게 적용한다. 그림2의 일  
반적인 모드 중첩법(MD방법)에 비해 그림3의  
모드 가속도법과 모드 절삭보강법이 직접 적분  
법의 값에 더 잘 수렴하는 것을 알 수 있다. 이  
것은 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법에 의한  
응답 곡선이 누락된 고차 모드의 영향을 추가적

으로 보정하기 때문이다. 또한 그림3에서 모드 가속도법(MA방법)의 결과와 모드 절삭 보강법(MT방법)의 결과가 일치하는 것을 알 수 있다. 이것은 3.2절에서 모드 절삭 보강법이  $P^T A P < 0$ 의 조건을 만족하는 경우에 모드 가속도법의 결과와 일치하는 것을 나타낸다. 그림2와 그림3은 지진 하중에 대한 각각의 방법에 의한 모멘트를 비교한 것이다.

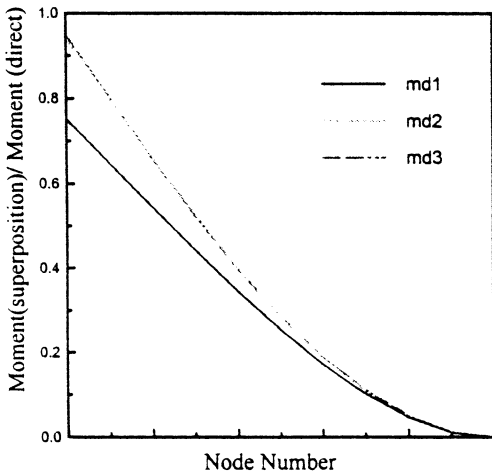


그림2 MD방법에 의한 모멘트

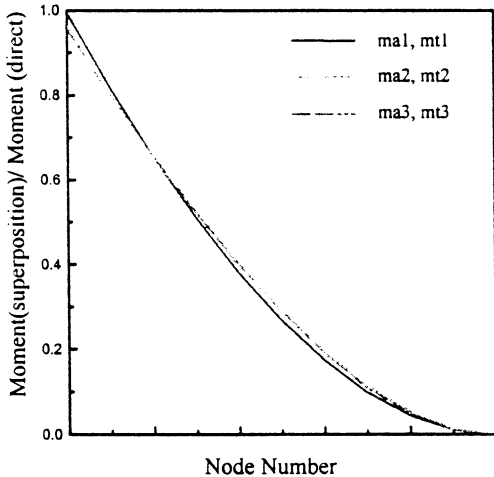


그림3 MA방법과 MT방법에 의한 모멘트

이상의 결과를 정리하면 비례 감쇠시스템에 적용되던 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법이 비비례 감쇠시스템에 확장되어 적용되었으며, 누락된 고차 모드를 보정하는 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법이 더 효율적이다.

#### 4.2 10층 Shear Building

두 번째의 수치 예제는 비비례 감쇠시스템에 대한 모드 절삭 보강법의 적용성을 검증하기 위한 것으로서, 모드 가속도법이 수렴할 때, 모드 절삭 보강법의 해가 수렴하지 않는 경우를 나타내었다. 그림4의 예제 구조물은 10개의 자유도를 갖는 Shear Building으로써 7층에 집중 감쇠가 부착되어진 비비례 감쇠시스템이다.

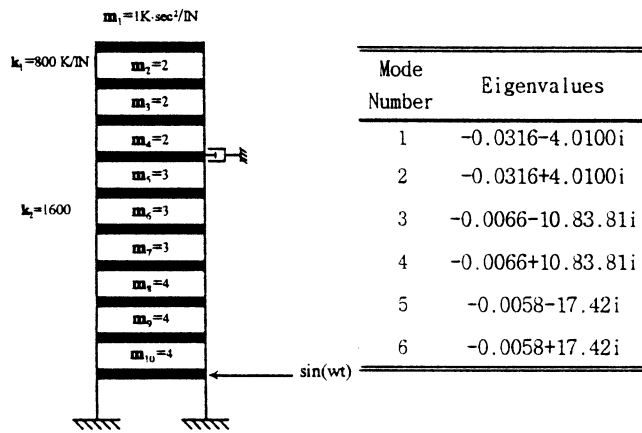


그림4 예제구조물과 고유치

하중의 시간함수는  $\sin(32.0 t)$ 이다. 그림5는 구조물의 응답 결과를 그림으로 나타낸 것이다.

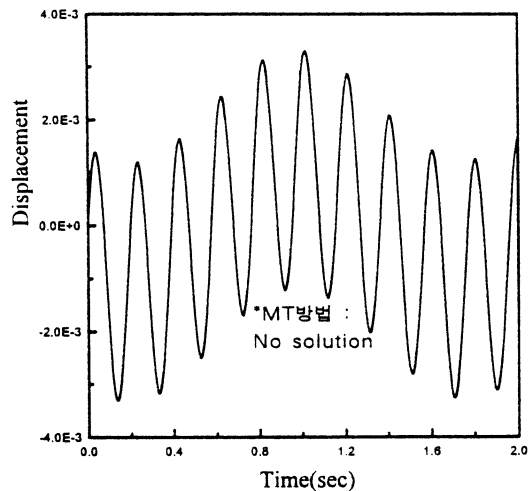


그림5 Load case2에 대한 MA방법의 응답곡선

예제구조물은  $P^T A P = 6.2443 \times 10^3$ 으로써

$P^TAP < 0$ 의 조건을 만족시키지 못한다. 모드 절삭 보강법의 해는 발산하므로 모드 절삭 보강법을 적용할 수 없다.(그림5) 그러나 모드 가속도법은 적용 가능하며, 그 때의 해는 그림6과 같다. 따라서 비비례 감쇠시스템에 대한 모드 절삭 보강법의 적용은 제한적이다. 이상의 결과를 정리하면, 비비례 감쇠시스템으로 확장된 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법을 적용함에 있어서, 모드 가속도법은 항상 안정된 결과를 주는 반면에 모드 절삭 보강법은 하중벡터의 형태에 따라 안정된 결과를 주지 못하는 경우가 존재한다. 또한 확장된 모드 절삭 보강법이 안정된 결과를 주는 경우에 있어서 그 결과는 확장된 모드 가속도법과 일치한다. 따라서 모드 절삭보강법의 사용성은 제한적이다.

## 5. 결론

본 연구에서는 비비례 감쇠시스템을 해석할 수 있도록 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법을 비비례 감쇠시스템에 적합한 형태로 확장하였으며, 확장된 각각의 방법에 대해 그 적용성을 이론적 방법과 수치예제로써 검증하였다.

모드 가속도법과 모드 절삭 보강법은 누락된 고차 모드를 보정하는 효율적인 방법으로서, 본 연구에 의해 비례 감쇠시스템의 해석에 적용되던 모드 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법을 비비례 감쇠시스템을 해석할 수 있는 적합한 형태로 확장되었다. 비례 감쇠시스템에서는 모드 가속도법보다 모드 절삭 보강법이 더 효율적인 반면에, 비비례 감쇠시스템에서는 대부분의 경우에 있어서 두 방법의 효율성이 동일하다. 그러나 수렴의 안정성을 고려한다면 확장된 모드 가속도법이 확장된 모드 절삭 보강법보다 우수한 방법이라고 할 수 있다. 그러므로 실제 비비례 감쇠시스템의 해석에 적용함에 있어서 확장된 모드 절삭 보강법보다는 확장된 모드 가속도법을 선택하는 것이 해석의 안정성을 확보하고 정확한 결과를 얻는데 바람직하다.

## 참고 문헌

- (1) G. B. Warburton and S. R. Soni, "Errors in Response Calculations for Non-Classically Damped Structures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 5, 1987, pp.365-376.
- (2) Roy R. Craig, Jr., *Structural Dynamics*, John Wiley & Sons, 1981.
- (3) Ray W. Clough and Joseph Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, 1993
- (4) D. E. Newland, *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Scientific & Technical, 1989.
- (5) Takeru Igusa, Armen Der Kiureghian and Jerome L. Sackman, "Modal Decomposition Method for Stationary Response of Non-Classically Damped Systems.", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.12, 1984, pp.121-136
- (6) 김만철, 비비례 감쇠 시스템의 효율적인 자유진동 해법, 박사학위 논문, 한국과학기술원, 1998
- (7) R. E. Cornwell, R. R. Craig, Jr. and C. P. Johnson, "On the Application of The Mode-Acceleration Method to Structural Engineering Problems.", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.11, 1983, pp.679-688
- (8) E. L. Wilson, M. W. Yuan and J. M. Dickens, "Dynamic Analysis by Superposition of Ritz Vectors.", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.10, 1982, pp.813-823
- (9) J. M. Dickens, J. M. Nakagawa and M. J. Wittbrodt, "A Critique of Mode Acceleration and Modal Truncation Augmentation Methods for Modal Response Analysis.", *Computers and Structures*, Vol.62, No.6, 1997, pp. 985-998