

# 직접적분법의 분석과 비교

## Analysis and Comparison of Step-by-Step Numerical Integration Methods

○ 지 현 우<sup>1</sup>, 박 선 규<sup>2</sup>, 이 인 원<sup>3</sup>

### 1. 서론

구조물의 동적 해석을 위해 직접적분법이 많이 사용된다. 이는 구조물의 질량, 감쇠, 강성행렬을 선형성, 비선형성에 상관없이 바로 사용하므로써 쉽게 결과를 얻을 수 있기 때문이다. 일반적으로 사용되는 직접적분법으로는 Houbolt Method, Newmark Method[1], Wilson  $\theta$  Method[2] 등이 있으며 현재까지 다른 많은 방법들이 개발되고 개선되었다[3-5]. 이러한 많은 방법들 중에서 보다 정확한 결과를 주는 방법을 고르기 위해 모든 방법들에 대한 비교가 필요하지만 아직 이러한 연구가 수행 되지 않았다. 본 논문에서는 현재까지 개발된 대부분의 방법을 비교하였다.

직접적분법의 계산 소요 시간은 시간 단계의 수에 비례하기 때문에 계산 시간이 적게 소요되도록 시간 간격이 충분히 커야 하고, 정확한 결과를 얻기 위해서는 시간 간격이 충분히 작아야 한다. 이러한 상반되는 두 조건을 만족하기 위해서 적절한 시간 간격을 선택하여야 한다. 적절한 시간 간격의 선택에 지침이 되는 것이 안정성과 정확성 분석이다. 단자유도계의 운동방정식을 각각의 방법에 따라 풀어 얻은 증폭 행렬의 고유치 해석을 통해 안정성과 정확성 분석을 할 수 있다.

수치 예제로는 조화 하중과 El Centro 지진하중을 받는 4층 전단 건물을 선택하였으며, 각각의 직접적분법으로 해석을 수행한 후 그 결과를 비교 하였다.

### 2. 증폭행렬 ( amplification matrix )

직접적분법의 기본 개념은 n 번째 단계에서 구해진 응답을 이용하여 (n+1) 번째의 응답을 구하는 것이다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\{X_{n+1}\} = [A]\{X_n\} + [L]\{f_{n+1}\} \quad (1)$$

여기서  $\{X_n\}$ 은 이전 단계에서의 응답으로 변위, 속도나 가속도가 되며  $[A]$ 는 증폭 행렬로 전단계에서의 응답을 다음 단계로 전달할 때 곱해지는 행렬로 각 직접적분법의 방법에 따라 정해 지는 상수 행렬이다.  $\{f_{n+1}\}$ 는 각 단계에서의 외력이고  $[L]$ 은 외력과  $\{X_{n+1}\}$ 를 연결해 주는 하중 계수이다.

증폭행렬은 이산시간구역에서 식 (2)의 단자유도계의 운동방정식을 풀어 얻을 수 있으며 여기서  $\omega$ 와  $\xi$ 는 단자유도계의 고유진동수와 감쇠계수이다.

$$\ddot{x}_n + 2\xi\omega\dot{x}_n + \omega^2x_n = f_n \quad (2)$$

적분시간간격을  $\Delta t$ 라 할 때, 각각의 직접적분법의 증폭행렬은 다음과 같다.

#### ■ Central Difference Method (C.D.M)

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2-\omega_n^2\Delta t^2}{1-\xi\omega_n\Delta t} & -\frac{1-\xi\omega_n\Delta t}{1+\xi\omega_n\Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{Bmatrix}$$

#### ■ Houbolt Method

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \\ x_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5\lambda}{\omega_n^2\Delta t^2} + 6\kappa & -\left(\frac{4\lambda}{\omega_n^2\Delta t^2} + 3\kappa\right) & \frac{\lambda}{\omega_n^2\Delta t^2} + \frac{2\kappa}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{Bmatrix} \quad \text{여기서}$$

$$\lambda = \left(\frac{2}{\omega_n^2\Delta t^2} + \frac{11\xi}{3\omega_n\Delta t} + 1\right)^{-1}, \quad \kappa = \frac{\xi\lambda}{\omega_n\Delta t}$$

<sup>1</sup> 한국과학기술원 토목공학과 석사과정  
<sup>2</sup> 정희원. 성균관대학교 토목공학과 교수  
<sup>3</sup> 정희원. 한국과학기술원 토목공학과 교수

■ Newmark Method

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} \\ \ddot{x}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\beta\lambda & \Delta t(1-\beta\lambda-2\beta\kappa) & \Delta t^2 \left[ \frac{1}{2}-\beta-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\beta\lambda-2(1-\gamma)\beta\kappa \right] \\ -\frac{\lambda\gamma}{\Delta t} & 1-\lambda\gamma-2\gamma\kappa & \Delta t \left[ 1-\gamma-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\gamma\lambda-2(1-\gamma)\gamma\kappa \right] \\ -\frac{\lambda}{\Delta t^2} & -\frac{(\lambda+2\kappa)}{\Delta t} & -\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\lambda-2(1-\gamma)\kappa \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}$$

여기서  $\lambda = \left( \frac{1}{\omega_n^2 \Delta t^2} + \frac{2\xi\gamma}{\omega_n \Delta t} + \beta \right)^{-1}$ ,  $\kappa = \frac{\xi\lambda}{\omega_n \Delta t}$

■ Wilson  $\theta$  Method

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} \\ \ddot{x}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{\lambda}{6} & \Delta t \left( 1-\frac{\lambda\theta}{6}-\frac{\kappa}{3} \right) & \Delta t^2 \left( \frac{1}{2}-\frac{1}{6\theta}-\frac{\lambda\theta^2}{18}-\frac{\kappa\theta}{6} \right) \\ -\frac{\lambda}{2\Delta t} & 1-\frac{\lambda\theta}{2}-\kappa & \Delta t \left( 1-\frac{1}{2\theta}-\frac{\lambda\theta^2}{6}-\frac{\kappa\theta}{2} \right) \\ -\frac{\lambda}{\Delta t^2} & -\frac{(\lambda\theta+2\kappa)}{\Delta t} & 1-\frac{\lambda\theta^2}{3}-\frac{1}{\theta}-\kappa\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}$$

여기서  $\lambda = \left( \frac{\theta}{\omega_n^2 \Delta t^2} + \frac{\xi\theta^2}{\omega_n \Delta t} + \frac{\theta^2}{6} \right)^{-1}$ ,  $\kappa = \frac{\xi\lambda}{\omega_n \Delta t}$

■ Zienkiwicz Method

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha\lambda & \Delta t(1-2\kappa\alpha-\lambda\alpha\theta) \\ -\frac{\lambda}{\Delta t} & 1-2\kappa-\lambda\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}$$

여기서  $\lambda = \left( \frac{1}{\omega_n^2 \Delta t^2} + \frac{2\xi\theta}{\omega_n \Delta t} + \alpha\theta \right)^{-1}$ ,  $\kappa = \frac{\xi\lambda}{\omega_n \Delta t}$

이 외에 Runge-Kutta method (R-K), Hilber-Hughes-Taylor's  $\alpha$  method (HHT), Collocation method, Bozzak-Newmark method (B-N), Bazzi-Anderheggen's  $\rho$  method (B-A  $\rho$ ) 등에 대한 증폭행렬을 구하였다.

3. 안정성, 정확성 분석

증폭 행렬의 고유치 문제를 풀어 냄으로써 안정성과 정확성 분석을 할 수 있다. 안정성 조건은 다음과 같다.

$$\rho(\lambda) \leq 1 \quad (3)$$

여기서  $\lambda$ 는 각 직접적분법의 증폭행렬의 고유치 이고,  $\rho(\lambda)$ 는 고유치의 절대값 중에서 가장 큰 값으로 스펙트럼 반경 (spectral radius) 이다. 정확성 분석을 위해 알고리즘상의 감쇠비 (algorithmic damping ratio)와 상대적인 주기변화 (relative period error) 를 계산한다. 이 값들은 증폭행렬의 켈레복소수 고유치로부터 식 (4)와 식 (5)를 이용하여 구할 수 있다.

$$\bar{\xi} = -\frac{\ln(A^2 + B^2)}{2\bar{\Omega}} \quad (4)$$

$$\tau = \frac{\omega}{\bar{\omega}} - 1 \quad (5)$$

여기서

$$\lambda_{1,2} = A \pm iB, \bar{\Omega} = \frac{\arctan(B/A)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \bar{\omega} = \frac{\bar{\Omega}}{\Delta t} \quad (6)$$

각각의 직접적분법의 스펙트럼 반경, 알고리즘상의 감쇠비, 상대적인 주기변화는 그림 1, 그림 2, 그림 3과 같다. 각 그림의 x 축은  $\Delta t/T$ 로 T는 구조물의 최단주기이다.

4. 수치예제: 4층 전단 건물

4층 전단 건물에 대한 제원은 그림 4와 같다. 감쇠행렬 C는 Rayleigh 감쇠로 구성되며 Rayleigh 감쇠계수  $\alpha, \beta$ 는 0.918과 0.0023로 하였다. 20 rad/s와 7rad/s의 주파수를 가지는 조화하중 (harmonic loading)과 El Centro 지진을 외부하중으로 하여 지진과 같이 건물의 기초에 작용하였으며, 최상층의 변위를 각각의 직접적분법으로 구하였다. 모든 모드를 다 사용하여 모드중첩법에 의해 구해진 결과를 정확해로 사용하여 RMS (Root Mean Square) 값을 구해 비교하였다. RMS 값의 정의는 식 (7)과 같다.

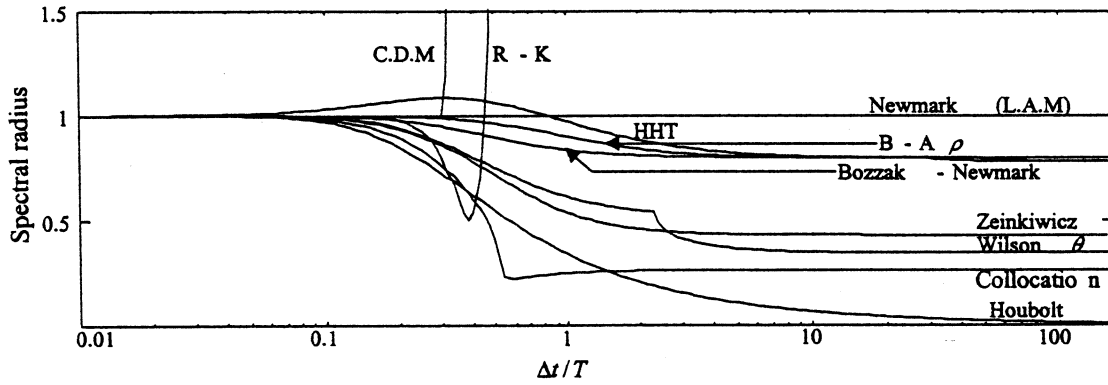


그림 1. Comparison of spectral radii of each method with no damping

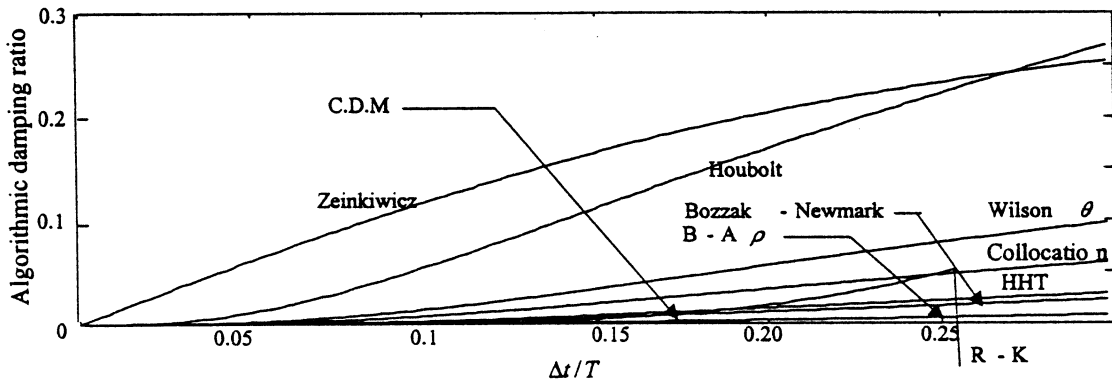


그림 2. Comparison of algorithmic damping ratios of each method with no damping

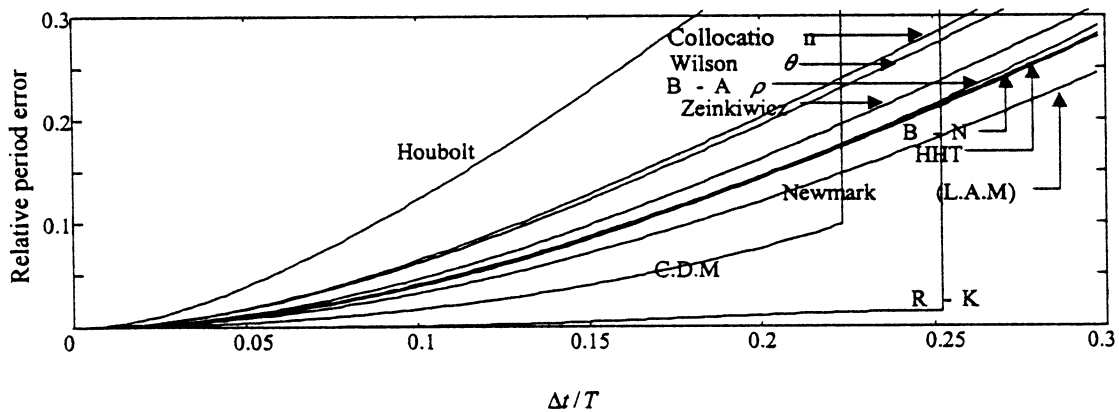


그림 3. Comparison of relative period errors with no damping

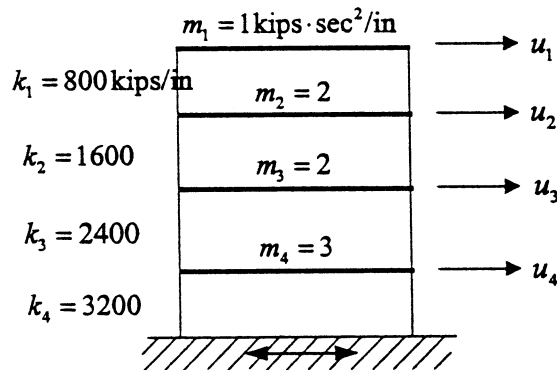


그림 4. Four story shear building [8]

$$\text{RMS} = \frac{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x}_i)^2}}{\text{No. of steps}} \quad (7)$$

여기서  $x_i$  는 정확해이고,  $\bar{x}_i$  는 각각의 직접적분법으로 계산한 값이다. 그 결과는 그림 5 와 같다.

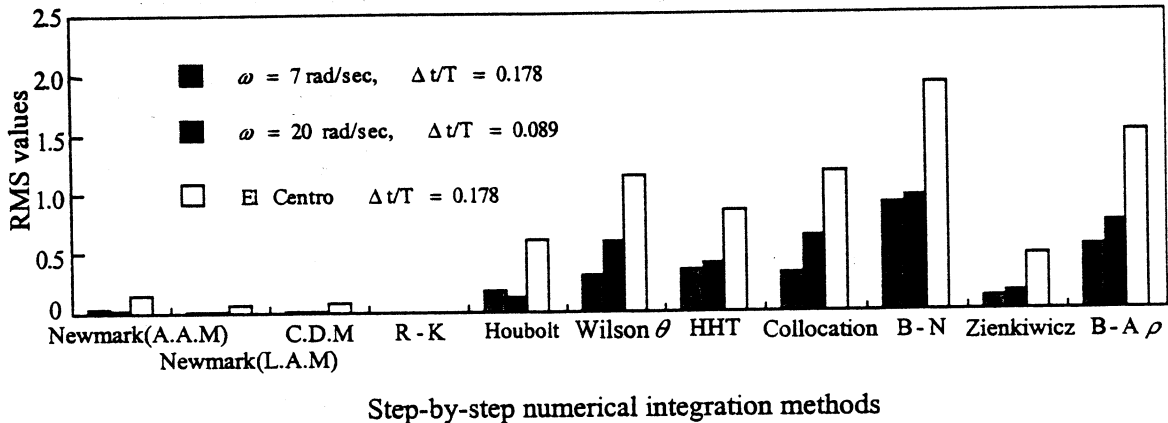


그림 5. Comparison of RMS errors of step-by-step integration method

## 5. 결론

여러 가지 직접적분법에 대한 안정성과 정확성 분석을 수행하였다. 4층 전단 건물의 수치예제를 각각의 방법으로 풀어 동적 해석을 하고 그 결과를 정확해와 비교하였다.

이론적, 수치적 해석을 통해 얻어진 결론은 다음과 같다.

- 1) Newmark Method, Central Difference Method, Runge-Kutta Method 는 다른 방법들에 비해 매우 정확한 결과를 보였다. 이 방법을 사용하여 동적 해석을 할 때  $\Delta t/T$  가 0.15 보다 작은 경우에는 거의 오차 없이 동적 해석을 수행할 수 있다.
- 2) Houbolt Method, Zienkiwicz Method 는 비교적 좋은 결과를 보였고  $\Delta t/T$  가 0.15 보다 작은 경우에 이 방법을 사용할 때는 대부분의 경우 좋은 결과를 얻을 수 있다.
- 3) Wilson  $\theta$  Method, Hilber-Hughes-Taylor  $\alpha$  Method, Collocation Method, Bozzak-Newmark Method, Bazzi-Anderheggen  $\rho$  Method 는 안정성과 정확성 분석에서 좋은 결과를 보였지만 동적 해석 결과에는 약간의 오차를 포함하였다. 따라서 이러한 방법을 사용할 때에는  $\Delta t/T$  가 충분히 작다고 하더라도 신중하게 매 계변수의 값을 선택하여야 한다.

## 참고문헌

- [1] Newmark, N. M. (1959). "A method of computational for structural dynamics." *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, 8, 67-94.
- [2] Wilson, E. L., Farhoomand, I. and Bathe, K. J. (1973). "Nonlinear dynamics analysis of complex structures." *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1, 241-252.
- [3] Wood, W. L., Bozzak, M. and Zienkiewicz, O. C. (1980). "An alpha modification of Newmark's method." *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 15, 1562-1566.
- [4] Zienkiewicz, O. C., Wood, W. L. and Taylor, R. L. (1980). "An alternative single step algorithm for dynamics problems." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 8, 31-40.
- [5] Bazzi, G. and Anderheggen, E. (1982). "The  $\rho$ -family of algorithms for time step integration with improved numerical dissipation." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10, 537-550.
- [6] Bathe, K. J. (1996). "Finite Element Procedures," *Prentice Hall*.
- [7] Hughes, T. J. R. (1987). "The Finite Element Method," *Prentice Hall*.
- [8] Craig R. R. Jr. (1981). "Structural Dynamics," *John Wiley & Sons*.