

주파수 분석을 이용한 케이블의 장력 측정 Cable Tension Evaluation by Frequency Analysis

○ 김 기 영*, 고 만 기**, 이 인 원***

1. 서론

현대 토목공학분야에서 케이블 구조물은 현수교, 사장교 등 장대형 교량에서 빼놓을 수 없는 중요한 형태의 구조물로 자리잡았다. 이에 따라 케이블의 중요성이 부각되면서 Irvine[1]과 Triantafyllou[2], Yu[3], Russel[4], Warnitcahi[5], Bedford[6], Behbahani-Nejad[7] 등에 의하여 1970년대 이후로 케이블 구조물에 대한 연구가 지속적으로 이루어지게 된다. 그러나 현재까지 케이블에 대한 연구는 가장 단순화된 케이블의 경우에 국한되는 경우가 많으며, 실제 현장에서 적용할 수 있는 케이블에 대한 연구는 극히 미비한 실정이다. 대부분의 연구가 경사각을 가지고 있는 케이블의 경우 좌표축을 케이블 양단의 연장선을 기준으로 하였기 때문에 실제적인 관점과 많은 차이를 보이며, 특히 장력을 구하는 문제에 있어서 케이블의 진동에 의한 부가장력을 고려하지 않는 경우가 많았다. 본 논문에서는 케이블의 동적 특성중의 하나인 주파수를 분석하여 케이블의 장력을 측정하는 방법을 제시하였고, 특히 실제 대부분의 케이블에서 고려되는 경사각과 그에 합당한 좌표축, 그리고 케이블의 진동에 의한 부가장력을 고려하여 식을 구성하고 케이블의 장력을 산출하였다.

2. 이론적 배경

2-1. 정적 케이블 해석

케이블의 휨강성을 무시한다는 가정하에, 그림 1과 같은 케이블에서의 정적 방정식은 식(1)과 같은 형태로 유도된다.

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = mg \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (1)$$

여기서 T 는 케이블의 장력, H 는 장력의 수평방향 성분, mg 는 케이블의 단위길이당 하중을 나타낸다.

식(1)의 정확해는 식(2)와 같으나, 식(2)의 형태가 실제 적용하기 힘들 정도로 복잡하기 때문에, 케이블의 처짐이 매우 작다는 가정하에 Taylor 급수를 이용하여 Hyperbolic cosine 함수의 근사 과정을 거치면 식(3)과 같은 케이블의 정적 변위식을 구할 수 있다.

$$y = \frac{H}{mg} \cosh \left(\frac{mg}{H} x + \cosh^{-1} \zeta - \cosh^{-1} \eta \right) - \cosh \left(\cosh^{-1} \zeta - \cosh^{-1} \eta \right) \quad (2)$$

여기서,

$$\zeta = \frac{mgL \tan \theta / H}{\sqrt{2 - 2 \cosh(mgL/H)}}, \quad \eta = \frac{\cosh(mgL/H) - 1}{H \sqrt{2 - 2 \cosh(mgL/H)}}$$

$$y(x) = \frac{mg}{2H} x(x-L) + x \tan \theta \quad (3)$$

따라서 케이블의 길이는 식(4)와 같이 나타낼 수 있으며, 식(4)를 이용하여 x 에 따라 변하는 케이블의 장력을 식(5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\tan \theta + \frac{mgx}{H} - \frac{mgL}{2H} \right)^2} dx \quad (4)$$

$$T(x) = H \sqrt{1 + \left(\tan \theta + \frac{mgx}{H} - \frac{mgL}{2H} \right)^2} \quad (5)$$

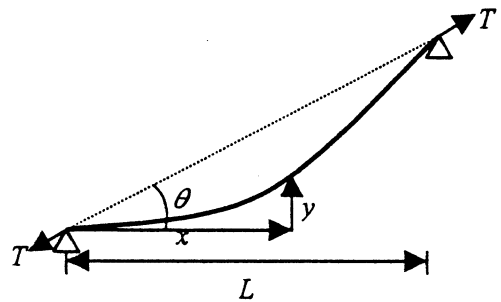


그림 1. 케이블의 개략도

* 한국과학기술원 토목공학과 석사과정
** 정회원. 공주대학교 토목공학과 교수
*** 정회원. 한국과학기술원 토목공학과 교수

2-2. 동적 케이블 해석

그림 1 과 같은 케이블에서 y 방향의 평형방정식을 이용하여 구성된 동적방정식은 식(6)과 같다.

$$H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + h \frac{d^2 y}{dx^2} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{ds}{dx} \quad (6)$$

여기서 v 는 동적거동에 의한 케이블의 수직방향 변위이며, h 는 동적변위에 의해 추가되는 케이블의 부가장력이며, s 는 케이블을 따라가는 Lagrangian 좌표로서 식(7)과 같은 관계가 있다.

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (7)$$

식(6)에 식(1)과 식(4)를 대입하고 케이블의 처짐이 매우 작다고 가정하여($H \gg mg$) 식을 단순화하면 식(8)을 얻는다.

$$H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + h \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{m}{\cos \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (8)$$

식(3)을 미분하여 y 를 소거하고 식(9)와 같은 형태로 변수분리를 취하면 식(10)과 같은 x 에 관한 미분방정식이 얻어진다.

$$v(x, t) = \bar{v}(x) e^{j\omega t} \quad (9)$$

$$h(t) = \bar{h} e^{j\omega t}$$

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{H \cos \theta} \bar{v} = -\frac{mg}{H^2} \bar{h} \quad (10)$$

식(10)은 처짐이 매우 작아서 무시할 수 있는 케이블의 일반적인 운동방정식이며, 케이블의 모드는 부가장력이 존재하는 대칭모드(symmetric modes)와 부가장력이 존재하지 않는 역대칭모드(anti-symmetric mode)로 구분되기 때문에, 부가장력을 무시하지 않는다면 두 모드를 따로 분석해야 한다.

2-2.1. 역대칭모드(anti-symmetric mode)

역대칭모드의 경우 부가장력이 존재하지 않으므로 식(9)의 우변이 생략되어 식(11)과 같은 형태가 된다.

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{H \cos \theta} \bar{v} = 0 \quad (11)$$

식(11)에 양단 힌지 및 케이블 중앙에서의 영변위(zero displacement)의 조건을 적용하면 식(12)를 얻는다.

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{L} \sqrt{\frac{H \cos \theta}{m}} \quad (12)$$

2-2.2. 대칭모드(symmetric mode)

대칭모드의 경우 부가장력이 존재하므로 식(10)을 사용하여 그 근을 구하게 되며, 식(10)에 양단 힌지의 조건을 적용함으로써 homogenous solution 및 particular solution 을 구하여 식(13)과 같은 해를 얻는다.

$$\bar{v}(x) = -\frac{g\bar{h} \cos \theta}{H\omega^2} \left[1 - \cos \left(ax \sqrt{\frac{m}{H \cos \theta}} \right) - \tan \left(\frac{\omega L}{2} \sqrt{\frac{m}{H \cos \theta}} \right) \sin \left(ax \sqrt{\frac{m}{H \cos \theta}} \right) \right] \quad (13)$$

부가장력을 소거하기 위해 변형률-변위 관계와 Hooke의 법칙을 이용하면 식(14)를 유도할 수 있으며, 이식에 식(13)을 적용하면 식(15)를 얻을 수 있다.

$$\frac{\bar{h}}{EA} \int_0^L \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 dx = \frac{mg}{H} \int_0^L \bar{v} ds \quad (14)$$

$$\tan \frac{\Omega}{2} = \frac{\Omega}{2} - \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\Omega}{2} \right)^3 \quad (15)$$

여기서,

$$\Omega = \omega L \sqrt{\frac{m}{H \cos \theta}} \quad (16)$$

$$\lambda^2 = \frac{EA m^2 g^2 L^3}{4H^3} \quad (17)$$

3. 케이블의 장력식

역대칭모드의 경우 식(12)를 변형함으로써 식(18)과 같이 장력의 수평성분 H 를 쉽게 구할 수 있다.

$$H = \frac{m\omega_n^2 L^2}{4n^2\pi^2 \cos\theta} \quad (18)$$

그러나 식(15)를 사용하는 대칭모드인 경우에는, 비선형이며 불연속함수인 tangent 함수 때문에 초기값 설정에 따라 iteration의 결과치가 달라지는 현상이 발생한다. 그러므로 iteration을 배제하기 위한 방법으로서, 식(15)의 좌변과 우변의 교차점을 장력값 근처에서 수치적으로 찾는 방법으로 대칭 모드의 경우 장력을 산출해 낼 수 있다.

4. 수치예제: 단순 지지된 케이블

본 논문에서는 Zui[9]가 실험적으로 케이블의 장력을 연구하기 위해 실제 케이블을 유한요소 모델링하여 얻은 수치를 사용하여 수치예제를 수행하였다. 이 실험에서 사용한 케이블의 주요 물성치는, $L = 301.9\text{m}$, $EA = 4.007 \times 10^5 \text{ kN}$, $mg = 1.028 \text{ kN/m}$, $\theta = 0^\circ$ 이며, 장력과 그에 따른 모드는 표 1과 같다.

표 1. 케이블 장력식 검증을 위한 주파수

$T(\text{kN})$	$\omega_1(\text{Hz})$	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
3000.0	0.56	0.84	1.12	1.41	1.69

ω_1 , ω_3 , ω_5 는 역대칭 모드이므로 식(18)에 의해 간단히 그 장력값을 구할 수 있지만, 대칭모드인 ω_2 , ω_4 는 수치적인 접근이 필요하게 된다. 따라서 식(15)의 좌변과 우변의 H값에 따른 차이를 도시하여 그 값이 0이 되는 지점을 장력으로 산출할 수 있는데, 이와 같은 방법으로 도시한 그래프가 그림 2, 그림 3이다. 두 그래프 모두 3000kN 근방에서 가로축과 교차하고 있으며, 비교적 확연하고 정확한 결과를 보여주고 있다.

표 2에서는 식(18)과 표 1의 고유진동수를 사용하여 구한 장력의 수평방향 분력 H의 값을 나타내고 있다.

표 2. 식(15), (18)으로부터 구한 케이블의 장력, T_n : n 번째 고유진동수로부터 구한 장력값

T_1	2995.2
T_2	2990.8
T_3	2995.0
T_4	3037.4
T_5	3031.0
Average	3004.65
Error(%)	0.57

또한 식(5)로부터 x축에 대해 변하는 장력의 값을 계산할 수 있는데, 그림 4에서는 식(5)를 이용하여 케이블의 각 부분마다 다른 장력의 값을 보여준다.

5. 결론

본 논문에서는 경사각과 대칭모드에서 존재하는 부가장력을 고려하여 주파수 해석을 통하여 케이블의 장력을 산출해 낼 수 있는 방법을 제안하였다. 실제상황과 부합되는 좌표축을 사용하여 케이블의 정적처짐형상 및 동적거동을 보다 실제적으로 나타낼 수 있었고, 부가장력의 유무라는 차이점을 보이는 대칭모드와 역대칭모드를 구분하여 식을 전개함으로써 장력측정에 부가장력을 고려할 수 있도록 하였다. 더불어 경사각을 도입함으로써 실제 장대 교량의 케이블에 직접 적용할 수 있도록 하였다. 수치예제를 통해 장력을 검증하고자 하는 실제 케이블 부재에도 비교적 정확한 값을 보여줌을

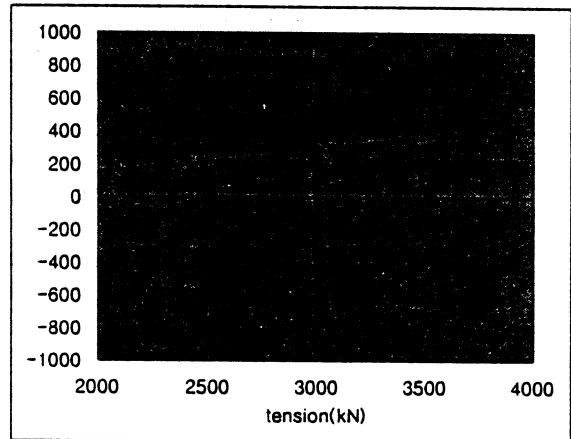


그림 2. 두번째 모드에서 산출되는 장력

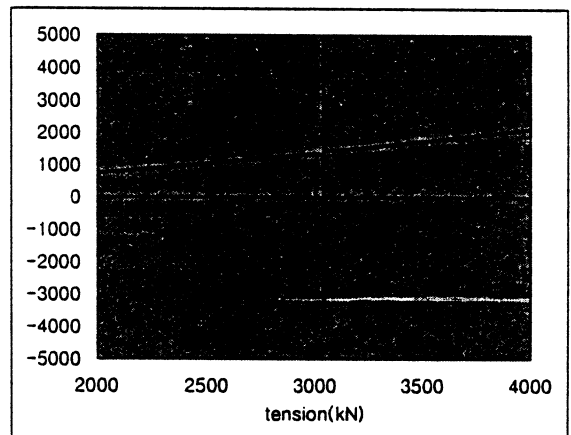


그림 3. 네번째 모드에서의 산출되는 장력

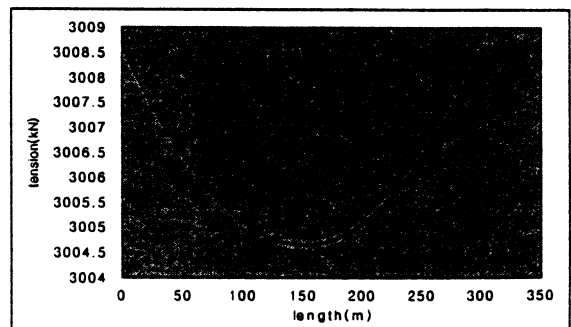


그림 4. 케이블 각 부분에서의 장력

알 수 있었으며, 식(14)는 최소한의 가정사항만을 취한 광범위한 조건의 케이블을 포함하기 때문에 일반적인 형상을 가진 케이블의 분석에도 유용할 것이다.

참고문헌

- [1] Irvine, H.M. (1981). *Cable Structures*, MIT Press, Cambridge, Mass.
- [2] Triantafyllou, M.S., and Grinfolgel, L. (1986). "Natural Frequencies and Modes of Inclined Cables." *ASCE Journal of Structural Division*, 112(1), 139-148.
- [3] Yu, Z., Xu, Y.L. (1998). "Mitigation of Three-Dimensional Vibration of Inclined Sag Cable Using Discrete Oil Dampers – I. Formulation." *Journal of Sound and Vibration*, 214(4), 659-673.
- [4] Russel, J.C., Lardner, T.J. (1997). "Experimental Determination of Frequencies and Tension for Elastic Cables." *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 124(10), 1067-1072.
- [5] Warnitchai, P., Fujino, Y., Susumpow, T. (1995). "A Non-Linear Dynamic Model For Cables and Its Application to a Cable Structure System." *Journal of Sound and Vibration*, 187(4), 695-712.
- [6] Bedford, A., Drumheller, D.S. (1996). *Elastic Wave Propagation*. John Wiley and Sons.
- [7] Behbahani-Nejad, M., Perkins, N.C. (1996). "Freely Propagating Waves in Elastic Cables." *Journal of Sound and Vibration*, 196(2), 189-202.
- [8] Benedettini, F., Rega, G., Alaggio, R. (1995) "Non-linear Oscillations of a Four-Degree-of-Freedom Model of a Suspended Cable under Multiple Internal Resonance Conditions." *Journal of Sound and Vibration*, Vol.182, No.5, pp.775-798.
- [9] Hiroshi Zui, Tohru Shinke and Yoshio Namita (1996). "Practical Formulas for Estimation of Cable Tension Vibration Method." *ASCE Journal of Structural Engineering*, 122(6), 651-656.