

# 고유진동수와 모드의 개선된 민감도 기법

## Improved Sensitivity Method for Natural frequency and Mode Shape

조흥기\*    박선규\*\*    이인원\*\*\*

### 1. 서론

시스템의 거동은 고유치 문제의 해, 즉 고유진동수와 모드를 구함으로써 완전히 결정된다. 이러한 고유치 문제의 해는 시스템의 설계변수가 변함에 따라 변하게 되고, 따라서 시스템의 동응답 특성도 변하게 된다. 그래서 고유쌍의 미분값들은 동응답의 민감도를 결정할때 유용할 뿐만 아니라, 최적화 설계경향 연구나 실제 시스템 거동에 대한 직관을 얻는데 있어서도 대단히 유용하다.

1975년에 Rudisill과 Chu<sup>(1),(2)</sup>가 고유치와 모드의 미분을 쉽게 구할 수 있는 대수적인 방법을 제안했다. 하지만 이 방법은 계수행렬이 비대칭이어서 계산 시간이 많이 걸릴 뿐 아니라 서로 다른 고유치의 경우에 국한되어 있는 방법이다. 1976년에 Nelson<sup>(3)</sup>은 특이해와 비특이해의 합으로 모드의 미분을 구할 수 있는 알고리즘을 제안했다. 이 방법은 매우 효율적이긴 하지만 알고리즘이 복잡하고 역시 중복근을 갖는 시스템의 경우 적용이 어렵다. Nelson의 방법을 중복근의 경우까지 확장한 Ojalvo<sup>(4),(5)</sup>방법이 있고, 이를 개선한 Mills-Curren<sup>(6)</sup>방법과 Dailey<sup>(7)</sup>방법이 있는데, 이들은 Nelson방법에 기초한 것이어서 알고리즘이 역시 복잡하다. 1997년에 Lee와 Jung<sup>(8),(9)</sup>은 획기적인 알고리즘을 제안했다. 부가조건을 이용해 고유치와 고유모드의 미분을 구하는 방법으로 대단히 간단한 알고리즘을 가지며, 계수행렬이 대칭을 띠고 있어 계산 시간 및 연산회수에 있어 매우 효율적이다. 중복근을 가지는 경우에도 쉽게 적용이 되며 수치적인 안정성까지 증명된 방법이다. 이를 1999년에 Lee et al.<sup>(10),(11)</sup>이 감쇠 시스템까지 확장시켰다.

제안방법은 감쇠 시스템이 서로 다른 고유치를 가지는 경우 있어 Lee et al.<sup>(10),(11)</sup>의 개선된 방법이다. 감쇠 시스템의 경우 Lee et al.<sup>(10),(11)</sup>는 고유치의 미분과 고유모드의 미분을 두개의 식을 이용해 따로 구했으나, 본 방법에서는 이를 동시에 구할 수 있는 알고리즘을 이용함으로써 계산 시간 및 연산 회수를 줄일 수 있다. 물론 Lee et al.의 방법이 가지는 장점은 유지한다.

2장에서는 Lee et al.<sup>(10),(11)</sup>의 민감도 기법을 보이고 3장에서 이 방법을 개선한 제안방법을 보인다. 4장에서는 예제를 통해 제안방법의 효율성을 보인다.

### 2. Lee et al.<sup>(10),(11)</sup>의 민감도 기법

이 방법은 상태공간방정식(state-space-equation)을 이용해 감쇠를 처리하여 고유쌍의 미분을 구하는 방법이다. 감쇠를 고려한 경우 고유문제는 다음과 같다.

$$(\lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K}) \phi_j = 0 \quad (1)$$

감쇠 시스템의 고유치와 고유모드를 구하기 위해선 다음의 상태공간방정식을 구성한다.

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_j \\ \lambda_j \phi_j \end{Bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_j \\ \lambda_j \phi_j \end{Bmatrix} \quad (2)$$

이 경우의 고유모드는 다음과 같이 정규화한다.

$$\begin{Bmatrix} \phi_j \\ \lambda_j \phi_j \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_j \\ \lambda_j \phi_j \end{Bmatrix} = \phi_j^T (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \phi_j = 1 \quad (3)$$

우선 고유치의 미분을 구하기 위해 식(1)를 미분하면,

$$(\lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K}) \frac{\partial \phi_j}{\partial p} = -(2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \phi_j \frac{\partial \lambda_j}{\partial p} - \left( \lambda_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \phi_j \quad (4)$$

\* 한국과학기술원 토목공학과 석사과정

\*\* 성균관대학교 토목공학과 교수

\*\*\* 정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 교수

양변에  $\phi_j^T$ 를 곱해 정리하면 다음과 같이 고유치의 미분이 구해진다.

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial p} = -\phi_j^T \left( \lambda_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \phi_j \quad (5)$$

고유 모드의 미분은 정규화 조건의 미분을 이용해 구한다. 식(3)을 미분하면 다음과 같다.

$$\phi_j^T (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \frac{\partial \phi_j}{\partial p} + \frac{1}{2} \phi_j^T \left[ 2 \left( \frac{\partial \lambda_j}{\partial p} \mathbf{M} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \right) + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} \right] \phi_j = 0 \quad (6)$$

식(4)와 식(6)을 합해서 선형대수방정식 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K} & (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \phi_j \\ \phi_j^T (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_j}{\partial p} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \phi_j \frac{\partial \lambda_j}{\partial p} - \left( \lambda_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \phi_j \\ -\frac{1}{2} \phi_j^T \left[ 2 \left( \frac{\partial \lambda_j}{\partial p} \mathbf{M} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \right) + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} \right] \phi_j \end{Bmatrix} \quad (7)$$

이렇게 식(5)과 식(7)을 통해 고유치와 고유모드의 미분을 구한다.

이 방법은 Lee & Jung<sup>(8),(9)</sup>의 장점은 모두 유지 하면서 감쇠 시스템으로 확장한 경우이다. 물론 중복근의 경우에도 Lee & Jung<sup>(8),(9)</sup>와 같이 근접 모드를 이용해 적용할 수 있다.

### 3. 제안방법

제안방법은 시스템이 서로 다른 고유치를 가지는 경우, 감쇠를 고려한 Lee et al.<sup>(10),(11)</sup>의 개선된 방법이다. 전 방법에서는 고유치의 미분을 고유모드의 미분과 분리해서 따로 계산하였으나 제안방법은 이를 동시에 계산함으로써 연산횟수 및 계산 시간을 줄일 수 있는 방법이다. 물론 Lee et al.<sup>(10),(11)</sup>가 가지는 장점은 그대로 유지한다. 감쇠 시스템의 고유문제 식(1)과 정규화 조건 식(3)를 다시 써보면 다음과 같다.

$$(\lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K}) \phi_j = 0 \quad (8)$$

$$\phi_j^T (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \phi_j = 1 \quad (9)$$

고유문제 식(8)를 설계변수에 대해 미분한 후 재정리하면,

$$(\lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K}) \frac{\partial \phi_j}{\partial p} + (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \phi_j \frac{\partial \lambda_j}{\partial p} = - \left( \lambda_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \phi_j \quad (10)$$

정규화 조건 식(9)을 설계변수에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\phi_j^T (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \frac{\partial \phi_j}{\partial p} + \phi_j^T \mathbf{M} \phi_j \frac{\partial \lambda_j}{\partial p} = -\frac{1}{2} \phi_j^T \left( 2\lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} \right) \phi_j \quad (11)$$

이 두식을 합해서 선형대수방정식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K} & (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \phi_j \\ \phi_j^T (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) & \phi_j^T \mathbf{M} \phi_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_j}{\partial p} \\ \frac{\partial \lambda_j}{\partial p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \left( \lambda_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \phi_j \\ -\frac{1}{2} \phi_j^T \left( 2\lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} \right) \phi_j \end{Bmatrix} \quad (12)$$

이 식이 제안방법의 핵심이다. 전 방법<sup>(10),(11)</sup>에서는 고유문제를 미분한 식(4)의 양변에  $\phi_j^T$ 를 곱함으로써  $\frac{\partial \lambda_j}{\partial p}$ 를 따

로 구했으나 본 방법에서는 식(4)을 다시 정리해서 그대로 사용해,  $\frac{\partial \lambda_j}{\partial p}$ 와  $\frac{\partial \phi_j}{\partial p}$ 를 동시에 구한다.

#### 4. 수치예제

제안방법의 효율성을 증명하기 위하여 서로다른 고유치의 경우의 시스템 예로 36개의 삼각형 요소를 가지고 자유도 72인 평판예제를 고려하자. 이 예제를 통해 제안방법을 감쇠시스템의 경우 기존 Lee et al.<sup>(10)</sup>의 방법과 비교하고자 한다. 해석에 사용한 컴퓨터는 RAM 40Mega, CPU capacity 120Hz를 가지는 펜티엄 120이다.

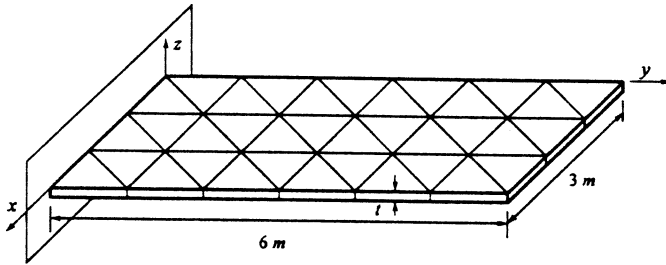


Fig. 1. Cantilever plate with the thickness  $t$  design parameter

평판은 28개의 절점을 가지고 절점당 3자유도( $y$ -변위,  $z$ -변위,  $x$ -각변위)를 가진다. 탄성계수는  $10.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 이고, 밀도는  $5.88 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ , Poisson비는 0.3이다. 설계변수는 평판의 두께  $t$ 이다. 감쇠행렬은 다음과 같이 Rayleigh damping으로 가정한다.

$$C = \alpha K + \beta M \quad (13)$$

여기서  $\alpha = \beta = 0.01$ 로 가정하겠다. 평판의 강성행렬과 질량행렬은 각각  $t^3$ 과  $t$ 에 비례하므로  $t$ 에 대해 미분함으로써  $\frac{\partial M}{\partial t}$ 와  $\frac{\partial K}{\partial t}$ 를 구할 수 있다.

제안방법과 Lee et al.<sup>(10)</sup>에 의한 결과 일부를 표1과 표2에서 나타내었고, 표3에서 계산시간을 비교하였다. 표 3에서 계산시간의 경우 각 10회의 측정을 평균한 것이며, Total CPU time에 대해 Lee et al.의 경우 표준편차 0.091초, 제안방법의 경우 표준편차 0.084초 이다.

Table 1. The lowest twenty eigenvalue and their derivatives

Mode number	Eigenvalue	Eigenvalue derivative (Lee&Jung's method)	Eigenvalue derivative (Proposed method)
1,2	$-0.015j \pm 5.453$	$-2.973j \pm 545.3$	$-2.973j \pm 545.3$
3,4	$-0.236j \pm 21.73$	$-47.24j \pm 2173$	$-47.24j \pm 2173$
5,6	$-0.548j \pm 33.09$	$-109.5j \pm 3308$	$-109.5j \pm 3308$
7,8	$-2.345j \pm 68.44$	$-468.9j \pm 6836$	$-468.9j \pm 6836$
9,10	$-4.268j \pm 92.29$	$-853.5j \pm 9209$	$-853.5j \pm 9209$
11,12	$-7.023j \pm 118.3$	$-1405j \pm 11790$	$-1405j \pm 11790$
13,14	$-8.693j \pm 131.6$	$-1738j \pm 13100$	$-1738j \pm 13100$
15,16	$-11.87j \pm 153.6$	$-2373j \pm 15270$	$-2373j \pm 15270$
17,18	$-15.69j \pm 176.4$	$-3138j \pm 17500$	$-3138j \pm 17500$
19,20	$-21.96j \pm 208.4$	$-4392j \pm 20610$	$-4392j \pm 20610$

Table 2. Some componests of the first eigenvector and its derivatives

Eqn. number	Eigenvector	Eigenvector derivative (Lee&Jung's method)	Eigenvector derivative (Proposed method)
1	$-0.738-j0.738$	$73.80+j73.80$	$73.80+j73.80$
2	$-1.498-j1.498$	$149.8+j149.8$	$149.8+j149.8$
3	$0.273+j0.273$	$-27.36-j27.36$	$-27.36-j27.36$
4	$-0.855-j0.855$	$85.54+j85.54$	$85.54+j85.54$
5	$-1.581-j1.581$	$158.1+j158.1$	$158.1+j158.1$
:			
69	$-0.074-j0.074$	$7.399+j7.399$	$7.399+j7.399$
70	$-18.67-j18.67$	$1867+j1867$	$1867+j1867$
71	$-44.72-j44.72$	$447.2+j447.2$	$447.2+j447.2$
72	$-0.122-j0.122$	$12.23+j12.23$	$12.23+j12.23$

결과를 보면 일단 둘다 정확한 값을 가진다. 계산 시간을 보면, 20개의 고유쌍 미분을 구하는데 걸린 시간은 Lee et al.의 경우 6.26초 제안방법은 5.32초, 약 15%의 계산시간 절감 효과를 가져온다. 이는 표3에서 보다시피 고유치의 미분을 계산하는데 걸린시간이 절약된 결과이다.

#### 5. 결론

본 논문에서는 부가조건을 이용해 고유치와 고유모드의 미분을 대수적으로 구하는 Lee et al.<sup>(10)</sup>을 개선한 식을 제안하였다. 제안방법에서는 Lee et al.<sup>(10)</sup>와는 달리 고유치와 고유모드의 미분을 동시에 계산함으로써 계산시간을 현저하게 줄일 수 있다. 물론 전 방법이 가지는 정확해, 수치적 안정성, 계수행렬의 대칭성등의 장점은 모두 유지한다.

Table 3. CPU time spent on the calculation of the first twenty eigenpair derivatives

Method	Operations	CPUtime (sec)
Lee & Jung's method	$\frac{\partial \lambda_j}{\partial p} = -\phi_j^T \left( \lambda_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \phi_j$	0.95
	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K} & (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \phi_j \\ \phi_j^T (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) & 0 \end{bmatrix}$	1.71
	$f_j = \begin{pmatrix} -(2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \phi_j \frac{\partial \lambda_j}{\partial p} - \left( \lambda_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \phi_j \\ -\frac{1}{2} \phi_j^T \left[ 2 \left( \frac{\partial \lambda_j}{\partial p} \mathbf{M} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \right) + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} \right] \phi_j \end{pmatrix}$	1.32
	$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_j}{\partial p} \\ 0 \end{pmatrix} = [\mathbf{A}]^{-1} f_j$	2.28
	Total	6.26
Proposed method	$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K} & (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \phi_j \\ \phi_j^T (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) & \phi_j^T \mathbf{M} \phi_j \end{bmatrix}$	1.73
	$f_j^* = \begin{pmatrix} -\left( \lambda_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \phi_j \\ -\frac{1}{2} \phi_j^T \left( 2\lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} \right) \phi_j \end{pmatrix}$	1.31
	$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_j}{\partial p} \\ \frac{\partial \lambda_j}{\partial p} \end{pmatrix} = [\mathbf{A}^*]^{-1} f_j^*$	2.28
	Total	5.32

### 감사의 글

본 연구는 국가지정연구실 연구과제 중 '첨단 진동제어 기법을 이용한 구조물의 내진제어'에 대한 연구비 지원으로 수행된 것으로 연구비 지원에 감사드립니다.

### 참고문헌

1. C. S. Rudisill 1974 *AIAA Journal* 12, 721-722. Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors for a General Matrix.
2. C. S. Rudisill and Y. Chu 1975 *AIAA Journal* 13, 834-837. Numerical Methods for Evaluating the Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors.
3. R. B. Nelson 1976 *AIAA Journal* 14, 1201-1205. Simplified Calculations of Eigenvector Derivatives.
4. I. U. Ojalvo 1987 *AIAA Journal* 25 1386-1390. Efficient Computation of Mode-Shape Derivatives for Large Dynamic Systems.
5. I. U. Ojalvo 1988 *AIAA Journal* 26 361-366. Efficient Computation of Modal Sensitivities for Systems with Repeated Frequencies.
6. W. C. Mills-Curran 1988 *AIAA Journal* 26 867-881. Calculation of Derivatives for Structures with Repeated Eigenvalues.
7. R. L. Dailey 1989 *AIAA Journal* 27, 486-491. Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues.
8. I. W. Lee and G. H. Jung 1997 *Computers and Structures* 62(3), 429-435. An Efficient Algebraic Method for Computation of Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities: Part I, Distinct Natural Frequencies.
9. I. W. Lee and G. H. Jung 1997 *Computers and Structures* 62(3), 437-443. An Efficient Algebraic Method for Computation of Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities: Part II, Multiple Natural Frequencies.
10. I. W. Lee and D. O. Kim 1999 *Journal of Sound and Vibration* 223(3), 399-412. Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities of Damped System : Part I, Distinct Natural Frequencies.
11. I. W. Lee and D. O. Kim 1999 *Journal of Sound and Vibration* 223(3), 413-424. Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities of Damped System : Part II, Multiple Natural Frequencies.