

비대칭 감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 미분을 구하기 위한 모드법의 개선

Modified Modal Method for Calculating Eigenpair Sensitivity of Asymmetric Damped System

문영종¹⁾

조흥기²⁾

박선규³⁾

이인원⁴⁾

Moon, Yeong-Jong Jo, Hong-Ki Park, Sun-Kyu Lee, In-Won

요약: 본 논문에서는 비대칭 감쇠 시스템의 민감도를 해석하는데 있어서 기존의 모드법을 개선시켜 모든 모드를 사용하지 않고 저차의 소수의 모드만을 사용하여 모드의 미분값을 구하고자 한다. 비대칭 감쇠 시스템의 고유치와 고유벡터의 값이 복소수로 나오는 것은 물론 고유벡터의 경우 왼쪽 고유벡터와 오른쪽 고유벡터가 존재하게 된다. 이런 경우에 있어서 왼쪽 고유벡터와 오른쪽 고유벡터의 미분값을 모두 구해야 된다. 이런 고유벡터의 미분값을 구하기 위해 모드법을 사용하면 모든 고유벡터의 값을 알고 있어야 하지만 실제 구조물에 있어서는 저차의 소수의 고유벡터만을 구하는 것이 가능하다. 그래서 저차의 소수의 고유벡터만을 이용하여 미분값을 구하는 방법이 요구된다.

Abstract: In general, the damping matrix of a system can not be simultaneously diagonalized with the mass and the stiffness matrices by any linear transformation. So the eigenvalues, eigenvectors and consequently their derivatives become complex. To determine the derivatives of the eigenpairs in this case, a modal method is recently developed by Friswell. When a dynamic system has many degrees of freedom, only a few lower modes are available, and because the higher modes are truncated in his method, the errors may become significant. In this paper a procedure for determining the sensitivities of the eigenpairs of asymmetric damped system using only a few modes is proposed. Numerical examples show that proposed method achieves better accuracy even if only a few modes are used.

핵심용어: 민감도, 비대칭 감쇠 시스템, 고유쌍, 모드법

keyword: Sensitivity, Asymmetric Damped System, Eigenpair, Modal Method

-
- 1) 한국과학기술원 토목공학과 석사과정
 - 2) (주)서영기술단 구조부 사원
 - 3) 성균관대학교 토목공학과 교수
 - 4) 한국과학기술원 토목공학과 교수, 정회원

1. 서론

기존의 비대칭 감쇠시스템의 민감도를 해석하는 방법으로서 Friswell의 모드법⁽¹⁾이 있다. 이 방법은 고유벡터의 미분값을 구하기 위해서 모든 고유치와 고유벡터의 값이 필요하게 된다. 그러나 복잡한 시스템에 있어서 모든 고유치와 고유벡터를 구한다는 것은 불가능하므로 Friswell의 모드법을 그대로 사용하게 되면 구하지 못한 고유치 및 고유벡터 값들로 인해 상당히 큰 오차가 발생하게 된다. 따라서 본 논문에서는 기존의 대칭 감쇠 시스템에서 사용된 모드 가속도법과 슈프리트 가속도법⁽²⁾을 Friswell의 모드법에 적용하여 비대칭 감쇠 시스템에서 소수의 저차의 고유치와 고유벡터만을 가지고서 정확한 고유벡터의 미분값을 구하는 방법을 제안하였다.

2. Friswell의 모드법

N개의 자유도를 갖는 비대칭 감쇠 시스템의 일반적인 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Ku(t) = 0 \quad (1)$$

식 (1)은 다음과 같은 상태 공간 방정식으로 표현할 수 있다.

$$A\dot{x}(t) + Bx(t) = 0 \quad (2)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}, x(t) = \begin{Bmatrix} u(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} \text{이다.}$$

위의 식으로부터 다음과 같은 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$(sA + B)z = 0 \quad (3)$$

$$y^T(sA + B) = 0 \quad (4)$$

여기서 s는 고유치, z는 오른쪽 고유벡터 그리고 y는 왼쪽 고유벡터로서 $z = \begin{pmatrix} u \\ su \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} v \\ sv \end{pmatrix}$

이다.

고유벡터는 다음과 같은 두 개의 정규화 조건을 갖는다.

$$y_j^T A z_j = 2s_j, \quad (5)$$

$$\{u_j\}_{n_j} = \{v_j\}_{n_j}, \quad (6)$$

여기서 $\{*\}_j$ 는 벡터 n_j 의 j번째 요소를 의미하며 다음과 같은 식으로 결정된다.

$$\left| \{u_j\}_{n_j} \right| \left| \{v_j\}_{n_j} \right| = \max_n \left| \{u_j\}_n \right| \left| \{v_j\}_n \right| \quad (7)$$

고유치의 미분을 구하기 위해서 식 (3)을 임의의 설계변수에 대해 미분하고 정규화 조건을 사용하여 정리해 주면 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$s_{j,\alpha} = - \frac{v_j^T [s_j^2 M_{,\alpha} + s_j C_{,\alpha} + K_{,\alpha}] u_j}{v_j^T [2s_j M + C] u_j} \quad (8)$$

고유치의 미분은 위와 같이 쉽게 구할 수가 있지만 고유벡터의 미분은 Singular Matrix부분이 생기기 때문에 위와 같은 대수적인 방법으로는 구할 수가 없다. 그래서 다음과 같은 모드법이 Friswell에 의해 제안되었다. 우선 고유벡터의 미분값을 다음과 같은 형태로 확장시킬 수가 있다.

$$z_{j,\alpha} = \sum_{k=1}^{2N} a_{jk} z_k, \quad y_{j,\alpha} = \sum_{k=1}^{2N} b_{jk} y_k \quad (9)$$

식 (9)를 식 (3)의 미분식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$a_{jk} = - \frac{v_k^T [s_j^2 M_{,\alpha} + s_j C_{,\alpha} + K_{,\alpha}] u_j}{2s_k (s_j - s_k)} \quad (10)$$

$$b_{jk} = - \frac{v_j^T [s_j^2 M_{,\alpha} + s_j C_{,\alpha} + K_{,\alpha}] u_k}{2s_k (s_j - s_k)} \quad (11)$$

$$\forall k = 1, \Lambda, 2N; k \neq j, j+N$$

그리고 식 (5)와 식 (6)의 정규화 조건으로부터 다음과 식을 얻을 수 있다.

$$a_{jj} + b_{jj} = - \frac{1}{2s_j} v_j^T [2s_j M_{,\alpha} + C_{,\alpha}] u_j \quad (12)$$

$$b_{jj} - a_{jj} = \frac{1}{\{v_j\}_{n_j}} \sum_{k=1, k \neq j}^{2N} [a_{jk} \{u_k\}_{n_j} - b_{jk} \{v_k\}_{n_j}] \quad (13)$$

위의 식들로부터 고유벡터의 미분은 다음과 같은 식으로 정리된다.

$$u_{j,\alpha} = a_{jj} u_j + a_{j,j+N} u_j^* + \sum_{k=1, k \neq j}^N [a_{jk} u_k + a_{j,k+N} u_k^*] \quad (14)$$

$$v_{j,\alpha} = b_{jj} v_j + b_{j,j+N} v_j^* + \sum_{k=1, k \neq j}^N [b_{jk} v_k + b_{j,k+N} v_k^*] \quad (15)$$

3. 제안방법

3.1 Modal Acceleration Method

Friswell의 모드법이 N-space로 표현되었지만 수식의 복잡성을 피하기 위해 본 논문은 2N-space로 수식을 전개하였다.

식 (3)과 식 (4)에서와 같이 비대칭 감쇠 시스템의 고유치 문제는 다음과 같다.

$$(sA + B)z = 0$$

$$y^T (sA + B) = 0$$

식(3)을 임의의 설계변수에 대해 미분하여 정리하면,

$$(sA + B)z_\alpha = -(s_{,\alpha}A + sA_{,\alpha} + B_\alpha)z \quad (16)$$

$$(sA + B)z_\alpha = f \quad (17)$$

여기서,

$$f = -(s_{,\alpha}A + sA_{,\alpha} + B_\alpha)z \text{ 이다.}$$

모드 가속도법을 적용하기 위해 모드의 미분값을 다음과 같이 두 개의 부분으로 나눈다.

$$z_\alpha = d_{s0} + d_{d0} \quad (18)$$

여기서,

$$d_{s0} = B^{-1}f,$$

$$d_{d0} = (sA + B)^{-1}f - B^{-1}f$$

$$= Z \begin{bmatrix} \circ & & \\ & \frac{1}{2s_k(s-s_k^*)} \left(\frac{s}{s_k} \right) & \\ & & \circ \end{bmatrix} Y^T f \text{ 이고}$$

Z와 Y는 각각 오른쪽 고유벡터와 왼쪽 고유벡터로 이루어진 $2N \times 2N$ 행렬이다.

식 (18)을 전개하여 정리하면 다음과 같고 이 식을 이용하여 오른쪽 고유벡터의 미분을 구할 수 있다.

$$z_{j,\alpha} = \left\{ B^{-1} + \sum_{k=1, k \neq j}^N \left[\left(\frac{s_j}{s_k} \right) \frac{z_k y_k^T}{2s_k(s_j - s_k)} + \left(\frac{s_j}{s_k^*} \right) \frac{(z_k y_k^T)^*}{2s_k^*(s_j - s_k^*)} \right] + \left(\frac{s_j}{s_j^*} \right) \frac{(z_j y_j^T)^*}{2s_j^*(s_j - s_j^*)} \right\} f_j + a_{jj} z_j \quad (19)$$

이 식의 우변을 살펴보면 가속도 항 (s_j/s_k)이 발생함을 알 수 있고 이 값이 작아질수록 고유벡터 미분의 수렴속도는 빨라진다.

왼쪽 고유벡터의 미분도 오른쪽 고유벡터의 미분 값과 같은 방법으로 구할 수 있으며 그 결과는 다음과 같다.

$$y_{j,\alpha} = \left\{ (B^T)^{-1} + \sum_{k=1, k \neq j}^N \left[\left(\frac{s_j}{s_k} \right) \frac{y_k z_k^T}{2s_k(s_j - s_k)} + \left(\frac{s_j}{s_k^*} \right) \frac{(y_k z_k^T)^*}{2s_k^*(s_j - s_k^*)} \right] + \left(\frac{s_j}{s_j^*} \right) \frac{(y_j z_j^T)^*}{2s_j^*(s_j - s_j^*)} \right\} g_j^T + b_{jj} y_j \quad (20)$$

여기서 $g = -y^T (s_{,\alpha}A + sA_{,\alpha} + B_{,\alpha})$ 이다.

3.2 Multiple Modal Acceleration Method

모드 가속도법의 수렴속도를 증가시키기 위하여 기존의 수식 (18)에 약간의 변형을 하면 가속도 부분에 제곱을 하거나 그 이상의 지수를 첨가해 줄 수 있다.

모드 가속도법과 유사한 방법으로 모드의 미분값을 다음과 같이 두 개의 부분으로 나눈다.

$$z_\alpha = d_{s1} + d_{d1} \quad (21)$$

여기서

$$d_{s1} = B^{-1}[I - sAB^{-1}]f$$

$$d_{d1} = z_\alpha - d_{s1}$$

$$= Z \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \frac{1}{2s_k(s-s_k)} \left(\frac{s}{s_k}\right)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} Y^T f$$

이 식을 모드 가속도법과 같은 방법으로 전개해 주면 다음과 같다.

$$z_{j,\alpha} = \left\{ B^{-1} + \sum_{k=1, k \neq j}^N \left[\left(\frac{s_j}{s_k}\right)^2 \frac{z_k y_k^T}{2s_k(s_j-s_k)} + \left(\frac{s_j}{s_k^*}\right)^2 \frac{(z_k y_k^T)^*}{2s_k^*(s_j-s_k^*)} \right] + \left(\frac{s_j}{s_j^*}\right)^2 \frac{(z_j y_j^T)^*}{2s_j^*(s_j-s_j^*)} \right\} f_j + a_{jj} z_j \quad (22)$$

마찬가지 방법으로 M차의 지수에 관해 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$z_{j,\alpha} = \left\{ B^{-1} \sum_{m=0}^{M-1} (-s_j A B^{-1})^m + \sum_{k=1, k \neq j}^N \left[\left(\frac{s_j}{s_k}\right)^M \frac{z_k y_k^T}{2s_k(s_j-s_k)} + \left(\frac{s_j}{s_k^*}\right)^M \frac{(z_k y_k^T)^*}{2s_k^*(s_j-s_k^*)} \right] + \left(\frac{s_j}{s_j^*}\right)^M \frac{(z_j y_j^T)^*}{2s_j^*(s_j-s_j^*)} \right\} f_j + a_{jj} z_j \quad (23)$$

식 (23)의 우변을 살펴보면 가속도항이 $(s_j/s_k)^M$ 으로 되어 M값이 커지게 되면 수렴속도가 기존의 가속도법에 비하여 크게 증가함을 알 수 있다.

왼쪽 고유벡터의 미분에 관한 식도 같은 방법으로 유도할 수 있다.

3.3 Multiple Modal Accelerations with Shifted-Poles

Multiple Mode Acceleration Method에서 수렴속도는 M값을 매우 큰 수로 놓음으로서 증가시킬 수가 있다. 그러나 식의 첫 번째 부분 s_j/s_k 에서 $k=1$ 이고 $j>1$ 일 때 M값이 너무 크게 되면 수렴을 하지 않게 된다. 그래서 다음과 같이 Pole을 이동

시킴으로서 수렴속도를 증가시킬 수 있다.

$(s_j A + B)^{-1}$ 을 β 에 관해 Taylor 전개를 시키면 다음과 같다.

$$(s_j A + B)^{-1} = [(B + \beta A - (s_j - \beta)(-A))]^{-1} = (B + \beta A)^{-1} [I + (s_j - \beta)(B + \beta A)^{-1} A]^{-1} \quad (24)$$

$$= (B + \beta A)^{-1} \sum_{m=0}^{M-1} [-(s_j - \beta)A(B + \beta A)^{-1}]^m$$

이 식으로부터 같은 방법으로 오른쪽 고유벡터의 미분을 구하면 다음과 같다.

$$z_{j,\alpha} = ((B + \beta A)^{-1} \times \sum_{m=0}^{M-1} [-(s_j - \beta)A(B + \beta A)^{-1}]^m + \sum_{k=1, k \neq j}^N \left[\left(\frac{s_j - \beta}{s_k - \beta}\right)^M \frac{z_k y_k^T}{2s_k(s_j - s_k)} + \left(\frac{s_j - \beta}{s_k^* - \beta}\right)^M \frac{(z_k y_k^T)^*}{2s_k^*(s_j - s_k^*)} \right] + \left(\frac{s_j - \beta}{s_j^* - \beta}\right)^M \frac{(z_j y_j^T)^*}{2s_j^*(s_j - s_j^*)} \right\} f_j + a_{jj} z_j \quad (25)$$

마찬가지로 왼쪽 고유벡터의 미분에 관한 식도 쉽게 유도할 수 있다.

4. 수치예제

제안방법의 수렴성 및 효율성을 증명하기 위해 그림 1과 같은 비대칭 감쇠를 갖는 시스템⁽³⁾을 고려하자.

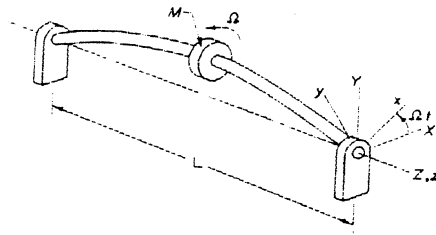


그림 1. 예제 구조물

위의 시스템의 물성치는 다음과 같다.

$$EI_y = 9L^3 / 5\pi^2 Nm^2, EI_x = 4L^3 / 5\pi^2 Nm^2$$

$$K_1 = K_2 = L^2 / 20Nm, \Omega = \sqrt{21.6\pi} \text{ rad } s^{-1}$$

$$c = h = 1/4 Nsm^{-1}$$

그림 1.의 시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{u} + (G+C)\dot{u} + (K+H)u = 0$$

여기서

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & G_{12} \\ -G_{12} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & H_{12} \\ -H_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

각각의 요소는 다음과 같이 주어진다.

$$[M_{11}]_{ij} = [M_{22}]_{ij} = m_0 L \delta_{ij} + 2M \sin(i\pi/2) \sin(j\pi/2)$$

$$[G_{12}]_y = -2\Omega [M_{11}]_y,$$

$$[C_{11}]_y = [C_{22}]_y = (c+h)L\delta_y$$

$$[K_{11}]_y = 2(K_1 + K_2 \cos(i\pi) \cos(j\pi)) (i\pi/L)(j\pi/L) + EI_x (i\pi/L)^2 (j\pi/L)^2 L \delta_y - \Omega^2 [M_{11}]_y$$

$$[H_{12}]_y = -h\Omega L \delta_y$$

$$[K_{22}]_y = 2(K_1 + K_2 \cos(i\pi) \cos(j\pi)) (i\pi/L)(j\pi/L) + EI_y (i\pi/L)^2 (j\pi/L)^2 L \delta_y - \Omega^2 [M_{11}]_y$$

우선 이 시스템의 고유치와 그 미분값은 표 1과 같다.

그리고 오른쪽 고유벡터와 왼쪽 고유벡터는 표 2 그리고 오른쪽 고유벡터의 미분값의 정해는 표 3과 같다. (첫 번째 모드)

제안방법의 결과를 비교하기 위해 6개의 모드중 4개의 모드만을 사용하여 정해와의 오차를 비교하여 표 4에 정리하였다.

(Shift value $\beta = \text{eigenvalue}-1$)

표 1. 예제 구조물의 고유치와 그 미분값

Mode Number	Eigenvalue	Eigenvalue Derivative
1	1.678e-2 +1.053e+1i	3.371e-3 +3.457e-1i
2	6.328e-2 +1.253e+1i	8.804e-3 +2.062e-1i
3	2.309e-1 +1.408e+1i	2.190e-2 +1.773e-2i
4	-2.664e-1 +1.512e+1i	-2.397e-2 -1.773e-2i
5	-1.133e-1 +1.667e+1i	-8.804e-3 -2.061e-1i
6	-5.904e-2 +1.867e+1i	-3.771e-3 -3.444e-1i

표 2. 오른쪽 고유벡터와 왼쪽 고유벡터

DOF Number	Right Eigenvector	Left Eigenvector
1	-4.138e-2 -5.596e-5i	4.138e-2 +5.596e-5i
2	0	0
3	-1.404e-1 +7.721e-4i	1.404e-1 -7.721e-4i
4	5.446e-5 -4.221e-2i	5.446e-5 -4.221e-2i
5	0	0
6	-7.804e-4 -1.433e-1i	-7.804e-4 -1.433e-1i

표 3. 오른쪽 고유벡터의 미분값

DOF Number	Eigenvector	Eigenvector Derivative
1	-4.138e-2 -5.596e-5i	7.416e-3 -4.927e-5i
2	0	0
3	-1.404e-1 +7.721e-4i	5.578e-3 +8.632e-5i
4	5.446e-5 -4.221e-2i	4.942e-5 +7.736e-3i
5	0	0
6	-7.804e-4 -1.433e-1i	-8.601e-5 +6.276e-3i

표 4. 제안방법의 오차 비교. (4개 모드 사용)

DOF Number	MA (%)	MMA (%)	Shifted Pole (%)
1	14.856	6.736	0.389
2	0.000	0.000	0.000
3	66.975	31.353	1.845
4	11.578	8.122	0.377
5	0.000	0.000	0.000
6	48.401	33.950	1.546

이 결과를 보면 MA, MMA의 결과는 상당한 오차를 포함하고 있는 반면 Shifted Pole Method를 사용하면 작은 오차를 포함하여 믿을수 있는 결과를 보여주는 것을 알 수 있다. 물론 여기서 얻은 MA 나 MMA의 결과 또한 단순한 Friswell의 모드법을 사용한 결과보다는 적은 오차를 포함하고 있다.

그리고 본 예제의 고유치를 보면 각각의 고유치가 상당히 근접해 있는 것을 알 수 있다. 모드 가속도법의 수렴속도가 고유치의 비의 의해 결정된다는 사실에 비추어 볼때 MA, MMA의 방법으로 인한 오차가 크다는 사실은 이로 인한 결과이다. 이렇게 고유치가 근접해 있음에도 불구하고 Shifted Pole Method는 만족할 만한 결과를 주는 것을 볼 수 있다.

Shifted Pole Method의 효율성을 보기 위해 더 적은 모드를 사용해 얻은 결과의 오차 비교를 표 5에 정리하였다.

본 논문의 수치 예제에서는 오른쪽 고유벡터의 미에 대해서만 고려하였다. 이는 왼쪽 고유벡터의 미분에 관해서도 비슷한 결과를 보여주기 때문이다.

5. 결론

본 논문에서는 비대칭 감쇠 시스템의 민감도 해석에 있어서 기존의 모드법을 개선한 방법을 제시하였다. 실제 구조물에 적용하기 힘든 기존의 방법에 비해 본 연구의 방법은 소수의 저차 모드

표 5. Shifted Pole Method의 오차 비교

DOF Number	4 mode (%)	3 mode (%)	2 mode (%)
1	0.389	2.884	7.148
2	0.000	0.000	0.000
3	1.845	1.661	2.211
4	0.377	4.483	7.070
5	0.000	0.000	0.000
6	1.546	1.392	1.870

만을 사용하므로 실제 적용이 가능하며 보다 적은 모드를 사용하므로 오차는 포함하지만 신뢰할 수 있는 결과를 줄 수 있음을 수치 해석을 통해 확인하였다.

참고문헌

1. Sondipon Adhikari and Michael I. Friswell, "Eigenderivative analysis of Asymmetric Non-Conservative Systems," International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 51, pp. 709-733, 2001.
2. Qing-Hua Zeng, "Highly Accurate Modal Method for Calculating Eigenvector Derivative in Viscous Damping Systems," AIAA Journal, Vol. 33, No. 4, pp. 746-751, 1995.
3. L. Meirovitch and G. Ryland, "A Perturbation Technique for Gyroscopic Systems with Small Internal and External Damping," Journal of Sound and Vibration, Vol. 100, No. 3, pp. 393-408, 1985.