

# 비대칭 감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 미분을 구하기 위한 모드법의 개선

## Modified Modal Method for Eigenderivative Analysis of Asymmetric Damped System

문영종\*      박선규\*\*      이인원\*\*\*  
Moon, Yeong-Jong    Park, Sun-Kyu    Lee, In-Won

### 1. 서론

기존의 비대칭 감쇠시스템의 민감도를 해석하는 방법으로서 기존의 모드법(Adhikari 등, 2001)이 있다. 이 방법은 고유벡터의 미분값을 구하기 위해서 모든 고유치와 고유벡터의 값이 필요하게 된다. 그러나 복잡한 시스템에 있어서 모든 고유치와 고유벡터를 구한다는 것은 불가능하므로 Adhikari의 모드법을 그대로 사용하게 되면 구하지 못한 고유치 및 고유벡터 값들로 인해 상당히 큰 오차가 발생하게 된다. 따라서 본 논문에서는 기존의 대칭 감쇠 시스템에서 사용된 모드 가속도법과 쉬프트 가속도법(Zeng, 1995)을 Adhikari의 모드법에 적용하여 비대칭 감쇠 시스템에서 소수의 저차의 고유치와 고유벡터만을 가지고서 정확한 고유벡터의 미분값을 구하는 방법을 제안하였다.

### 2. Friswell의 모드법

N개의 자유도를 갖는 비대칭 감쇠 시스템의 일반적인 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = 0 \quad (1)$$

식 (1)은 다음과 같은 상태 공간 방정식으로 표현할 수 있다.

$$A\dot{x}(t) + Bx(t) = 0 \quad (2)$$

여기서  $A = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}$ ,  $x(t) = \begin{Bmatrix} \dot{u}(t) \\ u(t) \end{Bmatrix}$  이다.

위의 식으로부터 다음과 같은 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$(sA + B)z = 0, \quad y^T(sA + B) = 0 \quad (3)$$

여기서 s는 고유치, z는 오른쪽 고유벡터 그리고 y는 왼쪽 고유벡터로서  $z = \begin{pmatrix} u \\ sv \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} v \\ su \end{pmatrix}$  이다.

고유벡터는 다음과 같은 두 개의 정규화 조건을 갖는다.

$$y_j^T A z_j = 2s_j, \quad \{u_j\}_{n_j} = \{v_j\}_{n_j} \quad (4)$$

여기서  $\{*\}_j$ 는 벡터  $n_j$ 의 j번째 요소를 의미하며 다음과 같은 식으로 결정된다.

$$|\{u_j\}_{n_j}| |\{v_j\}_{n_j}| = \max |\{u_j\}_{n_j}| |\{v_j\}_{n_j}| \quad (5)$$

\* 한국과학기술원 토목공학과 석사과정, 042-869-3656(E-mail : oonehe@kaist.ac.kr)

\*\* 성균관대학교 토목공학과 교수

\*\*\* 정회원, 한국과학기술원 토목공학과 교수, 정회원, 042-869-3618(E-mail : iwlee@kaist.ac.kr)

고유치의 미분은 식 (3)의 미분을 통해 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$s_{j,\alpha} = - \frac{v_j^T [s_j^2 M_{,\alpha} + s_j C_{,\alpha} + K_{,\alpha}] u_j}{v_j^T [2s_j M + C] u_j} \quad (6)$$

고유벡터의 미분값을 얻기 위해 고유벡터의 미분값을 고유벡터의 선형조합으로 확장한다.

$$z_{j,\alpha} = \sum_{k=1}^{2N} a_{jk} z_k, \quad y_{j,\alpha} = \sum_{k=1}^{2N} b_{jk} y_k \quad (7)$$

식 (7)를 식 (3)의 미분식에 대입하면  $a_{jk}$ 와  $b_{jk}$ 를 구할 수 있다. 그로 인해 고유벡터의 미분값은 다음 식으로 정리된다.

$$u_{j,\alpha} = a_{jj} u_j + a_{jj+N} u_j^* + \sum_{k=1, k \neq j}^N [a_{jk} u_k + a_{jk+N} u_k^*] \quad (8)$$

$$v_{j,\alpha} = b_{jj} v_j + b_{jj+N} v_j^* + \sum_{k=1, k \neq j}^N [b_{jk} v_k + b_{jk+N} v_k^*] \quad (9)$$

### 3. 제안방법

#### 3.1 Multiple Modal Acceleration Method (MMA Method)

기존의 모드법이 N-space로 표현되었지만 수식의 복잡성을 피하기 위해 본 논문은 2N-space로 수식을 전개하였다. 식(3)을 임의의 설계변수에 대해 미분하여 정리하면,

$$(sA + B)z_{,\alpha} = f \quad (10)$$

여기서  $f = -(s_{,\alpha} A + sA_{,\alpha} + B_{,\alpha})z$

모드 가속도법을 적용하기 위해 오른쪽 고유벡터의 미분값을 다음과 같이 두 개의 부분으로 나눈다.

$$z_{,\alpha} = z_{s0} + z_{d0} \quad (11)$$

여기서

$$z_{s0} = B^{-1} f \quad (12)$$

$$z_{d0} = (sA + B)^{-1} f - B^{-1} f = Z \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \frac{1}{2s_k(s-s_k)} \left( \frac{s}{s_k} \right) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} Y^T f \quad (13)$$

같은 방법으로 다음과 같이 두 부분으로 나눌 수 있다.

$$z_{,\alpha} = z_{sn} + z_{dn} \quad (14)$$

여기서

$$z_{sn} = B^{-1} [f - sA z_{sn-1}] \quad (15)$$

$$z_{dn} = z_{,\alpha} - z_{sn} = Z \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \frac{1}{2s_k(s-s_k)} \left( \frac{s}{s_k} \right)^{n+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} Y^T f \quad (16)$$

식 (14), (15) 그리고 (16)을 이용하여 정리하면 오른쪽 고유벡터의 미분값은 다음과 같다.

$$z_{j,\alpha} = \left\{ B^{-1} \sum_{m=0}^{M-1} (-s_j A B^{-1})^m + \sum_{k=1, k \neq j}^N \left[ \left( \frac{s_j}{s_k} \right)^M \frac{z_k y_k^T}{2s_k(s_j - s_k)} + \left\{ \frac{s_j}{s_k^*} \right\}^M \frac{(z_k y_k^T)^*}{2s_k^*(s_j - s_k^*)} \right] \right. \\ \left. + \left( \frac{s_j}{s_j^*} \right)^M \frac{(z_j y_j^T)^*}{2s_j^*(s_j - s_j^*)} \right\} f_j + a_{jj} z_j \quad (17)$$

같은 방법으로 왼쪽 고유벡터의 미분값을 구할 수 있다.

$$y_{j,\alpha} = \left\{ B^{-T} \sum_{m=0}^{M-1} (-s_j A^T B^{-T})^m + \sum_{k=1, k \neq j}^N \left[ \left( \frac{s_j}{s_k} \right)^M \frac{y_k z_k^T}{2s_k(s_j - s_k)} + \left\{ \frac{s_j}{s_k^*} \right\}^M \frac{(y_k z_k^T)^*}{2s_k^*(s_j - s_k^*)} \right] \right. \\ \left. + \left( \frac{s_j}{s_j^*} \right)^M \frac{(y_j z_j^T)^*}{2s_j^*(s_j - s_j^*)} \right\} g_j + b_{jj} y_j \quad (18)$$

여기서  $g = -(s_{,a}A + sA_{,a} + B_{,a})^T y$

위의 두 식에서 가속도항이  $(s_j/s_k)^M$ 으로 되어 M값이 커지면 수렴속도가 기존의 가속도법에 비하여 증가함을 알 수 있다.

### 3.2 Multiple Modal Accelerations with Shifted-Poles

MMA Method에서 수렴속도는 M값을 큰 수로 놓음으로서 증가된다. 그러나 식의 첫 번째 부분  $s_j/s_k$ 에서  $k=1$ 이고  $j>1$ 일 때 M값이 너무 크게 되면 수렴을 하지 않게 된다. 그래서 다음과 같이 Pole을 이동시킴으로서 수렴속도를 증가시킬 수 있다.

$(s_j A + B)^{-1}$ 을  $\beta$ 에 관해 Taylor 전개를 시키면 다음과 같다.

$$(s_j A + B)^{-1} = [(B + \beta A - (s_j - \beta)(-A))]^{-1} \\ = (B + \beta A)^{-1} [I + (s_j - \beta)(B + \beta A)^{-1} A]^{-1} \\ = (B + \beta A)^{-1} \sum_{m=0}^{M-1} [-(s_j - \beta)A(B + \beta A)^{-1}]^m \quad (19)$$

이 식으로부터 같은 방법으로 오른쪽 고유벡터의 미분을 구하면 다음과 같다.

$$z_{j,\alpha} = \left\{ (B + \beta A)^{-1} \sum_{m=0}^{M-1} [-(s_j - \beta)A(B + \beta A)^{-1}]^m + \sum_{k=1, k \neq j}^N \left[ \left( \frac{s_j - \beta}{s_k - \beta} \right)^M \frac{z_k y_k^T}{2s_k(s_j - s_k)} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{s_j - \beta}{s_k^* - \beta} \right)^M \frac{(z_k y_k^T)^*}{2s_k^*(s_j - s_k^*)} \right] + \left( \frac{s_j - \beta}{s_j^* - \beta} \right)^M \frac{(z_j y_j^T)^*}{2s_j^*(s_j - s_j^*)} \right\} f_j + a_{jj} z_j \quad (20)$$

마찬가지로 왼쪽 고유벡터의 미분에 관한 식도 쉽게 유도할 수 있다.

## 4. 수치예제

제안방법의 수렴성 및 효율성을 증명하기 위해 그림 1과 같은 비대칭 감쇠를 갖는 시스템을 고려하자.

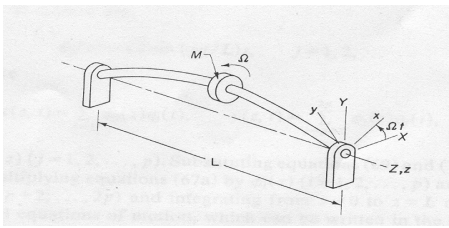


그림 1. 예제 구조물

그림 1의 시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{u} + (G + C)\dot{u} + (K + H)u = 0$$

$$\text{여기서 } M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & G_{12} \\ -G_{12} & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & H_{12} \\ -H_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

각각의 요소는 다음과 같이 주어진다.

$$[M_{11}]_{ij} = [M_{22}]_{ij} = m_0 L \delta_{ij} + 2M \sin(i\pi/2) \sin(j\pi/2), \quad [G_{12}]_{ij} = -2\Omega [M_{11}]_{ij},$$

$$[C_{11}]_{ij} = [C_{22}]_{ij} = (c + h)L \delta_{ij}, \quad [H_{12}]_{ij} = -h\Omega L \delta_{ij},$$

$$[K_{11}]_{ij} = 2(K_1 + K_2 \cos(i\pi) \cos(j\pi)) (i\pi/L)(j\pi/L) + EI_x (i\pi/L)^2 (j\pi/L)^2 L \delta_{ij} - \Omega^2 [M_{11}]_{ij},$$

$$[K_{22}]_{ij} = 2(K_1 + K_2 \cos(i\pi) \cos(j\pi))(i\pi/L)(j\pi/L) + EI_y(i\pi/L)^2(j\pi/L)^2 L \delta_{ij} - \Omega^2 [M_{11}]_{ij}$$

우선 이 시스템의 고유치와 그 미분값은 표 1과 같으며 오른쪽 고유벡터의 미분값의 정해는 표 2과 같다. ( 첫 번째 모드 )

제안방법의 결과를 비교하기 위해 6개의 모드중 4개의 모드만을 사용하여 정해와의 오차를 비교하여 표 3에 정리하였다. (Multiple order = 1, Shift value  $\beta$  = eigenvalue-1)

표 1. 고유치와 그 미분값

Mode Number	Eigenvalue	Eigenvalue Derivative
1	1.678e-2 +1.053e+1i	3.371e-3 +3.457e-1i
2	6.328e-2 +1.253e+1i	8.804e-3 +2.062e-1i
3	2.309e-1 +1.408e+1i	2.190e-2 +1.773e-2i
4	-2.664e-1 +1.512e+1i	-2.397e-2 -1.773e-2i
5	-1.133e-1 +1.667e+1i	-8.804e-3 -2.061e-1i
6	-5.904e-2 +1.867e+1i	-3.771e-3 -3.444e-1i

표 2. 오른쪽 고유벡터와의 미분값

DOF Number	Eigenvector	Eigenvector Derivative
1	-4.138e-2 -5.596e-5i	7.416e-3 -4.927e-5i
2	0	0
3	-1.404e-1 +7.721e-4i	5.578e-3 +8.632e-5i
4	5.446e-5 -4.221e-2i	4.942e-5 +7.736e-3i
5	0	0
6	-7.804e-4 -1.433e-1i	-8.601e-5 +6.276e-3i

표 3. 제안방법의 결과 비교

DOF Number	MA (%)	MMA (%)	Shifted Pole (%)
1	14.856	6.736	0.389
2	0.000	0.000	0.000
3	66.975	31.353	1.845
4	11.578	8.122	0.377
5	0.000	0.000	0.000
6	48.401	33.950	1.546

이 결과를 보면 MA, MMA의 결과는 상당한 오차를 포함하고 있는 반면 Shifted Pole Method를 사용하면 작은 오차를 포함하여 믿을수 있는 결과를 보여주는 것을 알 수 있다. 물론 여기서 얻은 MA 나 MMA의 결과 또한 단순한 Friswell의 모드법을 사용한 결과보다는 적은 오차를 포함하고 있다.

그리고 본 예제의 고유치를 보면 각각의 고유치가 상당히 근접해 있는 것을 알 수 있다. 모드 가속도법의 수렴속도가 고유치의 비의 의해 결정된다는 사실에 비추어 볼때 MA, MMA의 방법으로 인한 오차가 크다는 사실은 이로 인한 결과이다. 이렇게 고유치가 근접해 있음에도 불구하고 Shifted Pole Method는 만족할 만한 결과를 주는 것을 볼 수 있다.

본 논문의 수치 예제에서는 오른쪽 고유벡터의 미에 대해서만 고려하였다. 이는 왼쪽 고유벡터의 미분에 관해서도 비슷한 결과를 보여주기 때문이다.

## 5. 결론

본 논문에서는 비대칭 감쇠 시스템의 민감도 해석에 있어서 기존의 모드법을 개선한 방법을 제시하였다. 실제 구조물에 적용하기 힘든 기존의 방법에 비해 본 연구의 방법은 소수의 저차 모드만을 사용하므로 실제 적용이 가능하며 보다 적은 모드를 사용하므로 오차는 포함하지만 신뢰할 수 있는 결과를 줄 수 있음을 수치 해석을 통해 확인하였다.

## 참고문헌

1. Sondipon Adhikari and Michael I. Friswell (2001) Eigenderivative analysis of Asymmetric Non-Conservative Systems, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 51, pp. 709-733.
2. Qing-Hua Zeng (1995) Highly Accurate Modal Method for Calculating Eigenvector Derivative in Viscous Damping Systems, *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 4, pp. 746-751.
3. L. Meirovitch and G. Ryland (1985) A Perturbation Technique for Gyroscopic Systems with Small Internal and External Damping, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 100, No. 3, pp. 393-408.

