중복근을 갖는 감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 민감도

Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities of Damped Systems with Repeated Eigenvalues

최강민* **이종헌**** **이인원*****
Choi, Kang-Min Lee, Jong-Heon Lee, In-Won

1. 서 론

시스템의 거동은 고유치 문제의 해, 즉 고유진동수와 모드를 구함으로써 완전히 결정된다. 이러한 고유치 문제의 해는 시스템의 설계변수가 변함에 따라 변하게 되고, 따라서 시스템의 동응답 특성도 변하게 된다. 그래서 고유쌍의 미분값들은 동응답의 민감도를 결정할 때 유용할 뿐만 아니라, 최적화 설계 경향 연구나 실제 시스템 거동에 대한 직관을 얻는데 있어서도 대단히 유용하다.

전형적인 구조물의 경우 그 구조물이 가지는 대칭성에 의해서 중복된 고유치나 거의 같은 고유치를 갖는 경우가 생길 수 있다. 이러한 경우 설계변수가 변할 때 나타나는 m(중복근의 개수)개의 고유 벡터에 근접한 원래 시스템의 고유 벡터 집합을 구하면, 이 벡터들을 이용한 제약 조건을 첨가하여 모드의 미분을 계산할 수 있다.

제안방법은 감쇠 시스템이 중복된 고유치를 가지는 경우에 있어 Lee & Jung's method의 개선된 방법이다. 감쇠 시스템의 경우 Lee & Jung's method는 고유치의 미분과 고유 벡터의 미분을 두 개의 식을 이용해 따로 구했으나, 본 방법에서는 이를 동시에 구할 수 있는 알고리즘을 이용함으로써 효율적으로 구할 수 있다. 그리고 이는 비례 감쇠 시스템과 비비례 감쇠 시스템에서도 가능한 알고리즘이다.

2장에서는 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 제안방법을 보이고, 3장에서는 수치예제를 통해 제안방법의 효율성을 보인다.

2. 제안방법

고유치 문제의 고유치가 m번 중복되었다고 하면, 설계변수가 변함에 따라 중복되었던 m개의 고유치가 서로 다른 값을 갖게 된다. 이 경우 m개의 서로 다른 고유치에 대응하는 모드들을 구할 수 있다. 그러나 중복된 고유치를 갖는 고유 부공간(eigen-subspace)에서는 임의의 벡터쌍은 모두 모드가 될 수 있다. 모드의 미분이 존재하기 위해서는 설계변수가 변하기 전의 고유치가 중복근을 갖는 고유 부공간(eigen-subspace)에서 설계변수가 변할 때 나타나는 모드에 가장 근접한 모드 집합을 먼저 구해야 한다.

---

*한국과학기술원 토목공학과 석사과정·042-869-5658(E-mail:kmchoi@mail.kaist.ac.kr)
**경일대학교 토목공학과 교수·053-853-7226(E-mail:leejh@bear.kyungil.ac.kr)
***정회원·한국과학기술원 토목공학과 교수·042-869-3618(E-mail:iwlee@kaist.ac.kr)

감쇠 시스템의 고유치 문제는 다음과 같다.

$$(\lambda^2 \mathrm{M} + \lambda \mathrm{C} + \mathrm{K})\phi = \mathbf{0} \tag{1}$$

여기서 M, C, K는 각각 시스템의 질량행렬, 감쇠행렬, 그리고 강성행렬이다.

근접 벡터를 구하기 위해서 중복된 고유치에 해당되는 고유 벡터의 집합을 Φ_m으로 나타내고 고유치 문제를 다시 나타내면 다음과 같다.

$$\mathrm{M}\Phi_m\Lambda_m^2 + \mathrm{C}\Phi_m\Lambda_m + \mathrm{K}\Phi_m = \mathbf{0} \tag{2}$$

여기서 $\Lambda_m = \lambda_m \mathrm{I}$, $\Phi_m = [\phi_{i+1}\ \phi_{i+2}\ \Lambda\ \ \phi_{i+m}]$

I_m은 m차 단위행렬이고 λ_m은 m차 중복된 고유치이다.

(i+1)번째 고유 벡터에 대한 정규화 조건은 다음과 같다.

$$\phi_{i+1}^{\mathrm{T}}(2\lambda_{i+1}\mathrm{M} + \mathrm{C})\phi_{i+1} = \mathbf{1} \tag{3}$$

고유 벡터의 집합인 행렬 Φ_m에 해당되는 정규화 조건은 다음과 같다.

$$\Phi_m^{\mathrm{T}}(2\lambda_m\mathrm{M} + \mathrm{C})\Phi_m = \mathrm{I}_m \tag{4}$$

근접 벡터의 집합인 행렬은 직교변환(orthonormal transformation)에 의해 Φ_m의 항으로 표시될 수 있다.

$$\mathrm{X} = \Phi_m\mathrm{T} \tag{5}$$

여기서 T는 (m×m) 직교변환행렬이다.

$$\mathrm{T}^{\mathrm{T}}\mathrm{T} = \mathrm{I}_m \tag{6}$$

근접 벡터의 집합인 행렬 X 또한 정규화 조건을 만족한다.

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}}(2\lambda_m\mathrm{M} + \mathrm{C})\mathrm{X} = \mathrm{T}^{\mathrm{T}}\Phi_m^{\mathrm{T}}(2\lambda_m\mathrm{M} + \mathrm{C})\Phi_m\mathrm{T} = \mathrm{T}^{\mathrm{T}}\mathrm{T} = \mathrm{I}_m \tag{7}$$

모드의 미분을 구하기 위해서 먼저 T를 계산해야 한다. 설계변수가 변함에 따라 중복되었던 고유치는 서로 다른 m개의 값을 갖게 되기 때문에 설계변수를 p라 하면 $\partial\Lambda_m / \partial \mathrm{p}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial\Lambda_m}{\partial \mathrm{p}} = \mathrm{diag}\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial \mathrm{p}}, \frac{\partial\lambda_{i+2}}{\partial \mathrm{p}}, \Lambda\ , \frac{\partial\lambda_{i+m}}{\partial \mathrm{p}}\right) \tag{8}$$

X와 $\partial\Lambda_m / \partial \mathrm{p}$를 구하기 위해 다음과 같은 고유치 문제를 생각해 보자.

$$\mathrm{MX}\Lambda_m^2 + \mathrm{CX}\Lambda_m + \mathrm{KX} = \mathbf{0} \tag{9}$$

여기서 근접 벡터의 집합인 행렬 X의 차수는 (n×m)이고, Λ_m의 차수는 (m×m)이다.

고유치 문제 식(9)를 설계변수에 대해 미분한 후 정리하면,

$$(\lambda_m^2\mathrm{M} + \lambda_m\mathrm{C} + \mathrm{K})\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \mathrm{p}} + (2\lambda_m\mathrm{M} + \mathrm{C})\mathrm{X}\frac{\partial\Lambda_m}{\partial \mathrm{p}} = -\left(\lambda_m^2\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{p}} + \lambda_m\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \mathrm{p}} + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \mathrm{p}}\right)\mathrm{X} \tag{10}$$

식(10)의 양변에 Φ_m^{T}를 곱하고 $\mathrm{X} = \Phi_m\mathrm{T}$를 대입하여 정리하면 다음과 같은 새로운 특성 고유치 문제를 나타낼 수 있다.

$$\mathrm{DT} = \mathrm{ET}\frac{\partial\Lambda_m}{\partial \mathrm{p}} \tag{11}$$

여기서 $\mathrm{D} = \Phi_m^{\mathrm{T}}\left(\lambda_m^2\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{p}} + \lambda_m\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \mathrm{p}} + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \mathrm{p}}\right)\Phi_m$, $\mathrm{E} = -\Phi_m^{\mathrm{T}}(2\lambda_m\mathrm{M} + \mathrm{C})\Phi_m = -\mathrm{I}_m$

식(11)을 통해서 직교변환행렬 T를 구할 수 있고, 이를 사용하여 근접 벡터의 집합인 행렬 X를 식(5)에 의해 구할 수 있다.

정규화 조건 식(7)을 설계변수에 대해 미분한 후 정리하면 다음과 같다.

$$X^T(2\lambda_m M + C)\frac{\partial X}{\partial p} + X^T MX\frac{\partial \Lambda_m}{\partial p} = -\frac{1}{2}X^T\left(2\lambda_m\frac{\partial M}{\partial p} + \frac{\partial C}{\partial p}\right)X \tag{12}$$

식(10)과 식(12)를 합쳐서 선형대수방정식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \lambda_m^2 M + \lambda_m C + K & (2\lambda_m M + C)X \\ X^T(2\lambda_m M + C) & X^T MX \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial p} \\ \frac{\partial \Lambda_m}{\partial p} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\lambda_m^2\frac{\partial M}{\partial p} + \lambda_m\frac{\partial C}{\partial p} + \frac{\partial K}{\partial p}\right)X \\ -\frac{1}{2}X^T\left(2\lambda_m\frac{\partial M}{\partial p} + \frac{\partial C}{\partial p}\right)X \end{bmatrix} \tag{13}$$

이 식이 제안방법의 핵심이다. 전 방법에서는 고유치 문제를 미분한 식(10)의 양변에 Φ_m^T 를 곱하고 $X = \Phi_m T$ 를 대입하여 $\frac{\partial \Lambda_m}{\partial p}$ 를 따로 구했으나 본 방법에서는 식(13)을 사용하여 $\frac{\partial \Lambda_m}{\partial p}$ 와 $\frac{\partial X}{\partial p}$ 를 동시에 구한다.

3. 수치예제

제안방법의 효율성을 증명하기 위하여 중복근을 갖는 시스템 예로써 감쇠 시스템의 80개의 자유도를 갖는 정사각형 단면을 가지는 그림 1과 같은 켄틸레버 보를 사용하자. 이 시스템은 21개의 절점을 가지고 절점당 4자유도(y-변위, z-변위, y-각변위, z-각변위)를 가진다. 탄성계수는 2.10×10^{11} N/m^{2}이고, 질량 밀도는 7.85×10^3 kg/m^3 이다. 설계변수는 켄틸레버 보의 높이 h 이다.

감쇠행렬은 다음과 같이 Rayleigh damping으로 가정한다.

$$C = \alpha K + \beta M \tag{14}$$

여기서 α 와 β 는 Rayleigh Coefficients이다.

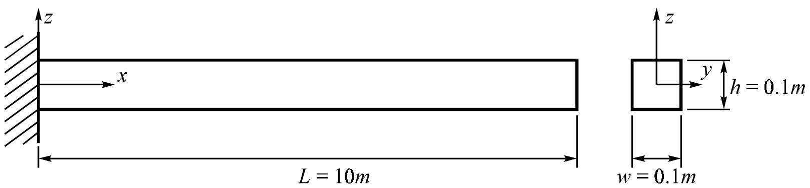

Fig. 1. Cantilever beam with the height *h* as the design parameter

제안방법에 의한 결과는 표1에서 나타내었다.

켄틸레버 보의 12개의 고유치와 고유치의 미분값은 두 번째, 세 번째 열에 나타나 있다. 네 번째, 다섯 번째 열에는 설계변수인 h 를 $\Delta h = 0.01h$ 만큼 변화시켰을 때 바뀐 시스템의 고유치를 나타내고 있다. 네 번재 열은 바뀐 시스템의 실제 고유치 값이고, 다섯 번째 열은 고유치의 미분값을 사용하여 구한 고유치의 근사값이다. 중복된 고유치는 더 이상 보의 단면이 정사각형이 아니므로 서로 다른 근으로 갈라지게 되는 것을 알 수 있다. 마지막 두 열은 바뀐 시스템의 실제 고유치와 고유치의 근사값의 오차를 나타내고 있다.

Table 1. The lowest 12 eigenvalues of the initial and changed cantilever beam system, and results of the sensitivity analysis

Mode number	Initial System		Changed System		Error of Approximation	
	Eigenvalue	Eigenvalue Derivative	Eigenvalue	Approximated Eigenvalue	Eigenvalue	Eigenvector
1,2	-1.43e-03 μ j5.25e-00	-2.806e-10 ±j3.535e-10	-1.43e-03 μ j5.25e-00	-1.43e-03 μ j5.25e-00	2.228e-11	3.738e-05
3,4	-1.43e-03 μ j5.25e-00	-2.276e-02 μ j5.25e+01	-1.46e-03 μ j5.30e-00	-1.46e-03 μ j5.30e-00	2.662e-08	1.000e-04
5,6	-5.42e-02 μ j3.29e+01	-6.627e-10 μ j2.345e-10	-5.42e-02 μ j3.29e+01	-5.42e-02 μ j3.29e+01	3.687e-12	3.738e-05
7,8	-5.42e-02 μ j3.29e+01	-1.08e+00 μ j3.29e+02	-5.52e-02 μ j3.32e+01	-5.52e-02 μ j3.32e+01	1.676e-07	1.000e-04
9,10	-4.24e-01 μ j9.21e+01	6.925e-10 ±j6.960e-10	-4.24e-01 μ j9.21e+01	-4.24e-01 μ j9.21e+01	9.143e-12	3.738e-05
11,12	-4.24e-01 μ j9.21e+01	-8.475e+00 μ j9.203e+02	-4.33e-01 μ j9.30e+01	-4.33e-01 μ j9.30e+01	4.651e-07	1.000e-04

4. 결 론

본 논문에서는 부가조건을 이용해 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템에서 고유치와 고유 모드의 미분을 대수적으로 구하는 Lee & Jung's method를 개선한 식을 제안하였다. 제안방법은 Lee & Jung's method와는 달리 고유치와 고유 모드의 미분을 동시에 계산할 수 있는 방법이다. 또한 수치적 안정성이 보장된 방법으로 정확해, 계수행렬의 대칭성 등의 장점을 모두 유지한다.

감사의 글

본 연구는 국가지정연구실 연구과제 중 ' 첨단 진동제어 기법을 이용한 구조물의 내진제어 ' 에 대한 연구비 지원으로 수행된 것으로 연구비 지원에 감사드립니다.

참고문헌

1. I. U. Ojalvo (1988) Efficient computation of modal sensitivities for systems with repeated frequencies, *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 3, pp. 361-366.
2. W. C. Mills-Curran (1988) Calculation of derivatives for structures with repeated eigenvalues, *AIAA Journal* , Vol. 26, No. 7, pp. 867-871.
3. R. L. Dailey (1989) Eigenvector derivatives with repeated eigenvalues, *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 4, pp. 486-491.
4. I. W. Lee and G. H. Jung (1997) An efficient algebraic method for computation of natural frequency and mode shape sensitivities: part II, multiple natural frequencies, *Computers and Structures*, Vol. 62, No. 3, pp. 437-443.
5. I. W. Lee, D. O. Kim and G. H. Jung (1999) Natural frequency and mode shape sensitivities of damped systems: part II, multiple natural frequencies, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 223, No. 3, pp. 413-424.
6. 조홍기(2001) 감쇠시스템의 고유진동수와 모드의 민감도, 석사학위논문, KAIST.