

분할구조 해석 기법을 이용한 수정된 Lanczos 방법

정길호, 이인원

(A Modified Lanczos' Method Combined with Substructure Analysis Technique)

(Gil-Ho Jung , In-Won Lee)

ABSTRACT

A combined method of the Lanczos process and a substructure analysis technique for calculating natural frequencies and mode shapes of large structural systems has been developed. The method does not require generation and storage of stiffness and mass matrices of the entire structure. That is, the method uses only the stiffness and mass matrices of each substructure. No approximating assumptions, other than the usual assumption of linear elastic system modelled by finite elements, are made. Thus, natural frequencies and mode shapes for the finite element model employed are the same as those with or without the substructuring algorithm. This is demonstrated by computing first ten natural frequencies and the corresponding mode shapes for an open truss helicopter tail-boom structure.

1. 서론

구조물의 동적해석을 모우드 중첩법에 의하여 수행할 때 고유 진동수와 모우드의 결정이 선행되어야 한다. 구조물 해석 시간의 대부분이 고유 진동수와 모우드를 구하는데 소요되기 때문에 가능한 효율적으로 이들을 계산할 수 있는 방법은 대단히 중요하다.

복잡한 구조물들은 흔히 유한 요소법과 같은 수치 해석법에 의하여 수학적 모델을 결정한다. 이 모델은 대부분의 경우 매우 큰 자유도를 갖게 되며, 이 자유도는 때때로 1000 또는 10000을 초과하는 경우가 많다. 이리하여 컴퓨터의 용량을 넘어서게 됨에 따라, 전체 구조물을 여러 부분으로 나누어서 설계하는 분할 구조 해석법 (substructure analysis) 이 개발되어 왔다.⁽¹⁻⁷⁾

한국과학기술원 기계공학과

정희원, 한국과학기술원 기계공학과

본 연구에서는 구조물을 여러개의 분할 구조물 (substructure) 들로 나눈 다음, 각각의 분할 구조물들의 강성 행렬과 질량 행렬들만을 사용하여 전체 구조물을 설계 또는, 해석하는 간단하고 효율적인 수치 해석법을 제시한다. 이 방법은 전체 구조물의 강성 행렬이나 질량 행렬을 컴퓨터에 저장할 필요가 없다. 즉, 분할 구조물들의 강성 행렬과 질량 행렬만을 필요로 한다. 그래서 행렬연산시 행렬의 차원이 작기 때문에 소형 컴퓨터에서도 계산 결과를 얻을 수 있다. 또한, 대형 컴퓨터에서는 병렬 처리 (parallel processing) 를 이용하면 고유 진동수와 모우드의 계산 시간을 단축할 수 있다.

2. Lanczos 방법^(8,9,10,11,12)

Lanczos 방법은 주어진 행렬을 3-대각 행렬 (tri-diagonal matrix) 로 바꾸는 방법이다. 고유치 문제의 행렬을 3-대각 행렬로 바꾸면 Jacobi 방법을 이용하여 고유치와 고유 벡터들을 효과적으로 구할 수 있다. Lanczos 알고리즘을 간단히 살펴보면, 우선 임의의 벡터 X 를 선택한다음, X 를 M 에 대해 정규화 (normalization) 한다. 즉,

$$X_1 = \frac{X}{\gamma}, \quad \gamma = (X^T M X)^{1/2} \quad (2-1)$$

$\beta_1 = 0$ 으로하고 다음식들을 이용하여, $i = 1, 2, \dots, q$ 에 대해 X_2, \dots, X_q 를 구한다.

$$K \bar{X}_i = M X_{i-1} \quad (2-2)$$

$$\alpha_{i-1} = \bar{X}_i^T M X_{i-1} \quad (2-3)$$

$$\bar{X}_i = \bar{X}_i - \alpha_{i-1} X_{i-1} - \beta_{i-1} X_i \quad (2-4)$$

$$X_i = \frac{\bar{X}_i}{\beta_i} \quad (2-5)$$

$$\beta_i = (\bar{X}_i^T M \bar{X}_i)^{1/2} \quad (2-6)$$

위의 관계를 이용해서, 식 (2-4) 에서 직교 벡터를 구할 때, 바로 전의 두 개의 벡터만을 사용했는데 이 부분이 Lanczos 알고리즘의 큰 특징이다.

$$U_i^{(\alpha)} = K_{ii}^{-1} P_i \quad (3-9)$$

$$P_b^{(\alpha)} = K_{bi} K_{ii}^{-1} P_i \quad (3-10)$$

가 되는데, $P_b^{(\alpha)}$ 는 P_i 가 작용할 때, $U_b = 0$ 을 유지하기 위해서 경계에 작용하는 반력이다. 마찬가지로 분할 구조의 경계를 완화했을 때도 식(3-2)의 U 와 P 에 상점자 β 들 첨가하면,

$$P_i^{(\beta)} = -K_{ii}^{-1} K_{ib} U_b^{(\beta)} \quad (3-11)$$

$$U_b^{(\beta)} = K_b^{-1} P_b^{(\beta)} \quad (3-12)$$

를 구할 수 있다. 여기서, K_b 는 경계 강성 행렬이고 다음과 같다.

$$K_b = K_{bb} - K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib} \quad (3-13)$$

$P_b^{(\beta)}$ 는 식(3-7)과 식(3-10)으로 부터 구한다.

$$\begin{aligned} P_b^{(\beta)} &= P_b - P_b^{(\alpha)} \\ &= P_b - K_{bi} K_{ii}^{-1} P_i = Q_b \end{aligned} \quad (3-14)$$

경계 변위를 고정했을 때 ($U_b = 0$) 분할 구조물들은 각각 고정된 경우이고, 경계에 반력이 발생한다. 그러므로, 이 경우엔 내부 변위 $U_i^{(\alpha)}$ 는 식(3-9)를 이용하여 분할 구조물들에 독립적으로 구할 수 있다. 그렇지만, 변위 $U_b^{(\beta)}$ 의 결정은 구조물의 전체 자유도를 포함한다. 전체 경계 강성 행렬은 분할 구조물의 경계 강성 행렬의 조합으로 구할 수 있다. 이 경우 전체 경계 강성 행렬은 전체 구조물의 강성 행렬, K 보다 작은 차원을 갖기 때문에 행렬 연산을 할 때 잇점이 있다.

3.2 행렬 변위 해석 (Matrix displacement analysis)

r 번째 분할 구조물에 대하여, 경계가 고정된 경우와 경계를 완화한 경우에 대하여 각각 고려하자.

경계가 고정되었을 때, 평형 방정식은

$$K^{(r)} U^{(r)} = P^{(r)} \quad (3-15)$$

또는,

$$\begin{bmatrix} K_{bb}^{(r)} & K_{bi}^{(r)} \\ K_{ib}^{(r)} & K_{ii}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_b^{(r)} \\ U_i^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_b^{(r)} \\ P_i^{(r)} \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

와 같이 쓸 수 있다.

$U_b^{(r)} = 0$ 인 경우, r 번째 분할 구조물의 내부 변위와 경계 반력은 식(3-9)와 식(3-10)으로 구한다. 즉,

$$\left[U_i^{(\alpha)} \right]_{\text{boundary fixed}} = (K_{ii}^{(r)})^{-1} P_i \quad (3-17)$$

$$R_b^{(r)} = K_{bi}^{(r)} (K_{ii}^{(r)})^{-1} P_i^{(r)} \quad (3-18)$$

분할 구조물의 모든 경계를 고정 (r 구조물의 강체 운동을 제거)했기 때문에 $(K_{ii}^{(r)})^{-1}$ 는 구할 수 있다. r 번째 경계 강성 행렬, $K_b^{(r)}$ 은 식(3-12)로 부터 알 수 있다.

$$K_b^{(r)} = K_{bb}^{(r)} - K_{bi}^{(r)} (K_{ii}^{(r)})^{-1} K_{ib}^{(r)} \quad (3-19)$$

전체 구조물의 경계 강성 행렬, K_b 는 식(3-19)의 조합으로 구한다.

경계가 완화된 경우를 고려하면, 경계 반력과 경계에 작용하는 외력에 의해 경계 변위를 구한다. 이때 r 번째 분할 구조물과 $r+1$ 번째 분할 구조물 사이에 작용하는 등가 외력을 $Q_b^{(r,r+1)}$ 이라고 하면,

$$Q_b^{(r,r+1)} = -R_b^{(r)} \cdot R_b^{(r+1)} + P_b^{(r,r+1)} \quad (3-20)$$

가 된다.

경계 변위를 구하기 위해서, 전체 구조물에 외력 Q_b 가 작용할 때의 변위를 구하면 된다. 전체 구조물의 경계 변위에 의한 평형 방정식을 쓰면,

$$K_b U_b = Q_b \quad (3-21)$$

가 되는데, 여기서

$$K_b = \sum_r (a^{(r)T} K_b^{(r)} a^{(r)}) \quad (3-22)$$

$$Q_b = \sum_r (b^{(r)T} Q_b^{(r,r+1)}) \quad (3-23)$$

이고 $a^{(r)}$, $b^{(r)}$ 은 각각 전체 경계 변위의 차원에 맞게 변환을 하는 Bookan 변환 행렬이다. 이제, 식(3-21)로 부터 경계 변위를 구하면,

$$U_b = K_b^{-1} Q_b \quad (3-24)$$

이 되고, 식(3-16)로 부터 $U_i^{(r)}$ 를 다음과 같이 구한다.

$$U_i^{(r)} = (K_{ii}^{(r)})^{-1} P_i^{(r)} - (K_{ii}^{(r)})^{-1} K_{ib}^{(r)} U_b^{(r)} \quad (3-25)$$

이상의 내용을 정리하면, 식(3-24)로 부터 U_b 를 구하고, U_b 로 부터 $U_b^{(r)}$ 을 구한다. 그리고 식(3-25)으로 부터 $U_i^{(r)}$ 을 구하면, 전체 변위를 구할 수 있다.

4. 제안 방법 (Proposed method)

본 연구는 기본적으로 Lanczos 방법에 분할 구조 해석법을 결합하여 전체 구조물의 고유 진동수와 모우드를 구하는 것이다. Lanczos 알고리즘을 사용할 때, 2장에서 볼 수 있듯이 다음과 같은 계산이 필요하다.

$$p = M r \quad (4-1)$$

$$r = K^{-1} p \quad (4-2)$$

여기서, r 는 임의의 벡터이고 M 과 K 는 $n \times n$ 행렬이다. 위의 두 식만 계산할 수 있으면, Lanczos 방법을 분할 구조물에 적용하는 데 문제가 없다. 우선 분할 구조물로 분할했을 경우에, 전체 구조물의 질량 행렬은 구하지 않았고, 각 분할 구조의 질량 행렬만을 알 수 있으므로, 식(4-1)의 계산은 다음과 같이 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 p &= Mr \\
 &= \sum_{i=1}^{\ell} (A^{(i)T} M^{(i)} A^{(i)}) r \\
 &= \sum_{i=1}^{\ell} \left((A^{(i)T} M^{(i)} A^{(i)}) r \right) \quad (4-3)
 \end{aligned}$$

여기서, $M^{(i)}$ 는 i 번째 분할 구조물의 질량 행렬이고 $A^{(i)}$ 는 그에 해당하는 i 번째 Boolean 변환 행렬이다. ℓ 은 분할 구조물의 갯수이다.

식(4-2)를 계산하는 방법을 살펴보면, 역시 전체 구조물의 강성 행렬은 알 수 없으므로, 3장에서 설명한 분할 구조 해석법을 이용하여 r 을 구한다. 즉, i 번째 분할 구조물에서 구한 $K_b^{(i)}$ (식(3-19))와 $P_b^{(i)}(\beta) (= Q_b^{(i)})$ (식(3-20))로부터 전체 경계 강성 행렬, K_b 와 경계 하중 벡터, Q_b 를 구하면.

$$K_b = \sum_{i=1}^{\ell} \beta^{(i)T} K_b^{(i)} \beta^{(i)} \quad (4-4)$$

$$\begin{aligned}
 Q_b &= \sum_{i=1}^{\ell} \epsilon^{(i)T} \left[P_b^{(i)} K_{ii} (K_{ii}^{(i)})^{-1} P_i^{(i)} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^{\ell} \epsilon^{(i)T} P_b^{(i)}(\beta) \quad (4-5)
 \end{aligned}$$

가 되는데, 여기서 $\beta^{(i)}$ 와 $\epsilon^{(i)}$ 는 Boolean 변환 행렬이다. 식(4-4)와 식(4-5)로부터.

$$K_b U_b = Q_b \quad (4-6)$$

를 얻는다. 그러면, 식(4-6)에서 K_b 를 LDL^T (L : unit lower triangular matrix, D : diagonal matrix)로 재구성하여 U_b 를 구하고, 식(3-25)에서 $U_i(r)$ 을 구하면 전체 구조물의 변위를 계산할 수 있다.

이와 같은 방법으로 $r = K^{-1}p$ 와 $p = Mr$ 가 계산되면, 2장에서 볼 수 있듯이, Lanczos 방법을 사용하여 식(2-11)와 같은 일반적인 고유치 문제를 3대각 행렬의 표준형 고유치 문제로 변환하여 전체 구조물을 여러부분으로 나눈 경우에, 전체 구조물의 질량행렬이나 강성행렬을 구하지 않고 구조물의 등축 해석을 할 수 있다.

5. 수치 해석 (Numerical analysis)

분할 구조물이 있는 구조물의 고유 진동수와 모우드형을 구하기 위한 예로 J.S. Arora의 논문(참고 문헌 7번)에서 사용했던 헬리콥터 꼬리의 트러스 구조를 고려하자. 이 구조물의 기하학적 모양은 Fig. 5.1에 표시하였다. 이 구조물의 유한 요소 모델은 Fig. 5.2와 Fig. 5.3에서 볼 수 있듯이, 108개의 트러스 요소로 되어 있고, 28개의 연결점이 있다. 자유도는 72이고 고유치 문제의 차원은 72×72 이다. 모든 트

러스 요소의 단면적은 1.0 in^2 , 비중은 0.1 lb/in^3 이고, 영 계수는 $10.5 \times 10^6 \text{ psi}$ 이다.

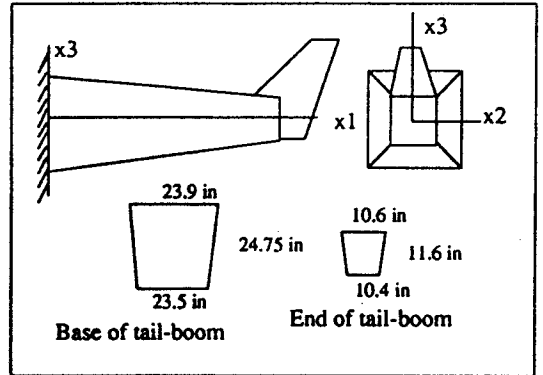


Figure 5.1 Geometry of helicopter tail-boom

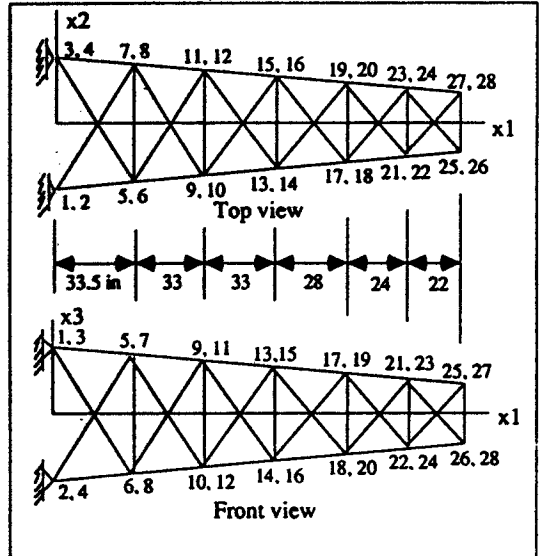


Figure 5.2 Finite element model for the tail-boom structure (degree-of-freedom for joints 5 and 28 are 1, 2, 3, and 70, 71, 72, respectively.)

Fig. 5.2의 유한 요소 모델은 3개의 분할 구조로 나누어서 Fig. 5.3에 표시하였다. 분할 구조물들은 절점 9-12와 절점 17-20을 경계로 구분되었다. 분할 구조물 1은 경계 자유도는 12, 내부 자유도는 12이고 36개의 요소로 되어 있다. 분할 구조물 2은 36개의 요소로 되어 있고, 경계 자유도는 24, 내부 자유도는 12이다. 분할 구조물 3은 경계 자유도는 12, 내부 자유도는 24이고 36개의 요소로 되어 있다. 분할 구조물로 나눈 경우와 나누지 않은 경우에 각각 작은 고유 진동수부터 10개와 그에 해당하는 모우드를 구해 보았다. 기대되는 결과지만, 두 가지 경우의

고유치들은 서로 정확히 같았고 그 결과를 Table 5.1에 정리해 놓았다. 본 연구에서 고유해를 구할 때, 강성 행렬과 질량 행렬등을 구하기 위한 프로그램등 필요한 서브루틴은 ADINA (Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis)에서 뽑아서 사용하였다.

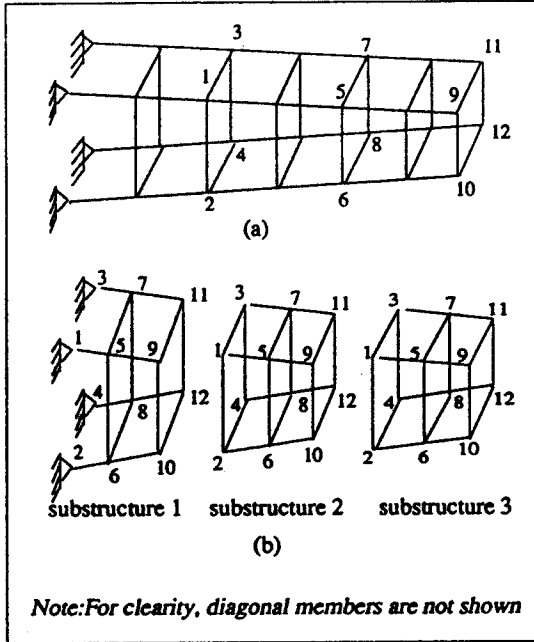


Figure 5.3 Nodal numbering system for substructural formulation for the finite element model of the helicopter tail-boom structure
 (a) an overall numbering for the boundary nodes
 (b) numbering system for boundary and interior nodes for each substructure

Table 5.1 Natural frequencies of helicopter tail-boom structure

Natural frequency (No)	Natural frequency (Hz)
1	21.82
2	23.13
3	101.6
4	105.2
5	107.4
6	200.9
7	227.6
8	239.4
9	242.0
10	377.5

6. 결 론

분할 구조물을 사용하여 복잡한 (또는, 큰 자

유도를 갖는) 구조물의 고유 진동수와 모드들을 구하는 효율적이고 간단한 수치 해석법을 개발하였다. 본 연구의 방법은 Lanczos 알고리즘을 기초로 하고 있다. 이 방법은 Component Mode Substitution의 개념을 사용하지 않았다. 즉, 분할 구조물의 어떤 모드도 계산하지 않고, 오직 강성 행렬과 질량 행렬만을 사용하여 전체 구조물의 고유 진동수와 모드형을 계산했다. 그래서, 분할 구조물의 경계를 임의로 가정하지 않기 때문에, 유한 요소 모델의 정확한 해를 구한다. 즉 분할 구조로 나눈 경우와 나누지 않은 경우의 해가 동일하다. 또한, 자유도가 큰 구조물에 대해서도 소형의 컴퓨터에서 계산이 가능하다는 것이다. 구조물을 이와같이 분할 구조물로 나누어서 해석할 때, 동일한 형태의 행렬 연산이 필요하다. 이 연산들을 대형컴퓨터를 사용할 경우엔, 각각 분할 구조물의 계산을 병렬 처리 (parallel processing)를 하면 계산 시간을 단축할 수 있음을 지적해 둔다.

참 고 문 헌

1. J. T. Spanos and W. S. Tsuha, 1989, ' Selection of component modes for flexible multibody simulation ', J. Guidance Vol. 14 No.7
2. J. S. Przemienieki, 1968, ' Theory of matrix structural analysis ', McGraw - Hill, N.Y.
3. W. C. Hurty, 1964, ' Dynamic analysis of structural systems using component modes ', AIAA. J. Vol. 3 No. 4
4. R. R. Craig and M. C. C. Bampton, 1968, ' Coupling of substructures for dynamic analysis ', AIAA. J. Vol. 6 No. 7.
5. S. Rubin, 1968, ' Improved component - mode representation for structural dynamic analysis ' AIAA. J. Vol. 6 No. 7.
6. W. A. Benfield and R. F. Hrudu, 1971, 'Vibration analysis of structures by component mode substitution', AIAA. J. Vol. 9 No. 7
7. J.S. Arora and D. T. Nuyen, 1980, ' Eigensolution for large structural systems with substructures ', Int. J. num. Engng. Vol. 15.
8. Thomas J. R. Hughes, ' The finite element method ', Prentice - Hall
9. B.Nour-Omid and R.W. Clough, 1984, ' Dynamic analysis of structures using Lanczos coordinates', Earth.Engng. and Struc. Dynamics Vol. 12.
10. K. J. Bathe, ' Finite element procedures in engineering analysis ', Prentice - Hall