

## 고유치문제의 민감도를 구하기 위한 효율적인 수치해석 기법

(An Efficient Numerical Analysis Technique for Computing Eigenpair Derivatives)

정길호\*, 정형조, 이인원(한국과학기술원)  
Jung Gil-Ho, Jung Hyung-Jo, Lee In-Won(KAIST)

Keyword : Sensitivity Analysis (민감도해석), Eigenvalue problem (고유치문제)

Abstract : This paper presents an efficient numerical method whose stability is proved for computation of eigenpair derivatives. The method has very simple algorithm and gives an exact solution because any iteration scheme is not used. Furthermore, the eigenpair derivatives can be obtained by solving algebraic equations with side conditions in the case of repeated eigenvalues. To demonstrate the efficiency of the proposed method, a cantilever plate with distinct eigenvalues and a cantilever beam with repeated eigenvalues are considered. The design parameter of the cantilever plate is its thickness, and that of the cantilever beam is its height.

### 1. 개요

시스템의 시동은 고유치 문제의 해, 즉 고유 진동수와 모우드를 구함으로써 완전히 결정된다. 이러한 고유치 문제의 해는 시스템의 설계 변수가 변함에 따라 변하게 되고, 따라서 시스템의 동응답 특성도 변하게 된다. 그래서 고유쌍의 미분값들은 동응답의 민감도를 결정하는 데 대단히 유용할 뿐만 아니라, 설계 경향 연구나 실제 시스템 거동에 대한 직관을 얻는데도 유용하다.

1974년에 Rudisill과 Chu<sup>[1,2]</sup>가 고유 벡터 미분을 구할 수 있는 대수적인 방법을 제안했다. 이 방법은 최종적으로 풀어야 하는 선형 대수 방정식의 계수 행렬이 비대칭이고, 서로 다른 고유치를 갖는 고유치 문제에 국한되어 있다. 1976년에 Nelson<sup>[2]</sup>도 서로 다른

고유치를 갖는 일반적인 실계수 행렬에 대한 고유쌍을 계산하는 알고리즘을 제안했다. 이 방법도 한 개의 고유쌍 미분을 계산하기 위하여 그에 해당하는 한 쌍의 고유치가 필요하기 때문에 효율적이긴 하지만, 고유치가 중근을 갖는 경우에 어려움이 있다. 일반적인 구조물은 구조물의 대칭성 때문에 많은 중근이 존재한다. 그래서 중근을 갖는 경우에 고유 진동수 및 모우드의 미분을 구하기 위하여 많은 연구가 진행되고 있다<sup>[4-7]</sup>. Nelson의 방법을 중근을 갖는 경우 까지 확장한 Ojalvo<sup>[4,5]</sup> 방법이 있고, 이 방법을 수정한 Mills-Curren<sup>[6]</sup> 방법과 Dailey<sup>[7]</sup> 방법이 있다. 이 방법들 또한 Nelson의 방법을 기본적인 알고리즘으로 사용하기 때문에 프로그래밍에 어려움이 있고 모우드의 미분값을 구할 때 대단히 복잡하다. 그렇지만 제안 방법은 계수 행렬이 대칭을 유지하도록 제약 조건을 첨가하여 대칭으로 만들어서 선형 대수 방정식을 풀기 때문에 band형태나

sky-line형태로 계산하여서 컴퓨터 메모리나 해석 시간을 절약할 수 있는 장점이 있다. 또한 시스템의 고유 진동수가 중복근을 갖는 경우에도, 설계 변수가 변할 때 나타나는  $m$ (중복근의 갯수)개의 고유 벡터에 근접한 원래 시스템의 고유 벡터 집합을 구하면, 이 벡터들을 이용한 제약 조건을 첨가하여 모우드의 미분을 계산할 수 있다.

2장에서는 기존 방법들의 고유치 문제에 대한 민감도 해석을 간략히 살펴보았다. 3장에서는 제안 방법과 제안 방법의 수치적 안정성을 증명하였고, 4장에서는 예제를 통한 수치 해석을 수행하였다.

## 2. 기존의 민감도 해석 기법

### 2.1 이론적 배경

동적 해석에서 일반화된 고유치 문제는 다음과 같다.

$$K\phi_j = \lambda_j M\phi_j \quad (1)$$

여기서  $K$ 와  $M$ 은 각각 시스템의 강성행렬과 질량 행렬이다.  $M$ 은 positive definite이고,  $K$ 는 positive definite 또는 semi-positive definite이다.  $K$ 와  $M$ 은  $n$ 차의 대칭 행렬이고,  $\lambda_j$ 는 시스템의  $j$ 번째 고유 진동수의 제곱이고,  $\phi_j$ 는 시스템의 모우드이다. 모우드는 일반적으로 다음과 같이 정규화한다.

$$\phi_j^T M \phi_j = 1 \quad (2)$$

고유치의 미분을 구하기 위하여 설계 변수에 대하여 식(1)을 미분하면, 다음과 같다.

$$(K - \lambda_j M)\phi_j' = -(K' - \lambda_j M')\phi_j + \lambda_j' M\phi_j \quad (3)$$

식(3)의 양변 앞에  $\phi_j^T$ 를 곱하고 정리하면, 고유치 미분을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\lambda_j' = \phi_j^T (K' - \lambda_j M')\phi_j \quad (4)$$

여기서  $\lambda_j' = \partial\lambda_j/\partial p$ ,  $K' = \partial K/\partial p$  그리고  $M' = \partial M/\partial p$ 이고,  $p$ 는 설계 변수이다. 이제 모우드의 미분값을 살펴보면, 행렬  $(K - \lambda_j M)$ 가 정칙 행렬이 아니기 때문에 직접적으로는  $\phi_j'$ 을 구할 수 없다. 그래서 Rudisill 과 Chu는 제약 조건을 첨가해서 비대칭

정칙 행렬을 구성하여  $\phi_j'$ 을 계산했고, Nelson은 particular solution과 homogeneous solution의 합으로  $\phi_j'$ 를 구하는 알고리즘을 제시했다. 이외에도 모우드형의 미분을 모우드의 조합으로 표시하여 계산하는 modal method<sup>[8-12]</sup>와 이를 수정 보완한 많은 방법들이 있지만, 한 개의 모우드의 미분을 구하기 위하여 전부, 또는 여러개의 모우드들이 필요하기 때문에 계산량이 많은 단점이 있다.

### 2.2 Nelson 방법

이 방법은 particular solution  $v$ 과 homogeneous solution  $c\phi_j$ 의 합으로 모우드의 미분을 계산한다. 즉,

$$\phi_j' = v + c\phi_j \quad (5)$$

여기서  $c$ 는 계수이다. particular solution  $v$ 는  $j$ 번째 고유벡터의 요소중에서 가장 큰 값에 해당하는 위치를  $k$ 라고 하면,  $\phi_j'$ 의 요소중에서  $k$ 번째 값을 0으로 하고 계산함으로써 얻을 수 있다. 계수  $c$ 는 식(2)을 미분한 식에 식(5)을 대입하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$c = -v M \phi_j - 0.5 \phi_j^T M' \phi_j \quad (6)$$

이 방법은 중복근을 갖는 경우에  $\phi_j'$ 을 구할 수 없다. Ojalvo, Mills-Curren 그리고 Dailey등이 Nelson의 방법을 확장하여 중복근을 갖는 경우에 해법을 개발하였지만, 대단히 복잡할 뿐만 아니라 계산량도 많다.

### 2.2 Rudisill & Chu 방법

이 방법은 제약 조건을 첨가하여 비대칭 선형 대수 방정식을 푸는 방법이다. 식(1)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$(K - \lambda_j M)\phi_j = 0 \quad (7)$$

식(7)를 미분한 식(3)를 다시 쓰면,

$$(K - \lambda_j M)\phi_j' - \lambda_j' M\phi_j = -(K' - \lambda_j M')\phi_j \quad (8)$$

고유 벡터를 길이로 정규화한 다음 미분하면 다음과 같다.

$$\phi_j^T \phi_j' = 1 \quad (9)$$

$$\phi_j^T \phi_j' = 0 \quad (10)$$

식(8)과 식(10)를 다음과 같이 행렬 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \phi_j^T & 0 \\ K-\lambda_j M & -M\phi_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_j' \\ \lambda_j' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(K'-\lambda_j M') \end{bmatrix} \phi_j \quad (11)$$

식(11)에서 계수 행렬을 Choleski의 행렬 분해법을 이용하여  $\phi_j'$ 의  $\lambda_j'$ 을 구할 수 있다. 이 방법은 계수 행렬이 비대칭이고, 중복근이 있는 경우에 사용할 수 없는 단점이 있다.

### 3. 제안 방법

#### 3.1 서로 다른 고유치를 갖는 경우

제안 방법은 식(2)의 정규화 조건을 미분한 식을 제약 조건으로 하여 대칭인 계수 행렬을 만들고, 수치적 안정성을 확보하여 고유 벡터의 미분을 구하는 방법이다. 식(8)을 다시 써 보면 다음과 같다.

$$(K-\lambda_j M)\phi_j' - \lambda_j' M\phi_j = -(K'-\lambda_j M')\phi_j \quad (12)$$

식(2)과 같이 정규화한 식을 미분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\phi_j^T M\phi_j' + 0.5\phi_j^T M'\phi_j = 0 \quad (13)$$

식(12)과 식(13)를 합해서 계수 행렬이 대칭인 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K-\lambda_j M & -M\phi_j \\ -\phi_j^T M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_j' \\ \lambda_j' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(K'-\lambda_j M')\phi_j \\ -0.5\phi_j^T M'\phi_j \end{bmatrix} \quad (14)$$

식(14)에서 계수 행렬을  $LDL^T$ 로 행렬 분해해서  $\phi_j'$ 과  $\lambda_j'$ 을 간단히 구할 수 있다. 계수 행렬이 대칭인 것은 대단히 중요하다. 계수 행렬을 band형태나 skyline형태로 저장할 수 있기 때문에 컴퓨터 메모리나 계산 시간이 절약된다. 제안 방법의 안정성은 3.3절에서 증명하였다.

#### 3.2 중복된 고유치를 갖는 경우

고유치 문제의 고유 진동수가  $m$ 개 중복되었다고 하면, 설계 변수가 변함에 따라 중복되었던  $m$ 개의 고유 진동수가 서로 다른 값을 갖게 된다. 이 경우  $m$ 개의 서로 다른 고유 진동수에 대해서 유일한 고유 벡터를 구할 수

있다. 그러나 고유 벡터의 미분이 존재하기 위해서는 설계 변수가 변하기 전의 고유치가 중복근을 갖는 공간에서 설계 변수가 변할 때 나타나는 고유 벡터에 가장 근접한 고유 벡터 집합을 먼저 구해야 한다. 이러한 근접한 고유 벡터 집합을 구하기 위해서 다음과 같은 고유치 문제를 고려한다.

$$K\Psi = M\Psi\Lambda \quad (15)$$

여기서  $\Lambda = \lambda I$ ,  $\Psi^T M\Psi = I$  그리고,  $\lambda$ 는  $\Psi$ 에 의해 span되는 고유공간(eigenspace)의 고유치이다. 즉,  $\lambda$ 는  $m$ 개의 중복근을 갖는다. 또한  $\Psi$ 는  $n \times m$  행렬이고,  $\Lambda$ 는  $m \times m$  행렬이다. 근접한 고유 벡터들은 orthonormal transformation에 의해  $\Psi$ 의 항으로 표시된다.

$$Z = \Psi\Gamma \quad (16)$$

여기서,  $\Gamma$ 는  $m \times m$  orthonormal transformation 행렬이다.

$$Z^T M Z = \Gamma^T \Psi^T M \Psi \Gamma = \Gamma^T \Gamma = I \quad (17)$$

고유벡터 미분을 구하기 위하여 먼저  $\Gamma$ 를 계산해야 한다. 설계 변수가 변함에 따라 서로 다른  $m$ 개의 값을 갖게 되기 때문에,  $\Lambda' = \partial\Lambda/\partial p = \text{diag}(\lambda_1', \dots, \lambda_m')$ 로 쓸 수 있다.  $\Gamma$ 를 구하기 위하여 다음과 같이 근접한 고유 벡터  $Z$ 로 구성된 고유치 문제를 고려하면,

$$KZ = MZ\Lambda \quad (18)$$

식(18)을 미분하고 정리하면 다음과 같다.

$$(K-\lambda M)Z' = -(K'-\lambda M')Z + MZ\Lambda' \quad (19)$$

식(19)의 양변에  $\Psi^T$ 를 곱하고,  $Z = \Psi\Gamma$ 를 대입하면,

$$\Psi^T(K'-\lambda M')\Psi\Gamma = D\Gamma = \Gamma\Lambda' \quad (20)$$

고유치 문제 식(20)을 풀면  $\Gamma$ 를 구할 수 있다. 그러므로 식(16)를 이용하여 근접한 고유 벡터들로 이루어진 행렬  $Z$ 를 구할 수 있다.  $Z^T M Z = I$ 를 설계 변수에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$Z^T M Z' + 0.5Z^T M' Z = 0 \quad (21)$$

식(19)과 식(21)을 행렬 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K-\lambda M & -MZ \\ -Z^T M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \Lambda' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(K'-\lambda M')Z \\ -0.5Z^T M' Z \end{bmatrix} \quad (22)$$

여기서 식(22)의 계수 행렬의 차수는  $(n+m) \times (n+m)$ 이다. 이 행렬은 대칭이므로 고유치가 서로 다른 경우와 같은 장점이 있다.

### 3.3 제안 방법의 수치적 안정성

고유치가 중복근을 갖는 일반적인 경우에 대하여 제안 방법의 수치적 안정성을 증명하자. 수치적 안정성은 제안 방법의 최종 결과식에서 계수 행렬의 정칙성(nonsingularity)을 증명하면 된다. 증명의 간단화를 위하여 처음  $m$ 개의 고유값이 중복되었다고 가정하고,

다음과 같은 행렬  $K^*$ 를 정의하자.

$$K^* = \begin{bmatrix} K - \lambda M & -MZ \\ -Z^T M & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서  $Z$ 는 근접한 고유벡터들로 이루어진  $n \times m$  행렬이다. 행렬  $K^*$ 가 정칙 행렬임을 증명하기 위하여 다음과 같은 고유치 문제를 도입한다.

$$K^*U = M^*UD \quad (24)$$

여기서,

$$M^* = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_{n+m}] \quad (26)$$

$$D = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+m}) \quad (27)$$

$I_m$ 은  $m$ 차의 단위 행렬이고,  $U$ 와  $D$ 는  $(n+m) \times (n+m)$ 행렬이다. 식(24)의 고유치 문제의  $n+m$ 개의 고유 벡터와 고유치는 다음과 같다.

고유벡터,

$$u: \begin{cases} \begin{Bmatrix} z_i \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} z_i \\ -1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} z_k \\ 0 \end{Bmatrix} & i = 1, 2, \dots, m \\ & k = m+1, m+2, \dots, n \end{cases} \quad (29)$$

고유치,

$$\gamma: \begin{cases} -1, \dots, -1 \quad (m\text{개}) \\ 1, \dots, 1 \quad (m\text{개}) \\ \lambda_i - \lambda \quad (n-m\text{개}), \end{cases} \quad (30)$$

$(k = m+1, m+2, \dots, n)$

여기서  $\lambda$ 는 중복된 고유치이다.

식(24)의 determinant 관계를 고려하면,

$$\det[K^*] = \det[M^*] \det[D]$$

(31)

$$= (-1)^m \det[M] \prod_{i=m+1}^n (\lambda_i - \lambda)$$

식(31)에서  $\det[M]$ 은 정의에 의해 0(zero)이 아니므로  $\det[K^*] \neq 0$ 이다. 이상에서 제안 방법의 수치적 안정성이 증명되었다.

## 4. 수치 해석

제안 방법의 효율성을 증명하기 위하여 서로 다른 고유치를 갖는 경우인 평판과, 중복된 고유치를 갖는 경우인 외팔보틀에 예제로 하여 해석하였다. 해석에 사용한 컴퓨터는 계산 속도가 10 Mips이고, 0.9 MFlops인 IRIS4D20-S17이다.

### 4.1 평판

서로 다른 고유치를 갖는 시스템의 예로 그림 1의 평판 구조물을 고려하자. 이 구조물은 36개의 삼각형 요소로 모델링하였다. 각 절점은 3자유도( $z$ -변위,  $x$ -각변위,  $y$ -각변위)이기 때문에 한 요소는 9 자유도이다. 전체 자유도는 72이다.

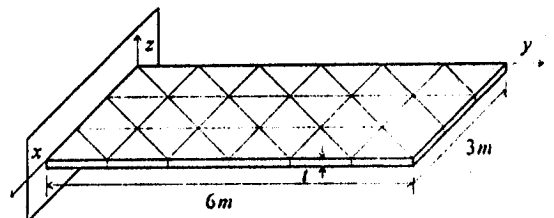


Figure 1 Cantilever plate with the thickness  $t$  as the design parameter

탄성계수는  $10.5 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ 이고, 밀도는  $7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 이다. Poisson 비는 0.3이다. 설계 변수는 평판의 두께  $t$ 이다. 고유진동수 10개를 표 1에 표시하였다. 강성 행렬과 질량 행렬의 각각  $t^3$ 과  $t$ 에 비례한다. 그래서 이 경우 강성 행렬과 질량 행렬의 비분함  $t$ 에 대하여 미분함으로써 간단히 구할 수 있다.

Table 1 The lowest 10 natural frequencies of the cantilever plate.

Natural frequency(No.)	Natural frequency(Hz)	Eigenvalue
1	0.868	0.2973E+02
2	3.459	0.4724E+03
3	5.267	0.1095E+04
4	10.90	0.4687E+04
5	14.70	0.8535E+04
6	18.86	0.1405E+05
7	20.98	0.1738E+05
8	24.52	0.2373E+05
9	28.19	0.3138E+05
10	33.35	0.4629E+05

이 예제의 경우 해석 시간은 Nelson 방법과 비교하였다. 10개의 고유값 미분을 구하는 데 걸린 시간은 Nelson 방법의 경우 1.20 sec이고, 제안 방법은 1.18 sec이다. Nelson 방법은  $n$ 차의 선형 대수 방정식과 상수  $c$ 를 계산하고, 제안 방법은  $n+1$ 차의 선형 대수 방정식을 계산하기 때문에 계산 시간은 비슷하다. 이 결과를 그림 2에 표시하였다.

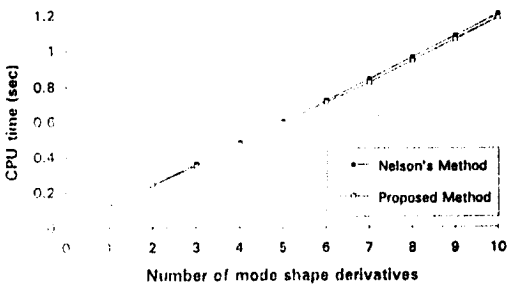


Figure 2 Computational time according to the number of mode shape derivatives to be calculated in case of the cantilever plate.

#### 4.2 외팔보

중복된 고유치를 갖는 시스템의 예로 그림 3의 외팔보를 고려하자. 이 구조물은 18개의 요소로 모델링하였다. 각 절점은 4자유도( $v$ -변위,  $w$ -변위,  $y$ -각변위,  $z$ -

각변위)이기 때문에 한 요소는 8 자유도이다. 전체 자유도는 72이고, 고유치 문제의 차수는  $72 \times 72$ 이다.

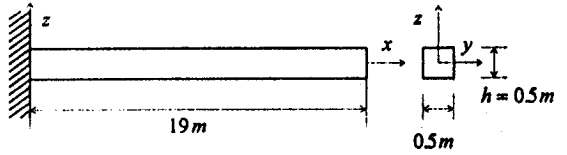


Figure 3 Cantilever beam with the height  $h$  as the design parameter

탄성계수는  $2.10 \times 10^{11} N/m^2$  이고, 밀도는  $7.85 \times 10^3 kg/m^3$ 이다. Poisson 비는 0.3이고, 보의 폭과 높이는 모두 0.5 m이다. 설계 변수는 보의 높이  $h$ 이다. 고유진동수 10개를 표 2에 표시하였다. 이 외팔보는 첫번째와 두번째, 세번째와 네번째의 순으로 중복된 고유치를 갖는다.

Table 2 The lowest 10 natural frequencies of the cantilever beam.

Natural frequency(No.)	Natural frequency(Hz)	Eigenvalue
1	1.440	0.8188E+02
2	1.440	0.8188E+02
3	9.015	0.3209E+04
4	9.015	0.3209E+04
5	25.20	0.2507E+05
6	25.20	0.2507E+05
7	49.25	0.9577E+05
8	49.25	0.9577E+05
9	81.16	0.2600E+06
10	81.16	0.2600E+06

이 예제의 경우 해석 시간은 Dailey 방법과 비교하였다. 10개의 고유값 미분을 구하는 데 걸린 시간은 Dailey 방법의 경우 0.75 sec이고, 제안 방법은 0.70 sec이다. Dailey 방법에서  $n$ 차의 선형 대수 방정식과 상수 행렬  $C$ 를 계산하는 데, 상수 행렬을 구하기가 복잡하기 때문에 제안 방법에 비해서 계산 시간이 다소 많이 걸린다. 제안 방법은  $n+2$ 차의 선형 대수 방정식을 계산한다. 이 결과를 그림 4에 표시하였다.

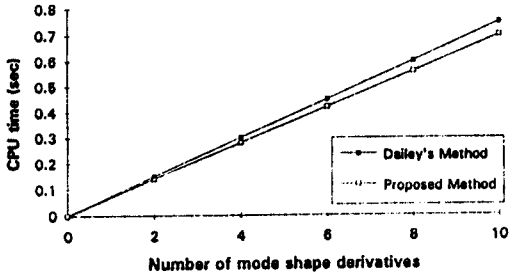


Figure 4 Computational time according to the number of mode shape derivatives to be calculated in case of the cantilever beam.

## 5. 결론

본 논문에서 모우드의 미분을 구하기 위해 수치적으로 안정한 수치 해석 기법을 개발하였다. 제안 방법은 최종 결론식의 계수 행렬이 대칭이기 때문에 기존의 상용 코드에 무리없이 적용할 수 있고, band형태나 sky-line 형태로 저장할 수 있기 때문에 컴퓨터 메모리나 계산 시간이 절약된다. 또한 고유치가 중복근을 갖을 때에도 쉽게 모우드의 미분을 구할 수 있다.

## 참고문헌

1. Rudisill, C. S. and Chu, Y., "Numerical Methods for Evaluating the Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors," *AIAA Journal*, Vol. 13 Oct. 1974.
2. Rudisill, C. S., "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors of a General Matrix," *AIAA Journal*, Vol. 12, May 1974.
3. Nelson, R. B., "Simplified Calculations of Eigenvector Derivatives," *AIAA Journal*, Vol. 14 Sept. 1976.
4. Ojalvo, I. U., "Efficient Computation of Mode-Shape Derivatives for Large Dynamic Systems," *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 10, Nov. 1986.
5. Ojalvo, I. U., "Efficient Computation of Modal Sensitivities for Systems with Repeated Frequencies," *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 3, 1988.

6. Mills-Curran, W. C. "Calculation of Derivatives for Structures with Repeated Eigenvalues," *AIAA Journal*, Vol. 26, Jan. 1988.
7. Dailey, R. L., "Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues," *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 4, Feb. 1989.
8. Fox, R. L. and Kapoor, M. P., "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors," *AIAA Journal*, Vol. 6, Dec. 1968.
9. Haftka, R. T. and Adelman, H. M., "Recent Developments in Structural Sensitivity Analysis," *Structural Optimization*, Vol. 1, Apr. 1989.
10. Lin, K. B., Junkins, J. L. and Wang, B. P., "Re-examination of Eigenvector Derivatives," *Journal of Guidance*, Vol. 10, No. 6, Nov. 1987
11. Zhong, W. and Cheng, G., "Second-order Sensitivity Analysis of Multimodal Eigenvalues and Related Optimization Techniques," *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 14, 1986.
12. Bernard, M. L. and Bronowicki, A. J., "Modal Expansion Method for Eigensensitivity with Repeated Roots," *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 7, July 1994.