

# 중복근을 갖는 감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 민감도

## Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities of Damped Systems with Multiple Natural Frequencies

최강민\*  
Choi, Kang-Min

이종헌\*\*  
Lee, Jong-Heon

이인원\*\*\*  
Lee, In-Won

---

### ABSTRACT

A simplified method is presented for the computation of eigenvalue and eigenvector derivatives associated with repeated eigenvalues. In the proposed method, adjacent eigenvectors and orthonormal conditions are used to compose an algebraic equation whose order is  $(n+m) \times (n+m)$ , where  $n$  is the number of coordinates and  $m$  is the number of multiplicity of the repeated eigenvalue. One algebraic equation developed can be computed eigenvalue and eigenvector derivatives simultaneously. Since the coefficient matrix of the proposed equation is symmetric and based on  $N$ -space, this method is very efficient compared to previous methods. Moreover the numerical stability of the method is guaranteed because the coefficient matrix of the proposed equation is non-singular. This method can be consistently applied to both structural systems with structural design parameters and mechanical systems with lumped design parameters. To verify the effectiveness of the proposed method, the finite element model of the cantilever beam and a 5-DOF mechanical system in the case of a non-proportionally damped system are considered as numerical examples. The design parameter of the cantilever beam is its width, and that of the 5-DOF mechanical system is a spring.

---

### 1. 서 론

시스템의 거동은 고유치 문제의 해, 즉 고유진동수와 모드를 구함으로써 결정된다. 이러한 고유치 문제의 해는 시스템의 설계변수가 변함에 따라 변하게 되고, 따라서 시스템의 동응답 특성도 변하게 된다. 고유쌍의 미분값들은 동응답의 민감도를 결정할 때 유용할 뿐만 아니라, 최적화 설계 경향 연구나 실제 시스템 거동에 대한 직관을 얻는데 있어서도 대단히 유용하다.

---

\* 한국과학기술원 토목공학과 석사과정  
\*\* 경일대학교 토목공학과 교수  
\*\*\* 정회원. 한국과학기술원 토목공학과 교수

전형적인 구조물의 경우 그 구조물이 가지는 대칭성에 의해서 중복된 고유치나 거의 같은 고유치를 갖는 경우가 생길 수 있다. 이러한 경우 설계변수가 변할 때 나타나는  $m$ (중복근의 개수)개의 고유 벡터에 근접한 원래 시스템의 고유 벡터 집합을 구하면, 이 벡터들을 이용한 제약 조건을 첨가하여 모드의 미분을 계산할 수 있다.

1976년에 Nelson은 특이해와 비특이해의 합으로 모드의 미분을 구할 수 있는 알고리즘을 제안했다. 이 방법은 매우 효율적이긴 하지만 알고리즘이 복잡하고 중복근을 갖는 시스템의 경우 적용이 어렵다. Nelson 방법을 중복근의 경우까지 확장한 Ojalvo 방법이 있고, 이를 개선한 Mills-Curren 방법과 Dailey 방법이 있는데, 이들은 Nelson 방법에 기초한 것이어서 알고리즘이 역시 복잡하다.<sup>(1),(2),(3)</sup> 또한 Dailey 방법은 감쇠 시스템의 경우 중복근을 갖는 고유 모드의 민감도를 계산하기 위해서는 아주 복잡한 과정을 거쳐야 한다. 하지만 본 방법은 중복근을 갖는 그때의 고유쌍만을 필요로 하기 때문에 아주 간단한 방법이다.

제안방법은 감쇠 시스템에서 중복된 고유치를 가지는 경우에 있어 Lee and Jung's method의 개선된 방법이다.<sup>(4),(5)</sup> 감쇠 시스템의 경우 Lee and Jung's method는 고유치의 미분과 고유 벡터의 미분을 두 개의 식을 이용해 따로 구했으나, 본 방법에서는 이를 동시에 구할 수 있는 알고리즘을 이용함으로써 효율적으로 구할 수 있다. 그리고 이는 비례 감쇠 시스템과 비비례 감쇠 시스템에서도 가능한 알고리즘이다.

2장에서는 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 제안방법을 보이고, 3장에서는 제안방법의 수치적 안정성을 보인다. 4장에서는 수치예제를 통해 제안방법의 효율성을 보인다.

## 2. 제안방법

고유치 문제의 고유치가  $m$ 번 중복되었다고 하면, 설계변수가 변함에 따라 중복되었던  $m$ 개의 고유치가 서로 다른 값을 갖게 된다. 이 경우  $m$ 개의 서로 다른 고유치에 대응하는 모드들을 구할 수 있다. 그러나 중복된 고유치를 갖는 고유 부공간(eigen-subspace)에서는 임의의 벡터쌍은 모두 모드가 될 수 있다. 그래서 모드의 미분이 존재하기 위해서는 설계변수가 변하기 전의 고유치가 중복근을 갖는 고유 부공간(eigen-subspace)에서 설계변수가 변할 때 나타나는 모드에 가장 근접한 모드 집합을 먼저 구해야 한다. 즉 시스템의 고유 벡터를 그대로 사용한다는 것은 해석의 불안정을 일으키게 되므로 고유 벡터에 수치적으로 무리가 없는 변화를 가한 근접 벡터를 사용하는 것이다.

감쇠 시스템의 고유치 문제는 다음과 같다.

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)\phi = 0 \quad (1)$$

여기서  $M, C, K$ 는 각각 시스템의 질량행렬, 감쇠행렬 그리고 강성행렬이다.

근접 벡터를 구하기 위해서 중복된 고유치에 해당되는 고유 벡터의 집합을  $\Phi_m$ 으로 나타내고 고유치 문제를 다시 나타내면 다음과 같다.

$$M\Phi_m \Lambda_m^2 + C\Phi_m \Lambda_m + K\Phi_m = 0 \quad (2)$$

여기서  $\Lambda_m = \lambda_m I$ ,  $\Phi_m = [\phi_{i+1} \ \phi_{i+2} \ \dots \ \phi_{i+m}]$

$I_m$ 은  $m$ 차 단위행렬이고  $\lambda_m$ 은  $m$ 차 중복된 고유치이다.

$(i+1)$ 번째 고유 벡터에 대한 정규화 조건은 다음과 같다.

$$\phi_{i+1}^T (2\lambda_{i+1}M + C)\phi_{i+1} = 1 \quad (3)$$

고유 벡터의 집합인 행렬  $\Phi_m$ 에 해당되는 정규화 조건은 다음과 같다.

$$\Phi_m^T (2\lambda_m M + C)\Phi_m = I_m \quad (4)$$

근접 벡터의 집합인 행렬은 직교변환(orthonormal transformation)에 의해  $\Phi_m$ 의 항으로 표시하여 구할 수 있다.

$$X = \Phi_m T \quad (5)$$

여기서  $T$ 는  $(m \times m)$  직교변환행렬이다.

$$T^T T = I_m \quad (6)$$

근접 벡터의 집합인 행렬  $X$  또한 정규화 조건을 만족한다.

$$X^T (2\lambda_m M + C)X = T^T \Phi_m^T (2\lambda_m M + C)\Phi_m T = T^T T = I_m \quad (7)$$

근접 벡터의 집합인 행렬  $X$ 를 구하기 위해서는 먼저 직교변환행렬  $T$ 를 계산해야 한다. 설계변수가 변함에 따라 중복되었던 고유치는 서로 다른  $m$ 개의 값을 갖게 되기 때문에 설계변수를  $p$ 라 하면  $\partial\Lambda_m/\partial p$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial\Lambda_m}{\partial p} = \text{diag}\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial p}, \frac{\partial\lambda_{i+2}}{\partial p}, \Lambda, \frac{\partial\lambda_{i+m}}{\partial p}\right) \quad (8)$$

$X$ 와  $\partial\Lambda_m/\partial p$ 를 구하기 위해 다음과 같은 고유치 문제를 생각해 보자.

$$MX\Lambda_m^2 + CX\Lambda_m + KX = 0 \quad (9)$$

여기서 근접 벡터의 집합인 행렬  $X$ 의 차수는  $(n \times m)$  이고,  $\Lambda_m$ 의 차수는  $(m \times m)$ 이다.

고유치 문제 식(9)를 설계변수에 대해 미분한 후 정리하면,

$$(\lambda_m^2 M + \lambda_m C + K) \frac{\partial X}{\partial p} + (2\lambda_m M + C)X \frac{\partial\Lambda_m}{\partial p} = -\left(\lambda_m^2 \frac{\partial M}{\partial p} + \lambda_m \frac{\partial C}{\partial p} + \frac{\partial K}{\partial p}\right)X \quad (10)$$

식(10)의 양변에  $\Phi_m^T$ 를 곱하고  $X = \Phi_m T$ 를 대입하여 정리하면 다음과 같은 새로운 특성 고유치 문제를 나타낼 수 있다.

$$DT = ET \frac{\partial\Lambda_m}{\partial p} \quad (11)$$

여기서  $D = \Phi_m^T \left( \lambda_m^2 \frac{\partial M}{\partial p} + \lambda_m \frac{\partial C}{\partial p} + \frac{\partial K}{\partial p} \right) \Phi_m$ ,  $E = -\Phi_m^T (2\lambda_m M + C)\Phi_m = -I_m$

식(11)을 통해서 직교변환행렬  $T$ 를 구할 수 있고, 이를 사용하여 근접 벡터의 집합인 행렬  $X$ 를 식(5)에 의해 구할 수 있다.

정규화 조건 식(7)을 설계변수에 대해 미분한 후 정리하면 다음과 같다.

$$X^T (2\lambda_m M + C) \frac{\partial X}{\partial p} + X^T M X \frac{\partial\Lambda_m}{\partial p} = -\frac{1}{2} X^T \left( 2\lambda_m \frac{\partial M}{\partial p} + \frac{\partial C}{\partial p} \right) X \quad (12)$$

식(10)과 식(12)를 합쳐서 선형대수방정식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \lambda_m^2 M + \lambda_m C + K & (2\lambda_m M + C)X \\ X^T(2\lambda_m M + C) & X^T M X \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial p} \\ \frac{\partial \lambda_m}{\partial p} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\lambda_m^2 \frac{\partial M}{\partial p} + \lambda_m \frac{\partial C}{\partial p} + \frac{\partial K}{\partial p}\right)X \\ -\frac{1}{2}X^T \left(2\lambda_m \frac{\partial M}{\partial p} + \frac{\partial C}{\partial p}\right)X \end{bmatrix} \quad (13)$$

이 식이 제안방법의 핵심이다. 전 방법에서는 고유치 문제를 미분한 식(10)의 양변에  $\Phi_m^T$ 를 곱하고  $X = \Phi_m T$ 를 대입하여  $\partial \lambda_m / \partial p$ 를 따로 구했으나 본 방법에서는 식(13)을 사용하여  $\partial \lambda_m / \partial p$ 와  $\partial X / \partial p$ 를 동시에 구한다.

### 3. 제안방법의 수치적 안정성

식(13)의 계수행렬이 정칙행렬(nonsingular matrix)임을 증명하기 위해 다음의 성질을 도입한다.

$$\det(Y^T A^* Y) = \det(Y^T) \det(A^*) \det(Y) \quad (14)$$

즉,  $\det(Y) \neq 0$ 인 행렬  $Y$ 에 대해  $\det(Y^T A^* Y) \neq 0$ 임을 증명하면  $\det(A^*) \neq 0$ 이므로 행렬  $A^*$ 는 정칙행렬이다. 여기서  $A^*$ 는 식(13)의 계수행렬이다.

$$A^* = \begin{bmatrix} \lambda_m^2 M + \lambda_m C + K & (2\lambda_m M + C)X \\ X^T(2\lambda_m M + C) & X^T M X \end{bmatrix} \quad (15)$$

$Y$ 를 다음과 같이 가정해 정칙행렬로 만들자.

$$Y = \begin{bmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서  $\Psi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \Lambda \ \phi_{n-m} \ x_1 \ x_2 \ \Lambda \ x_m]$ ,  $x_j$ 는  $j$ 번째 고유 벡터이고,  $\phi$ 's는  $x_j$ 와 서로 독립인 임의의 벡터이다. 따라서, 행렬  $Y$ 의 모든 행 벡터들이 서로 독립이므로 행렬  $Y$ 는 정칙행렬(nonsingular matrix)이다. 식(13)의 계수행렬에  $Y^T$ 와  $Y$ 를 곱해 정리하면 다음 식(17)과 같다.

$$\begin{aligned} Y^T A^* Y &= \begin{bmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_m^2 M + \lambda_m C + K & (2\lambda_m M + C)X \\ X^T(2\lambda_m M + C) & X^T M X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Psi^T(\lambda_m^2 M + \lambda_m C + K)\Psi & \Psi^T(2\lambda_m M + C)X \\ X(2\lambda_m M + C)\Psi & X^T M X \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 행렬  $\Psi^T(\lambda_m^2 M + \lambda_m C + K)\Psi$ 의 마지막  $m$ 번째 행과 열은 0으로 구성되어 있다. 왜냐하면  $\Psi$ 의 마지막 열이  $x_j$ 이기 때문이다. 따라서 행렬  $\Psi^T(\lambda_m^2 M + \lambda_m C + K)\Psi$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Psi^T(\lambda_m^2 M + \lambda_m C + K)\Psi = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서  $\tilde{A}$ 는 non-zero  $(n-m) \times (n-m)$  행렬이고 랭크도  $(n-m)$ 이다. 그리고 행렬  $\Psi^T(\lambda_m^2 M + \lambda_m C + K)\Psi$ 의 차수는  $n$ 이고 랭크는  $(n-m)$ 이므로  $\tilde{A}$ 는 정칙행렬(nonsingular matrix)이다. 따라서  $\det(\tilde{A}) \neq 0$ .

식(17)의 행 벡터와 열 벡터 마지막 항은 정규화 조건에 의해 다음과 같이 된다.

$$\Psi^T (2\lambda_m M + C) X = \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ I_m \end{bmatrix}, \quad X^T (2\lambda_m M + C) \Psi = \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ I_m \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

여기서  $\tilde{B}$ 는 일반적으로 non-zero 요소들로 구성된 행렬이다.

식(18)과 식(19)를 사용하여 식(17)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$Y^T A^* Y = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & \tilde{B} \\ 0 & 0 & I_m \\ \tilde{B}^T & I_m & X^T M X \end{bmatrix} \quad (20)$$

determinant 성질을 적용하면 식(20)의 determinant는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\det(Y^T A^* Y) = \det(\tilde{A}) \times \det \left( \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & X^T M X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{B}^T \end{bmatrix} [\tilde{A}]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \tilde{B} \end{bmatrix} \right) \quad (21)$$

$$= -\det(A) \neq 0$$

따라서 식(21)에 의해  $\det(A^*) \neq 0$ , 즉 행렬  $A^*$ 는 정칙행렬(nonsingular matrix)임이 증명된다.

#### 4. 수치예제

제안방법의 효율성을 증명하기 위하여 중복근을 갖는 시스템 예로써 비례 감쇠 시스템과 비비례 감쇠 시스템 두 가지를 고려하자. 첫 번째 예제로는 비례 감쇠 시스템으로 단면이 정사각형인 캔틸레버 보의 유한요소모델이다. 두 번째 예제로는 비비례 감쇠 시스템으로 5 자유도 Primary and secondary systems equipped on the rigid square plate 를 사용한다.

##### 4.1 Cantilever Beam(Proportionally damped system)

비례 감쇠 시스템으로 80 개의 자유도를 갖는 정사각형 단면을 가지는 그림 1 과 같은 캔틸레버 보를 생각해 보자. 이 시스템은 21 개의 절점을 가지고 절점당 4 자유도(y-변위, z-변위, y-각변위, z-각변위)를 가진다. 탄성계수는  $2.10 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup> 이고, 질량 밀도는  $7.85 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup> 이다. 설계변수는 캔틸레버 보의 높이  $h$ 이다.

감쇠행렬은 다음과 같이 Rayleigh damping 으로 가정한다.

$$C = \alpha K + \beta M \quad (22)$$

여기서  $\alpha$  와  $\beta$  는 Rayleigh Coefficients 이다.

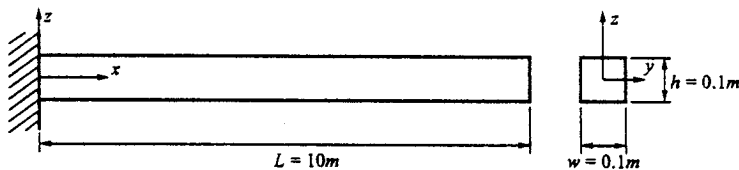


Fig. 1. Cantilever beam with the height  $h$  as the design parameter

제안방법에 의한 결과는 표 1 에서 나타내었다.

켄틸레버 보의 12 개의 고유치와 고유치의 미분값은 두 번째, 세 번째 열에 나타나 있다. 네 번째, 다섯 번째 열에는 설계변수인  $h$  를  $\Delta h=0.01h$  만큼 변화시켰을 때 바뀐 시스템의 고유치를 나타내고 있다. 네 번째 열은 바뀐 시스템의 실제 고유치 값이고, 다섯 번째 열은 고유치의 미분값을 사용하여 구한 고유치의 근사값이다. 중복된 고유치는 더 이상 보의 단면이 정사각형이 아니므로 서로 다른 근으로 갈라지게 되는 것을 알 수 있다. 마지막 두 열은 바뀐 시스템의 실제 고유치와 고유치의 근사값의 오차를 나타내고 있다.

Table 1. The lowest 12 eigenvalues of the initial and changed cantilever beam system, and results of the sensitivity analysis

Mode number	Initial System		Changed System		Error of Approximation	
	Eigenvalue	Eigenvalue Derivative	Eigenvalue	Approximated Eigenvalue	Eigenvalue	Eigenvector
1,2	-1.4279e-03 $\mu$ j5.2496e-00	-2.8057e-10 $\pm$ j3.5347e-10	-1.4279e-03 $\mu$ j5.2496e-00	-1.4279e-03 $\mu$ j5.2496e-00	2.2283e-11	3.7376e-05
3,4	-1.4279e-03 $\mu$ j5.2496e-00	-2.2756e-02 $\mu$ j5.2494e+01	-1.4556e-03 $\mu$ j5.3021e-00	-1.4555e-03 $\mu$ j5.3021e-00	2.6622e-08	1.0000e-04
5,6	-5.4154e-02 $\mu$ j3.2895e+01	-6.6265e-10 $\mu$ j2.3445e-10	-5.4154e-02 $\mu$ j3.2895e+01	-5.4154e-02 $\mu$ j3.2895e+01	3.6899e-12	3.7376e-05
7,8	-5.4154e-02 $\mu$ j3.2895e+01	-1.0818e+00 $\mu$ j3.2886e+02	-5.5241e-02 $\mu$ j3.3224e+01	-5.5236e-02 $\mu$ j3.3224e+01	1.6763e-07	1.0001e-04
9,10	-4.2409e-01 $\mu$ j9.2090e+01	6.9247e-10 $\pm$ j6.9600e-10	-4.2409e-01 $\mu$ j9.2090e+01	-4.2409e-01 $\mu$ j9.2090e+01	9.1432e-12	3.7376e-05
11,12	-4.2409e-01 $\mu$ j9.2090e+01	-8.4753e+00 $\mu$ j9.2029e+02	-4.3261e-01 $\mu$ j9.3010e+01	-4.3256e-01 $\mu$ j9.3010e+01	4.6508e-07	1.0002e-04

#### 4.2 Primary and secondary systems equipped on the rigid square plate

(Non-proportionally damped system)

비비례 감쇠 시스템으로 5 자유도를 갖는 그림 2 과 같은 rigid square plate 를 생각해 보자. 수직 방향 진동만 있다고 가정하자.

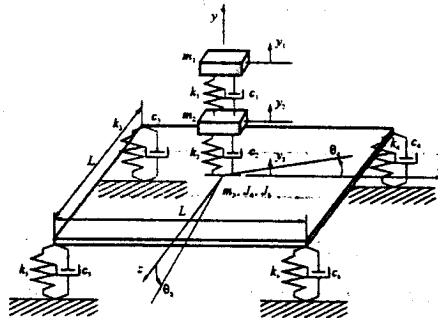


Fig. 2. 5-DOF non-proportionally damped system

제안방법에 의한 결과는 표 2에서 나타내었다.

두 번째와 세 번째 고유치 컬레쌍이 중복근을 가지는 것을 살펴볼 수 있다. 고유치와 고유치의 미분값은 두 번째 세 번째 열에 나타나 있다. 설계변수는 스프링  $k_s$ 로써 중복근의 미분치가 서로 다를 수 있다. 첫 번째 수치예제와 마찬가지로 설계변수인  $k_s$ 를  $\Delta k_s = 0.01 k_s$  만큼 변화시켰을 때 바뀐 시스템의 고유치는 네 번째, 다섯 번째 열에서 나타내고 있다. 네 번째 열은 바뀐 시스템의 실제 고유치 값이고, 다섯 번째 열은 고유치의 미분값을 사용하여 구한 고유치의 근사값이다. 중복된 고유치는 구조적인 대칭성이 파괴됨으로 인해 서로 다른 근으로 갈라지게 되는 것을 알 수 있다. 마지막 두 열은 바뀐 시스템의 실제 고유치와 고유치의 근사값의 오차를 나타내고 있다.

Table 2. The natural frequencies of the initial and changed cantilever beam system, and results of the sensitivity analysis

Mode number	Initial System		Changed System		Error of Approximation	
	Eigenvalue	Eigenvalue Derivative	Eigenvalue	Approximated Eigenvalue	Eigenvalue	Eigenvector
1,2	-4.3262e-02 $\mu j1.5023e+00$	9.6943e-07 $\mu j1.7995e-04$	-4.3253e-02 $\mu j1.5040e+00$	-4.3253e-02 $\mu j1.5041e+00$	8.1631e-07	2.9463e-05
3,4	-2.4000e-01 $\mu j3.4558e+00$	0.0000e+00 $\mu j0.0000e+00$	-2.4000e-01 $\mu j3.4558e+00$	-2.4000e-01 $\mu j3.4558e+00$	0.0000e+00	0.0000e+00
5,6	-2.4000e-01 $\mu j3.4558e+00$	0.0000e+00 $\mu j8.6811e-04$	-2.4000e-01 $\mu j3.4645e+00$	-2.4000e-01 $\mu j3.4645e+00$	2.1632e-06	5.2014e-06
7,8	-3.5202e-02 $\mu j6.1354e+00$	-7.8926e-07 $\mu j2.9526e-05$	-3.5210e-02 $\mu j6.1357e+00$	-3.5210e-02 $\mu j6.1357e+00$	1.1763e-07	2.5394e-06
9,10	-2.4535e-02 $\mu j9.7000e+00$	-1.8017e-07 $\mu j5.0001e-06$	-2.4537e-02 $\mu j9.7000e+00$	-2.4537e-02 $\mu j9.7000e+00$	4.3893e-09	1.6332e-07

## 5. 결 론

본 논문에서는 부가조건을 이용해 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템에서 고유치와 고유 모드의 미분을 대수적으로 구하는 Lee & Jung's method를 개선한 식을 제안하였다. 제안방법은 Lee & Jung's method와는 달리 고유치와 고유 모드의 미분을 동시에 계산할 수 있는 방법이다. 그리고 중복근을 갖는 비례 감쇠 시스템과 비비례 감쇠 시스템 모두 적용 가능한 방법이다. 또한 수치적 안정성이 보장된 방법으로 정확해, 계수행렬의 대칭성 등의 장점을 모두 유지한다.

## 6. 감사의 글

본 연구는 국가지정연구실 연구과제 중 '첨단 진동제어 기법을 이용한 구조물의 내진제어'에 대한 연구비 지원으로 수행된 것으로 연구비 지원에 감사드립니다.

## 참고문헌

1. I. U. Ojalvo, "Efficient computation of modal sensitivities for systems with repeated frequencies," *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 3, 1988, pp. 361-366
2. W. C. Mills-Curran, "Calculation of derivatives for structures with repeated eigenvalues," *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 7, 1988, pp. 867-871
3. R. L. Dailey, "Eigenvector derivatives with repeated eigenvalues," *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 4, 1989, pp. 486-491
4. I. W. Lee and G. H. Jung, "An efficient algebraic method for computation of natural frequency and mode shape sensitivities: part II, multiple natural frequencies," *Computers and Structures*, Vol. 62, No. 3, 1997, pp. 437-443
5. I. W. Lee, D. O. Kim and G. H. Jung, "Natural frequency and mode shape sensitivities of damped systems: part II, multiple natural frequencies," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 223, No. 3, 1999, pp. 413-424