

중복근을 갖는 감쇠 시스템의 고유쌍의 민감도를 계산하기 위한 대수적 방법

ALGEBRAIC METHOD FOR COMPUTATION OF EIGENPAIR SENSITIVITIES OF DAMPED SYSTEMS WITH REPEATED EIGENVALUES

최강민¹⁾ 조상원²⁾ 김운학³⁾ 이인원⁴⁾
Choi, Kang-Min Cho, Sang-Won Kim, Woon-Hak Lee, In-Won

Abstract: A simplified method for the computation of first, second and higher order derivatives of eigenvalues and eigenvectors derivatives associated with repeated eigenvalues is presented. Adjacent eigenvectors and orthonormal conditions are used to compose an algebraic equation whose order is $(n+m) \times (n+m)$, where n is the number of coordinates and m is the number of multiplicity of the repeated eigenvalues. The algebraic equation developed can be used to compute derivatives of both eigenvalues and eigenvectors simultaneously. Since the coefficient matrix in the proposed algebraic equation is non-singular, symmetric and based on N-space it is numerically stable and very efficient compared to previous methods. This method can be consistently applied to structural systems with structural design parameters and mechanical systems with lumped design parameters. To verify the effectiveness of the proposed method, the finite element model of the cantilever beam is considered.

Keyword: Sensitivity, Damped System, Eigenpair, Repeated Eigenvalues, Derivatives of Eigenvalues,
 Derivatives of Eigenvectors, Second-order Derivatives, Higher-order Derivatives

1) 한국과학기술원 건설환경공학과, 박사과정

2) 한국과학기술원 건설환경공학과, 박사과정

3) 환경대학교 토목공학과, 교수

4) 한국과학기술원 건설환경공학과, 교수

1. 서론

과거에는 구조물의 규모가 작았고, 바람이나 지진의 영향이 현재처럼 구조물의 설계의 중요한 요소가 아니었다. 즉, 정적 하중에 대한 해석만으로도 안정성을 확보한 설계를 할 수 있었다. 그러나 현대의 구조물들은 구조가 복잡해지고 대형화되고 있으며, 지진이나 바람을 포함한 동적인 영향이 설계의 중요한 요소로 인식되고 있기 때문에 구조물의 사용성과 안정성을 확보하기 위해 감쇠력이 큰 제어 시스템들을 도입하고 있다. 따라서 구조물을 보다 안전하고 효율적으로 설계하기 위해서는 동적 해석이 필수적이다.

구조물의 거동은 고유치 문제의 해, 즉 고유치와 고유벡터를 구함으로써 완전히 결정된다. 하지만 항상 존재하는 불확실한 요인에 의해 구조물의 설계 변수는 변화될 수 있으며, 이 변화는 고유치와 고유벡터의 변화로 이어진다. 이렇게 변한 고유치와 고유벡터는 구조물의 동적 거동을 변화시키며, 이는 구조물의 안정성에 중요한 영향을 미칠 수 있다.

고유치와 고유벡터의 미분값은 많은 분야에서 사용된다. 구조물의 고유치에 대한 최적화, 구조물의 동응답의 민감도, 설계 변수가 바뀐 시스템의 재 모델링 등 고유쌍의 미분이 적용되는 분야는 매우 많다.

특히, 일반적인 구조물은 구조적인 대칭성으로 인해 많은 중복된 고유치 또는 거의 같은 고유치가 이어지는 경우가 존재한다. 그래서 중복된 고유치를 갖는 경우에 고유치와 고유벡터의 미분을 구하는 것이 최근의 연구 과제이다.

중복된 고유치를 가지는 구조물의 경우 고유치와 고유벡터의 민감도를 구하기 위해서는 고유백

터를 그대로 사용하지 않고 근접벡터(adjacent eigenvector)를 사용한다. 구조물의 고유치가 m 번 중복되는 경우, 설계 변수가 변함에 따라 중복되었던 m 개의 고유치가 서로 다른 고유치로 갈라지게 된다. 이 경우 m 개의 서로 다른 고유치에 대응하는 고유벡터들을 구할 수 있다. 그러나 중복된 고유치를 갖는 고유 부공간(eigen-subspace)에서는 그에 해당되는 고유벡터는 일정한 벡터가 아니라 수없이 많은 방향을 가지는 임의의 벡터가 모두 가능하게 된다. 이러한 고유벡터를 사용한다는 것은 해석의 불안정성을 일으키게 되므로 고유벡터에 수치적으로 무리가 없는 변화를 가한 근접벡터를 사용하는 것이다.

1976년에 Nelson은 특이해와 비특이해의 합으로 고유벡터의 미분을 구할 수 있는 알고리즘을 제안했다. 이 방법은 효율적이긴 하지만 알고리즘이 복잡하고 중복된 고유치를 갖는 시스템의 경우 적용이 어렵다. Nelson 방법을 중복근의 경우까지 확장한 Ojalvo 방법이 있고, 이를 개선한 Mills-Curren 방법과 Dailey 방법이 있는데, 이들은 Nelson 방법에 기초한 것이어서 알고리즘이 역시 복잡하다. 하지만 본 연구에서는 중복된 고유치를 갖는 그때의 고유쌍만을 필요로 하기 때문에 아주 간단한 방법이다.

고유쌍의 민감도가 많이 사용되는 분야 중 하나가 변화된 구조물의 고유치와 고유벡터의 근사화이다. 이 경우 오차가 필연적으로 발생하는데, 이는 구조물이 대형화되고 자유도가 많아짐에 따라 그 영향은 무시할 수 없게 된다. 이에 고유쌍의 2차 미분값의 중요성이 부각되고 있다. 서로 다른 고유치를 갖는 비감쇠 시스템의 경우 Adelman과 Haftka, Friswell 등이 연구를 했고, 서로 다른 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 경우 Lee

et al.(1999)방법을 확장시킨 Lee et al.(2001)방법이 있다. 하지만 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 고유쌍의 2차 미분값을 구하는 방법은 현재 존재하지 않기 때문에 이를 구하는 효율적인 방법이 필요하다.

본 연구에서는 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 경우 고유쌍의 민감도를 계산하기 위한 향상된 식을 제안하고자 한다. 그리고 고유쌍의 1차 민감도를 구하는 방법을 확장하여 고유쌍의 2차 민감도를 구하는 방법을 계산할 수 있게 한다. 이를 더 확장하면 고유쌍의 고차 민감도를 구하는 방법까지도 확장할 수 있다.

수치 예제를 통해 본 연구의 효율성과 적용성을 검증한다.

2. 제안 방법

2.1. 1차 민감도

감쇠 시스템의 고유치 문제는 다음과 같다.

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K})\phi = 0 \quad (1)$$

근접벡터를 구하기 위해서 먼저 중복된 고유치에 해당되는 고유벡터로 이루어진 행렬 Φ_m 을 구성하면, 고유치 문제는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{M}\Phi_m \Lambda_m^2 + \mathbf{C}\Phi_m \Lambda_m + \mathbf{K}\Phi_m = 0 \quad (2)$$

여기서, $\Lambda_m = \lambda_m \mathbf{I}_m$ 그리고

$$\Phi_m = [\phi_{i+1} \ \phi_{i+2} \ \cdots \ \phi_{i+m}]$$

\mathbf{I}_m 은 m 차 단위 행렬이고, λ_m 은 m 차 중복된 고유치이다.

($i+1$)번째 고유벡터에 대한 정규화 조건은 다음과 같다.

$$\phi_{i+1}^T (2\lambda_{i+1} \mathbf{M} + \mathbf{C}) \phi_{i+1} = 1 \quad (3)$$

고유벡터로 이루어진 행렬 Φ_m 에 해당되는 정

규화 조건은 다음과 같다.

$$\Phi_m^T (2\lambda_m \mathbf{M} + \mathbf{C}) \Phi_m = \mathbf{I}_m \quad (4)$$

근접벡터로 이루어진 행렬은 직교변환(orthonormal transformation)에 의해 Φ_m 의 항으로 표시하여 구할 수 있다.

$$\mathbf{X}_m = \Phi_m \mathbf{T} \quad (5)$$

여기서, \mathbf{T} 는 ($m \times m$) 직교변환행렬이다.

$$\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I}_m \quad (6)$$

근접벡터로 이루어진 행렬 \mathbf{X}_m 또한 정규화 조건을 만족한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^T (2\lambda_m \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{X}_m \\ = \mathbf{T}^T \Phi_m^T (2\lambda_m \mathbf{M} + \mathbf{C}) \Phi_m \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I}_m \end{aligned} \quad (7)$$

근접벡터로 이루어진 행렬 \mathbf{X}_m 를 구하기 위해서는 먼저 직교변환행렬 \mathbf{T} 를 구해야 한다. 직교변환행렬 \mathbf{T} 를 구하기 위해 다음과 같은 고유치 문제를 생각해 보자.

$$\mathbf{M}\mathbf{X}_m \Lambda_m^2 + \mathbf{C}\mathbf{X}_m \Lambda_m + \mathbf{K}\mathbf{X}_m = 0 \quad (8)$$

여기서, 근접벡터로 이루어진 행렬 \mathbf{X}_m 의 차수는 ($n \times m$) 이고, Λ_m 의 차수는 ($m \times m$)이다.

고유치 문제 식(8)을 설계 변수에 대해 미분한 후 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\lambda_m^2 \mathbf{M} + \lambda_m \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{X}_m' + (2\lambda_m \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{X}_m \Lambda_m' \\ = -(\lambda_m^2 \mathbf{M}' + \lambda_m \mathbf{C}' + \mathbf{K}') \mathbf{X}_m \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)의 양변에 Φ_m^T 를 곱하고, $\mathbf{X}_m = \Phi_m \mathbf{T}$ 를 대입하여 정리하면 다음과 같은 새로운 고유치 문제를 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{D}\mathbf{T} = \mathbf{E}\mathbf{T}\Lambda_m' \quad (10)$$

여기서, $\mathbf{D} = \Phi_m^T (\lambda_m^2 \mathbf{M}' + \lambda_m \mathbf{C}' + \mathbf{K}') \Phi_m$ 그리고

$$\mathbf{E} = -\Phi_m^T (2\lambda_m \mathbf{M} + \mathbf{C}) \Phi_m = -\mathbf{I}_m$$

식(10)을 풀면 직교변환행렬 \mathbf{T} 를 구할 수 있고, 이를 사용하여 근접 벡터로 이루어진 행렬 \mathbf{X}_m 를 식(5)에 의해 구할 수 있다.

정규화 조건 식(7)을 설계 변수에 대해 미분한

후 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{X}_m^T(2\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{X}'_m + \mathbf{X}_m^T\mathbf{M}\mathbf{X}_m\Lambda'_m \\ & = -0.5\mathbf{X}_m^T(2\lambda_m\mathbf{M}' + \mathbf{C}')\mathbf{X}_m \end{aligned} \quad (11)$$

식(9)와 식(11)을 합쳐 하나의 선형대수방정식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \lambda_m^2\mathbf{M} + \lambda_m\mathbf{C} + \mathbf{K} & (2\lambda_m\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{X}_m \\ \mathbf{X}_m^T(2\lambda_m\mathbf{M} + \mathbf{C}) & \mathbf{X}_m^T\mathbf{M}\mathbf{X}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}'_m \\ \Lambda'_m \end{Bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -(\lambda_m^2\mathbf{M}' + \lambda_m\mathbf{C}' + \mathbf{K}')\mathbf{X}_m \\ -0.5\mathbf{X}_m^T(2\lambda_m\mathbf{M}' + \mathbf{C}')\mathbf{X}_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

고유치와 고유벡터의 1차 미분값은 식(12)를 통해 구할 수 있다.

2.2. 2차 및 고차 민감도

고유치와 고유벡터 2차 미분의 중요성은 이미 앞에서 설명하였다. 제안한 식을 바탕으로 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 고유쌍의 2차 미분을 구할 수 있는 식으로 확장해 보겠다. 이를 위해 본 방법에서는 고유치 문제 식(8)과 정규화 조건 식(7)을 두 번 미분한 식을 사용한다. 좀 더 일반적으로 고유쌍의 2차 미분을 구하기 위해 두 개의 설계 변수 (α, β)에 대한 미분을 구하겠다. 먼저 고유치 문제 식(8)을 설계 변수 (α)에 대해 미분하면 식(9)가 되고, 이를 설계 변수 (β)에 대하여 한 번 더 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & (\lambda_m^2\mathbf{M} + \lambda_m\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{X}_{m,\alpha\beta} + (2\lambda_m\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{X}_m\Lambda_{m,\alpha\beta} = \\ & -(\tilde{\mathbf{F}}_{m,\beta} + \mathbf{G}_m\Lambda_{m,\beta})\mathbf{X}_{m,\alpha} + (\tilde{\mathbf{F}}_{m,\alpha} + \mathbf{G}_m\Lambda_{m,\alpha})\mathbf{X}_{m,\beta} \\ & + (\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{m,\alpha\beta} + \tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha}\Lambda_{m,\beta} + \tilde{\mathbf{G}}_{m,\beta}\Lambda_{m,\alpha})\mathbf{X}_m + 2\Lambda_{m,\alpha}\Lambda_{m,\beta}\mathbf{M}\mathbf{X}_m \end{aligned} \quad (13)$$

마찬가지로 정규화 조건 식(7)을 설계 변수 (α)에 대하여 미분하면 식(11)이 되고, 이를 설계 변수 (β)에 대하여 한 번 더 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{X}_m^T(2\lambda_m\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{X}_{m,\alpha\beta} + \mathbf{X}_m^T\mathbf{M}\mathbf{X}_m\Lambda_{m,\alpha\beta} = \\ & -\mathbf{X}_{m,\alpha}^T\mathbf{G}_m\mathbf{X}_{m,\beta} + \mathbf{X}_m^T(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\beta} + 2\mathbf{M}\Lambda_{m,\beta})\mathbf{X}_{m,\alpha} \\ & + \mathbf{X}_m^T(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha} + 2\mathbf{M}\Lambda_{m,\alpha})\mathbf{X}_{m,\beta} \\ & + 0.5\mathbf{X}_m^T(\tilde{\tilde{\mathbf{G}}}_{m,\alpha\beta} + 2\mathbf{M}_{,\alpha}\Lambda_{m,\beta} + 2\mathbf{M}_{,\beta}\Lambda_{m,\alpha})\mathbf{X}_m \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, 각 항이 의미하는 바는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}_m = [\lambda_m^2\mathbf{M} + \lambda_m\mathbf{C} + \mathbf{K}] \\ & \tilde{\mathbf{F}}_{m,\alpha} = [\lambda_m^2\mathbf{M}_{,\alpha} + \lambda_m\mathbf{C}_{,\alpha} + \mathbf{K}_{,\alpha}] \\ & \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{m,\alpha\beta} = [\lambda_m^2\mathbf{M}_{,\alpha\beta} + \lambda_m\mathbf{C}_{,\alpha\beta} + \mathbf{K}_{,\alpha\beta}] \\ & \mathbf{G}_m = [2\lambda_m\mathbf{M} + \mathbf{C}] \\ & \tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha} = [2\lambda_m\mathbf{M}_{,\alpha} + \mathbf{C}_{,\alpha}] \\ & \tilde{\tilde{\mathbf{G}}}_{m,\alpha\beta} = [2\lambda_m\mathbf{M}_{,\alpha\beta} + \mathbf{C}_{,\alpha\beta}] \end{aligned}$$

식(13)과 식(14)를 합쳐 하나의 선형대수방정식 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \lambda_m^2\mathbf{M} + \lambda_m\mathbf{C} + \mathbf{K} & (2\lambda_m\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{X}_m \\ \mathbf{X}_m^T(2\lambda_m\mathbf{M} + \mathbf{C}) & \mathbf{X}_m^T\mathbf{M}\mathbf{X}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_{m,\alpha\beta} \\ \Lambda_{m,\alpha\beta} \end{Bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{F}}_{m,\beta} + \mathbf{G}_m\Lambda_{m,\beta})\mathbf{X}_{m,\alpha} + (\tilde{\mathbf{F}}_{m,\alpha} + \mathbf{G}_m\Lambda_{m,\alpha})\mathbf{X}_{m,\beta} \\ + (\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{m,\alpha\beta} + \tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha}\Lambda_{m,\beta} + \tilde{\mathbf{G}}_{m,\beta}\Lambda_{m,\alpha})\mathbf{X}_m + 2\Lambda_{m,\alpha}\Lambda_{m,\beta}\mathbf{M}\mathbf{X}_m \\ - \mathbf{X}_{m,\alpha}^T\mathbf{G}_m\mathbf{X}_{m,\beta} + \mathbf{X}_m^T(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\beta} + 2\mathbf{M}\Lambda_{m,\beta})\mathbf{X}_{m,\alpha} \\ + \mathbf{X}_m^T(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha} + 2\mathbf{M}\Lambda_{m,\alpha})\mathbf{X}_{m,\beta} \\ + 0.5\mathbf{X}_m^T(\tilde{\tilde{\mathbf{G}}}_{m,\alpha\beta} + 2\mathbf{M}_{,\alpha}\Lambda_{m,\beta} + 2\mathbf{M}_{,\beta}\Lambda_{m,\alpha})\mathbf{X}_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

식(15)가 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 고유치와 고유벡터의 2차 미분을 구하는 식이다. 1차 미분을 구하는 식과 비슷한데, 좌변의 계수 행렬은 변하지 않고 우변만 달라진다. 좌변식의 우변을 보면 고유쌍의 1차 미분이 필요한 것을 볼 수 있다. 즉, 식(12)를 통해 고유쌍의 1차 미분을 구한 후 식(15)를 이용해 2차 미분을 구할 수 있다는 것이다.

위와 마찬가지로 고유치 문제와 정규화 조건의 3차 미분식을 하나의 선형대수방정식으로 합쳐

고유쌍의 3차 미분을 구할 수 있고, 그 이상 고차 미분식에 대해서도 같은 방법으로 적용할 수 있다.

기존연구와는 다르게 본 연구에서는 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 1차, 2차 및 고차 민감도를 하나의 식으로 동시에 구할 수 있는 알고리즘을 제안하였다. 매우 간단한 식이며, 고유치와 고유벡터의 미분을 구하기 위해 해당 고유쌍의 정보만을 필요로 한다. 그리고 계수 행렬이 정칙성을 지니고 있어 수치적 안정성을 보장한다. 물론 'N-space'에 근거한 해석을 유지함은 물론이다.

3. 수치 예제

제안 방법의 효율성과 적용성을 검증하기 위하여 수치 예제를 수행하였다. 중복된 고유치를 갖는 시스템 예제로써 정사각형 단면을 갖는 외팔보(cantilever beam)의 유한요소모델이다.

3.1. 정사각형 단면을 갖는 외팔보(Cantilever beam with square section)

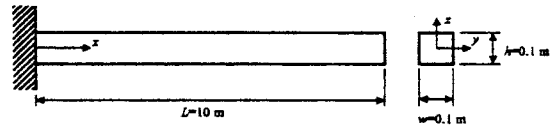
정사각형 단면을 갖는 그림 3.1 과 같은 외팔보를 생각해 보자. 이 시스템은 21 개의 절점을 가지고 절점당 4 자유도(y -변위, z -변위, y -각변위, z -각변위)를 가진다. 탄성 계수는 $2.10 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 이고, 질량 밀도는 $7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 이다. 외팔보의 높이와 폭은 모두 0.1 m 로 동일하고, 길이는 10 m 이다.

감쇠 행렬은 다음과 같이 강성 행렬과 질량 행렬의 합으로 정의되는 Rayleigh damping 으로 가정한다.

$$C = \alpha K + \beta M \quad (16)$$

여기서, α 와 β 는 Rayleigh coefficients 로 각각 0.0001 로 선택하였다.

설계 변수로는 외팔보의 높이 w 로 선정하였다.



System data

Number of nodes: 21
Number of elements: 20
Number of DOF: 80

Material properties

Young's modulus: $E=2.10 \times 10^{11}$
Mass density: $\rho=7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
 $\alpha = \beta = 0.0001$

그림 3.1 정사각형 단면을 갖는 외팔보

시스템의 고유치 해석과 제안 방법에 의한 민감도 해석 결과 일부를 표 3.1, 표 3.2 그리고 표 3.3에 나타내었다. 표 3.1에서는 원래 시스템의 고유치와 고유치의 1, 2차 미분값을 나타냈으며, 표 3.2에서는 원래 시스템의 첫 번째 고유벡터와 고유벡터의 1, 2차 미분값을 나타냈으며, 마지막으로 표 3.3에서는 설계 변수의 변화로 인해 바뀐 시스템을 고유치 해석을 통해 구한 고유치와 제안 방법의 민감도 해석을 통해 구한 고유치의 근사값, 그리고 고유쌍 근사값의 오차를 나타내었다.

표 3.1의 두 번째 열에서 보다시피 첫 번째, 두 번째 고유치가 서로 켈레복소수 형태로 나타나고 이는 세 번째, 네 번째 고유치와 동일한 값을 가짐을 볼 수 있다. 이는 본 예제로 사용한 정사각형 단면을 갖는 외팔보는 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템임을 확인할 수 있다. 그리고 세 번째 열에서 보다시피 중복된 고유치에 해당되는 1차 미분값 중 하나는 0에 가깝고, 나머지는 그렇지 않음으로 서로 다름을 알 수 있다. 마지막 열에는 2차 민감도 해석을 수행한 뒤, 고유치의 2차 미분값을 나타내었다.

표 3.3의 두 번째 열과 세 번째 열에는 설계 변수 w 를 $\Delta w=0.01w$ 만큼 변화시켰을 때 바뀐 시스템의 고유치를 나타내고 있다. 민감도 해석의 적용성을 검증하기 위해 설계 변수의 변화로 인해 바뀐 시스템의 실제 고유치와 고유치의 미분값을 사용하여 구한 고유치의 근사값을 각각 두 번째 열과 세 번째 열에 나타내었다. 설계 변수로 사용한 외팔보의 폭(w)이 변함으로 인해 중복된 고유치는 외팔보의 단면이 더 이상 정사각형을 이루지 않음으로 인해 서로 다른 고유치로 갈라지게 되는 것을 알 수 있다. 마지막 두 열은 바뀐 시스템의 실제 고유쌍과 민감도 해석을 통해 구한 고유쌍 근사값과의 오차를 나타내고 있다. 오차값들이 상당히 작음을 살펴볼 수 있고, 이는 곧 제안 방법이 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 경우 아주 좋은 결과를 보여줌을 확인할 수 있다.

표 3.1 원래 시스템의 고유치와 고유치의 1,2차 민감도

Mode number	Eigenvalues	First derivatives of eigenvalues	Second derivatives of eigenvalues
1, 2	-1.4279e-03 ±5.2496e+00i	-2.8057e-10 ∓ 3.5347e-10i	4.3916e-09 ±1.0285e-08i
3, 4	-1.4279e-03 ±5.2496e+00i	-2.2756e-02 ±5.2494e+01i	-2.7553e-01 ∓ 6.1102e-02i
5, 6	-5.4154e-02 ±3.2895e+01i	-6.6265e-10 ±2.3445e-10i	1.0084e-08 ∓ 2.4918e-09i
7, 8	-5.4154e-02 ±3.2895e+01i	-1.0818e+00 ±3.2886e+02i	-1.0806e+01 ∓ 2.6913e+00i
9, 10	-4.2409e-01 ±9.2090e+01i	6.9247e-10 ∓ 6.9600e-10i	-1.0391e-08 ±1.1514e-08i
11, 12	-4.2409e-01 ±9.2090e+01i	-8.4753e+00 ±9.2029e+02i	-8.4535e+01 ∓ 1.8358e+01i

표 3.2 원래 시스템의 첫번째 고유벡터와 고유벡터의 1,2차 민감도

Mode number	Eigenvector	Eigenvector first derivatives	Eigenvector second derivatives
1	0	0	0
2	0	0	0
3	-6.6892e+05 -6.6892e+05i	3.3446e-04 +3.3446e-04i	-5.0169e+03 -5.0169e+03i
4	-2.6442e+04 -2.6442e+04i	1.3221e-03 +1.3221e-03i	-1.9596e+02 -1.9596e+02i
5	0	0	0
6	0	0	0
7	0	0	0
8	-1.4305e+02 -1.4305e+02i	7.2527e-02 +7.2527e-02i	-1.0879e+00 -1.0879e+00i
9	-2.1439e+03 -2.1439e+03i	1.0721e-02 +1.0721e-02i	-1.6079e+01 -1.6079e+01i
10	0	0	0
11	0	0	0
12	-1.5577e+02 -1.5577e+02i	7.7887e-02 +7.7887e-02i	-1.1683e+00 -1.1683e+00i
13	-2.1442e+03 -2.1442e+03i	1.0721e-02 +1.0721e-02i	-1.6082e+01 -1.6082e+01i

표 3.3 바뀐 시스템의 고유치와 고유벡터의 근사값. 고유쌍의 근사값의 오차

Mode number	Eigenvalues	Approximated eigenvalues	Error of approximation	
			Eigenvalue	Eigenvector
1, 2	-1.4279e-03 ±5.2496e+00i	-1.4279e-03 ±5.2496e+00i	2.2283e-11	3.7376e-05
3, 4	-1.4279e-03 ±5.2496e+00i	-1.4355e-03 ±5.3021e+00i	2.6622e-08	1.0000e-04
5, 6	-5.4154e-02 ±3.2895e+01i	-5.4154e-02 ±3.2895e+01i	3.6899e-12	3.7376e-05
7, 8	-5.4154e-02 ±3.2895e+01i	-5.5241e-02 ±3.3224e+01i	1.6763e-07	1.0001e-04
9, 10	-4.2409e-01 ±9.2090e+01i	-4.2409e-01 ±9.2090e+01i	9.1422e-12	3.7376e-05
11, 12	-4.2409e-01 ±9.2090e+01i	-4.3256e-01 ±9.3010e+01i	4.6508e-07	1.0002e-04

4. 결론

본 연구에서는 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 고유치와 고유벡터의 민감도를 구하기 위한 대수적인 방법을 제안하였으며, 수치 예제를 통해 제안 방법의 효율성과 적용성을 검증하였다. 본 연구의 결과는 다음과 같이 정리할 수 있다.

첫째, 수치적으로 안정된 선형대수방정식을 통해 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 고유치와 고유벡터의 미분값의 정확한 해를 구할 수 있게 되었다.

둘째, 본 연구의 제안 방법을 확장하여 고유치와 고유벡터의 2차 민감도를 구할 수 있게 되어 설계 변수로 변화로 인해 바뀐 시스템의 고유쌍을 근사화하는 데 더 정확한 결과를 줄 수 있게 되었다. 그리고 동일한 방법을 사용하여 고차 민감도까지 확장할 수 있게 되었다.

셋째, 본 연구의 제안 방법은 'N-space'에 바탕을 둔 방법이며, 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 제안식의 계수 행렬이 대칭이므로 계산 시간 및 저장 용량에 있어 매우 효율적인 방법이다.

결론적으로 본 연구의 제안 방법은 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 고유치와 고유벡터의 민감도의 정확한 해를 구할 수 있는 수치적 안정성이 보장된 아주 효율적인 방법으로, 이를 확장하여 고유쌍의 2차 민감도 및 고차 민감도의 정확한 해를 구할 수 있게 하였다.

감사의 글

본 연구는 국가지정연구실 연구과제 중 '첨단 진동제어 기법을 이용한 구조물의 내진제어'에 대한 연구비 지원으로 수행된 것으로 연구비 지원에 감사드립니다.

참고문헌

[1] I. U. Ojalvo, "Efficient Computation of Modal Sensitivities for Systems with Repeated Frequencies," *AIAA Journal*, 26, 361-366 (1988).

[2] W. C. Mills-Curran, "Calculation of Derivatives for Structures with Repeat Eigenvalues," *AIAA Journal*, 26, 867-871 (1988).

[3] R. L. Dailey, "Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues," *AIAA Journal*, 27, 486-491 (1989).

[4] W. Zhong and G. Cheng, "Second-order Sensitivity Analysis of Multimodal Eigenvalues and Related Optimization Techniques," *Journal of Structural Mechanics*, 14, 421-436 (1986).

[5] M. L. Bernard and A. J. Bronowicki, "Modal Expansion Method for Eigensensitivity with Repeated Roots," *AIAA Journal*, 32, 1500-1506 (1994).

[6] I. W. Lee and G. H. Jung, "An Efficient Algebraic Method for Computation of Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities: Part II, Multiple Natural Frequencies," *Computers and Structures*, 62, 437-443 (1997).

[7] I. W. Lee and D. O. Kim, "Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities of Damped Systems: Part II, Multiple Natural Frequencies," *Journal of Sound and Vibration*, 223, 413-424 (1999).

[8] H. M. Adelman and R. T. Haftka, "Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems," *AIAA Journal*, 24, 823-832 (1986).

[9] M. I. Friswell, "Calculation of Second and Higher Order Eigenvector Derivatives," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 18, 919-921 (1995).

[10] 조흥기, "감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 민감도," 석사학위 논문, 한국과학기술원 (2001).