

구조물의 고유치 해석을 위한 가속화된 Lanczos 방법의 적용 및 가속화된 부분공간반복법과의 비교

Application of Accelerated Lanczos Method and Comparison with Accelerated Subspace Iteration Method for Eigenanalysis of Structures

김병완* · 정형조** · 오주원*** · 이인원****

Kim, Byoung-Wan · Jung, Hyung-Jo · Oh, Ju-Won · Lee, In-Won

1. 서 론

구조물의 동적해석을 위한 효율적인 방법으로서 모드중첩법이 널리 이용되고 있으며 모드중첩법을 이용하여 구조물의 동적해석을 수행할 경우 고유치 해석이 반드시 선행된다. 고유치 해석을 위한 여러 가지 해법 중 부분공간반복법(Bathe 등, 1972)과 Lanczos 방법(Lanczos, 1950)이 가장 효율적인 방법으로 알려져 있다. 부분공간반복법의 성능을 더욱 가속화하기 위해 행렬의 거듭제곱 기법이 도입된 바 있다(Lam 등, 1994). 유사한 기법이 양자물리학 분야에서 Lanczos 알고리즘에 이미 적용된 바 있으나(Grosso 등, 1993) 구조공학 분야의 Lanczos 방법에는 아직 적용된 바가 없다. 본 연구에서는 가속화된 Lanczos 알고리즘을 구조공학 분야의 고유치 해법에 적용하였다. 수치예제를 통해 제안 방법의 효율성을 검증하였으며 아울러 기존의 가속화된 부분공간반복법과의 비교 및 분석을 수행하였다.

2. 가속화된 부분공간반복법

구조물의 고유치 해석을 위한 기존의 부분공간반복법의 알고리즘은 다음 식과 같은 역방향 반복 과정을 포함한다.

$$[\bar{X}]_{k+1} = [K]^{-1}[M][X]_k \quad (k=1, 2, \dots) \quad (1)$$

식 (1)에서 $[M]$, $[K]$ 는 각각 질량행렬, 강성행렬이며 $[\bar{X}]$ 는 Ritz 벡터로 구성된 행렬을 나타내며 $[X]$ 는 근사화된 고유벡터로 구성된 행렬을 나타낸다. Lam 등(1994)은 기존의 부분공간반복법의 수렴을 가속화하기 위해 식 (2)와 같이 동적행렬 $[K]^{-1}[M]$ 의 거듭제곱 기법을 도입한 수정된 역방향 반복 과정을 제안하였다.

$$[\bar{X}]_{k+1} = ([K]^{-1}[M])^\delta [X]_k \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2)$$

여기에서 δ 는 1이상의 정수이다.

* 한국과학기술원 건설및환경공학과 박사과정 · 공학석사 · 042-869-3658(E-mail:kimbw@kaist.ac.kr)
** 한국과학기술원 건설및환경공학과 연구조교수 · 공학박사 · 042-869-5658(E-mail:hjung@mail.kaist.ac.kr)
*** 정희원 · 한남대학교 토목환경공학과 교수 · 공학박사 · 042-629-7560(E-mail:ohjw@mail.hannam.ac.kr)
**** 정희원 · 한국과학기술원 건설및환경공학과 교수 · 공학박사 · 042-869-3618(E-mail:iwlee@kaist.ac.kr)

3. 가속화된 Lanczos 방법

가속화된 부분공간반복법과 유사한 기법의 Lanczos 알고리즘이 양자물리학 분야에서 Grosso 등(1993)에 의해 이미 제안된 바 있다. 그들은 양자의 고유상태 해석을 위한 Lanczos 순환식의 수렴성을 향상시키기 위해 기존의 연산자행렬 $[H]$ 대신 $[H]$ 의 제곱값을 이용하였다. 향상된 Lanczos 순환식이 식 (3)에 제시되어 있다.

$$b_{n+1}\{f\}_{n+1}=[H]^2\{f\}_n-a_n\{f\}_n-b_n\{f\}_{n-1} \quad (n=1,2,\dots) \quad (3)$$

여기에서 $\{f\}$ 는 기저함수벡터이고 a, b 는 상수값의 계수들이다. 한편, 구조공학 분야의 고유치 해석을 위한 Lanczos 순환식은 다음과 같다.

$$\beta_i\{x\}_{i+1}=[K]^{-1}[M]\{x\}_i-\alpha_i\{x\}_i-\beta_{i-1}\{x\}_{i-1} \quad (i=1,2,\dots) \quad (4)$$

여기에서 $\{x\}$ 는 Lanczos 벡터이고 α, β 는 계수들이다. 본 연구에서는 기존의 Lanczos 방법의 성능 향상을 위해, 식 (3)에서 제시된 연산자행렬의 거듭제곱 기법을 식 (4)의 동적행렬에 적용하여 식 (5)와 같은 수정된 Lanczos 순환식을 제안하였다.

$$\beta_i\{x\}_{i+1}=([K]^{-1}[M])^\delta \{x\}_i-\alpha_i\{x\}_i-\beta_{i-1}\{x\}_{i-1} \quad (i=1,2,\dots) \quad (4)$$

여기에서 δ 는 1이상의 정수이다.

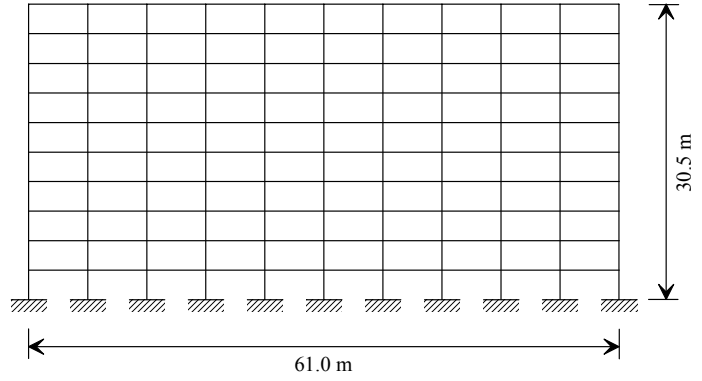
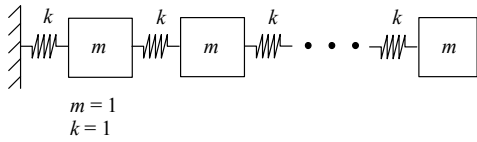
4. 수치예제

제안 방법의 효율성 검증과 가속화된 부분공간반복법과의 비교 및 분석을 위해 스프링-질량 시스템 (Chen, 1993), 2차원 프레임 (Bathe 등, 1972), 3차원 프레임 (Bathe 등, 1972), 3차원 빌딩 (Kim 등, 1999)에 대해 수치해석을 수행하였다. 수치해석을 위한 예제구조물의 형상과 물성치가 그림 1에 제시되어 있다. 구하고자 하는 고유쌍의 수를 늘려 가면서 수치해석을 수행하였으며 계산된 고유쌍의 오차가 10^{-6} 이내에 도달할 때까지 소요된 연산회수를 조사함으로써 수렴성과 효율성을 파악하였다.

표 1에 그 결과가 제시되어 있다. 표 1에서 δ 는 동적행렬의 거듭제곱 지수값을 나타내며 $\delta = 1$ 인 경우가 기존의 부분공간방법과 기존의 Lanczos 방법에 해당한다. 동적행렬의 거듭제곱 시 수치적 불안정이 야기되는 경우가 있다. 표 1의 '*'는 그러한 수치적 불안정에 따른 수렴의 실패를 나타낸다. 따라서, 동적행렬의 거듭제곱 시 적절한 지수값의 선택이 요구된다. 표 1에서 알 수 있듯이 동적행렬의 거듭제곱을 도입한 가속화된 Lanczos 방법이 기존의 Lanczos 방법보다 수렴이 빨라 연산회수가 더 적으며 가속화된 부분공간반복법도 동일한 양상을 띤다. 또한, 가속화된 Lanczos 방법의 연산회수가 가속화된 부분공간반복법의 연산회수보다 더 적어서 가속화된 Lanczos 방법이 가속화된 부분공간반복법보다 더 효율적임을 알 수 있다.

5. 결 론

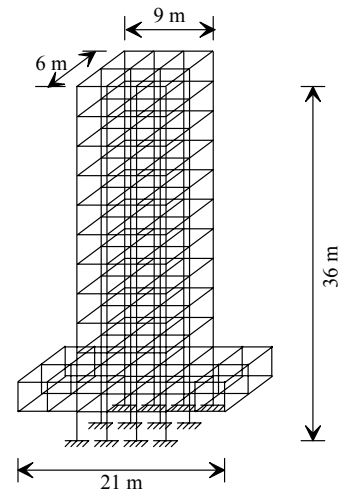
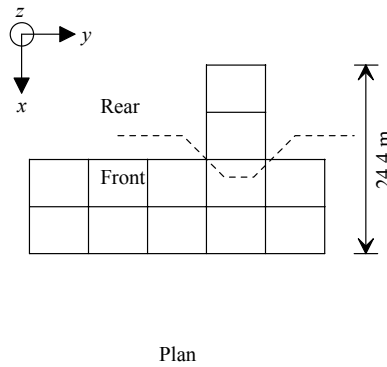
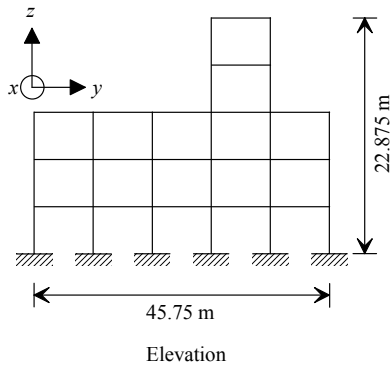
구조물의 효율적인 고유치 해석을 위해 동적행렬의 거듭제곱 기법을 도입한 가속화된 Lanczos 방법을 제안하였으며 수치해석 결과로부터 다음의 결론을 도출하였다. 가속화된 Lanczos 방법이 기존의 Lanczos 방법보다 수렴성이 향상되어 연산회수가 더 적으며 가속화된 Lanczos 방법이 가속화된 부분공간반복법보다 더 효율적이다. 가속화된 Lanczos 방법에서 동적행렬의 거듭제곱 시 가장 적절한 지수값은 2이다.



$A = 0.2787 \text{ m}^2, I = 8.631 \times 10^{-3} \text{ m}^4, E = 2.068 \times 10^7 \text{ Pa}, \rho = 5.154 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$

(1) 스프링-질량 시스템(100 자유도)

(2) 2차원 프레임(330 자유도)



Column in front building : $A = 0.2787 \text{ m}^2, I = 8.631 \times 10^{-3} \text{ m}^4$
 Column in Rear building : $A = 0.3716 \text{ m}^2, I = 10.789 \times 10^{-3} \text{ m}^4$
 All beams into x-Diretion : $A = 0.1858 \text{ m}^2, I = 6.473 \times 10^{-3} \text{ m}^4$
 All beams into y-Diretion : $A = 0.2787 \text{ m}^2, I = 8.631 \times 10^{-3} \text{ m}^4$

$E = 2.068 \times 10^7 \text{ Pa}$
 $\rho = 5.154 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$

$A = 0.01 \text{ m}^2, I = 8.3 \times 10^{-6} \text{ m}^4$
 $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}, \rho = 7850 \text{ kg/m}^3$

(3) 3차원 프레임(468 자유도)

(4) 3차원 빌딩(1008 자유도)

그림 1. 예제구조물

표 1. Lanczos 방법과 부분공간반복법의 연산회수: (a) 부분공간반복법, (b) Lanczos 방법

예제 구조물	고유쌍수	$\delta = 1$		$\delta = 2$		$\delta = 3$		$\delta = 4$	
		(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
(1)	2	71112	38663	43944	29823	*	26954	*	23653
	4	338760	78922	210440	58529	*	47567	*	44122
	6	875432	120458	556280	85712	*	73040	*	69391
	8	2385864	157649	1101960	117587	*	103055	*	99550
	10	3527480	214729	1908560	154418	*	138122	*	*
(2)	6	26553504	10908273	21748440	7429050	17579136	7072452	*	6633536
	12	56232000	20855865	44134200	13578945	*	11688377	*	11237625
	18	55589760	27029145	40918584	18676209	*	16508507	*	16047093
	24	107787744	31581179	74885472	22516533	*	20164797	*	*
	30	484073760	102944376	329454420	65994807	*	54112986	*	*
(3)	10	168649848	71602154	118821240	50687925	118044936	48705515	122291280	46214349
	20	345792888	181780512	254346120	124269611	244236888	116680070	227552472	108715163
	30	1016556408	307269560	666041520	215884077	706710792	192064376	670139136	182518601
	40	1764843192	684162222	1304151480	453454527	1119500856	378770940	*	356596304
	50	3298203720	1024104917	2411304840	656188310	2227869864	553972908	*	504420108
(4)	20	901881792	395079020	747171936	278717178	*	*	*	*
	40	3515936832	1196316954	2703756096	801878160	*	*	*	*
	60	7678655040	3045578295	5467288512	1993108128	*	*	*	*
	80	9191695680	3398746793	*	2509125474	*	*	*	*
	100	8474984064	3536190824	*	3625240574	*	*	*	*

감사의 글

본 연구는 국가지정 연구실인 구조물 내진제어 연구실의 지원 하에 이루어졌습니다. 지원에 깊은 감사 드립니다.

참고문헌

1. Bathe, K.J. and Wilson, E.L. (1972) Large eigenvalue problems in dynamic analysis, *J. Engrg. Mech. ASCE*, Vol. 98, pp. 1471-1485.
2. Chen, H.C. (1993) Partial eigensolution of damped structural systems by Arnoldi's method, *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, Vol. 22, pp. 63-74.
3. Grosso, G., Martinelli, L. and Parravicini, G.P. (1993) A new method for determining excited states of quantum systems, *Nuovo Cimento D*, Vol. 15, No. 2-3, pp. 269-277.
4. Kim, M.C. and Lee, I.W. (1999) A computationally efficient algorithm for the solution of eigenproblems for large structures with non-proportional damping using Lanczos method, *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, Vol. 28, pp. 157-172.
5. Lam, Y.C. and Bertolini, A.F. (1994) Acceleration of the subspace iteration method by selective repeated inverse iteration, *Fin. Elem. Anal. Des.*, Vol. 18, pp. 309-317.
6. Lanczos, C. (1950) An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators, *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, Vol. 45, No. 4, pp. 255-282.