

〈論 文〉

# Ritz 벡터를 이용한 수정 분할구조해석법

Modified Component Mode Synthesis Method Using Ritz Vectors

이 인 원\* · 김 동 옥\*\*

In Won Lee and Dong Ok Kim

〈1992년 11월 30일 접수 ; 1993년 2월 27일 심사완료〉

## ABSTRACT

In general, the dynamic analysis with FEM(Finite Element Method) of large structures requires large computer memory space and long computational time. For the purpose of economical dynamic analysis of large structures, most of engineers want to use an efficient solution algorithm. This paper reports the modified CMS(Component Mode Synthesis) method which uses more efficient algorithm than the classical CMS method. In this paper, it is shown that Ritz vector sets can play the role of normal mode vector sets of substructures in the CMS algorithm. The modified CMS method has good convergence performance compared with that of the classical CMS method.

## 1. 서 론

구조물의 고유진동수와 고유 진동모우드 등의 동 특성을 파악하는 것은 구조물의 설계, 제작 및 운영에 있어서 필수적인 과정이다. 일반적으로 구조물의 동특성 해석은 유한요소법을 이용하여 수행되어진다. 이때 유한요소법을 적용하는 해석대상이 복잡하거나 매우 크다면 해석에 필요한 기억용량과 연산회수가 상당히 증가하게 되므로, 구조해석에 많은 비용과 시간을 투자하여야 한다. 이러한 문제를 해결하기 위한 방법으로 분할구조해석법(CMS)<sup>(1,2,3)</sup>이 널리 사용되고 있다. 이 방법은 대형 구조물의 해석을 수행할 때, 계산시간과 기억용량 측면에서 낭비요소가 되는 고차모우드들을 효과적으로 제거하여 보다 경제적인 해석을 수행할 수 있게 해준다. 그러나 이

방법은 부분구조의 고유모우드(normal mode) 산출 과정을 포함하고 있으므로, 컴퓨터 기억용량의 측면에서는 효과적이지만 계산시간의 면에서는 개선할 점이 남아있다. 이러한 문제점을 개선하기 위하여, 본 연구에서는 각 부분구조의 고유모우드 대신 Ritz 벡터를 사용하여 기존 분할구조해석법의 개선방향을 제시하였다.

Ritz 벡터를 이용한 구조해석 분야를 보면 1980년대에 Wilson과 Yuan, Dickens<sup>(4)</sup>이 Ritz 벡터를 사용하여 시스템의 차수를 줄이고, 축약된 시스템의 동적해석으로 전체시스템의 거동을 근사할 수 있음을 보였다.

## 2. 이 론

### 2.1 분할구조해석법

분할구조해석법은 Rayleigh-Ritz 해석법에 그 바탕을 둔 방법으로 1960년대에 Hurty<sup>(5)</sup>에 의해 처음 소개되었다. 이것은 해석하고자 하는 구조물을 여러

\*정회원, 한국과학기술원 토목공학과

\*\*정회원, 한국과학기술원 기계공학과

개의 부분구조로 나누어 부분구조모델을 만들고, 각각에 대한 해석결과를 전체 구조물 해석에 이용하는 방법이다.

분할구조해석법의 진행단계를 살펴보면 다음과 같다. 먼저 부분구조들의 지배방정식을 구성한다. 즉 해석하고자 하는 임의의 구조물을 Fig. 1과 같이 여러개의 부분구조물의 조합으로 가정하고, Fig. 2와 같은  $r$ 번째 부분구조의 지배방정식을 구성한다 [식 (1)]. 다음으로 이에 해당하는 변환행렬( $T_F$ )을 구한다 [식 (2)]. 여기서 구한 변환행렬을 이용하여 부분구조 지배방정식들을 축약(reduction)하고 [식 (6)], 재조합하여 전체구조물의 축약된 지배방정식을 구성한다. 이때 전체구조물의 지배방정식은 전체 구조물을 모델링하여 구한 지배방정식보다 낮은 차수를 갖는다. 마지막으로 전체 지배방정식의 근을 일반적인 고유치문제해법을 이용하여 구한다. 구해진 고유진동수로 전체 구조물의 고유진동수를 근사할 수 있으며, 고유 모드와 변환행렬을 이용하여 전체 구조물의 고유 진동모드를 근사할 수 있다. 각 식에서 하첨자  $i, j$ 는 각각 부분구조의 경계와 내부에서의 자유도를 뜻한다.

$$\begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix}_r \begin{Bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_j \end{Bmatrix}_r + \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}_r \begin{Bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_j \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} f_i \\ 0 \end{Bmatrix}_r \quad (1)$$

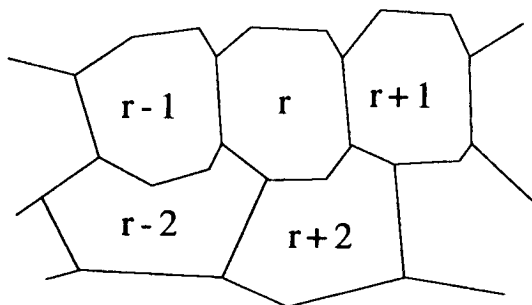
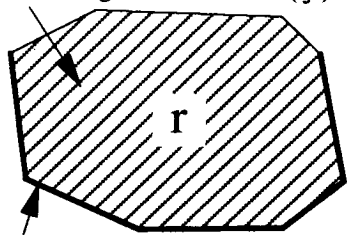


Fig. 1 전체구조물

Internal degree of freedom ( $j$ )



Interface degree of freedom ( $i$ )

Fig. 2  $r$ 번째 부분구조물

$$\{x\}_r = \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix}_r = [T_F]_r \{q\}_r \quad (2)$$

$$x \in R^n, q \in R^m, T_F \in R^{n \times m}, m < n$$

$$[\bar{m}]_r = [T_F]_r^T \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix}_r [T_F]_r \quad (3)$$

$$[\bar{k}]_r = [T_F]_r^T \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}_r [T_F]_r \quad (4)$$

$$\{\bar{f}\}_r = [T_F]_r^T \begin{Bmatrix} f_i \\ 0 \end{Bmatrix}_r \quad (5)$$

$$[\bar{m}]_r \{\ddot{q}\}_r + [\bar{k}]_r \{q\}_r = \{\bar{f}\}_r \quad (6)$$

$$\bar{f} \in R^m, \bar{m} \in R^{m \times m}, \bar{k} \in R^{m \times m}$$

식 (2)는 이 방법이 기본적으로 Rayleigh-Ritz 해석법과 동일하다는 것을 보여준다. 단지 구조물을 여러 부분구조로 분할하여 Rayleigh-Ritz 해석법을 적용하고 그 결과를 재구성하여 전체 구조물에 대한 축약된 방정식을 구한다는 차이가 있을 뿐이다. 분할구조해석법은 사용하는 변환행렬의 종류에 따라 고정경계법(fixed interface method)<sup>(6)</sup>, 자유경계법(free interface method)<sup>(7)</sup> 그리고 하중경계법(load-ed interface method)<sup>(8)</sup>으로 분류된다. 그 중 많이 사용되고 있는 고정경계법에 대하여 간단히 설명하면 2.2절과 같다.

## 2.2 고정경계법

이 방법은 1960년대에 개발되었으며 변환행렬 [ $T_F$ ]로 Craig-Bampton 모드집합을 사용한다. Craig-Bampton 모드집합은 경계가 고정된 부분구조의 고유 모드와 제한 모드(constraint mode)로 구성된다. 고유 모드는 식 (7)과 같은 고유치 문제에서 구할 수 있으며, 여기서 구한 고유 모드 중 낮은 주파수에 해당하는  $k$ 개만을 선택하여 변환행렬에 사용한다.

$$[k_{jj}]_r \{\phi_{jj}\}_r = [m_{jj}]_r \{\phi_{jj}\}_r [\Lambda_{jj}]_r \quad (7)$$

제한 모드는 부분구조의 접경자유도(interface degree of freedom) 중 한곳에만 단위변형을 가하고 나머지 접경자유도는 모두 고정시켰을 때의 변형 형태이다. 이때 내부자유도는 어떤 구속도 받지 않는다. 이 모드는 식 (8)과 같은 정적 평형방정식에서 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}_r \begin{Bmatrix} I_{ii} \\ \phi_{ji} \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} F_{ii} \\ 0 \end{Bmatrix}_r, \quad (k < j) \quad (8)$$

$$\{\phi_{ji}\}_r = -[k_{jj}]_r^{-1} [k_{ji}]_r \quad (9)$$

위에서 구한 결과를 이용하여 변환행렬( $T_F$ )을 구성

한다.

$$[T_F]_r(q)_r = \begin{bmatrix} I_{ii} & 0 \\ \phi_c & \phi_N \end{bmatrix}_r \begin{Bmatrix} x_i \\ q_k \end{Bmatrix}_r \quad (10)$$

$$[\phi_c] = [\phi_{ji}]_r : \text{Constraint Mode}$$

$$[\phi_N] = [\phi_{jk}]_r : \text{Normal Mode}$$

축약된 강성행렬과 질량행렬, 힘벡터를 조합하여 전체 지배방정식을 구성한다. 이 과정을 부분구조가 두개인 경우를 예로 들어 보면 다음과 같다.

각 부분구조의 축약된 강성행렬과 질량행렬은

$$[\bar{k}]_r = [T_F]_r^T \begin{bmatrix} k_{ii} k_{ii} \\ k_{ji} k_{jj} \end{bmatrix}_r [T_F]_r = \begin{bmatrix} \bar{k}_{ii}^r & 0 \\ 0 & \bar{k}_{kk}^r \end{bmatrix} \quad (11)$$

$r = 1, 2$

$$[\bar{m}]_r = [T_F]_r^T \begin{bmatrix} m_{ii} m_{ij} \\ m_{ji} m_{jj} \end{bmatrix}_r [T_F]_r = \begin{bmatrix} \bar{m}_{ii}^r & \bar{m}_{ik}^r \\ \bar{m}_{ki}^r & \bar{m}_{kk}^r \end{bmatrix} \quad (12)$$

$r = 1, 2$

이며, 이것을 재구성하여 구한 전체구조물의 지배방정식은

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (13)$$

$X \in r^{2k+i}, M \in r^{(2k+i) \times (2k+i)}, K \in r^{(2k+i) \times (2k+i)}$

이다. 여기서 전체구조물의 강성행렬과 질량행렬은

$$[K] = \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_{ii}^1 + \bar{k}_{ii}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_{kk}^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \bar{m}_{kk}^1 & \bar{m}_{ik}^1 & 0 \\ \bar{m}_{ik}^1 & \bar{m}_{ii}^1 + \bar{m}_{ii}^2 & \bar{m}_{ik}^2 \\ 0 & \bar{m}_{ki}^2 & \bar{m}_{kk}^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

이고, 힘벡터와 변위벡터는 다음과 같다.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{f}_i^1 + \bar{f}_i^2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (16)$$

여기서  $\{\bar{f}_i^1\} = -\{\bar{f}_i^2\}$ 이다

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} q_k^1 \\ x_i \\ q_k^2 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

여기서  $\{x_i\} = \{x_i^1\} = \{x_i^2\}$ 이다

### 2.3 Ritz 벡터

어떤 시스템의 Ritz 벡터란 그 시스템의 질량행렬에 대하여 단위직교인 벡터들을 뜻한다. 즉 식 (18)을 만족하는 벡터들이다.  $n$ 차 시스템에 있어서  $n$ 개의 Ritz 벡터를 구한다면 이 벡터를 이용하여 그 시

스템을 완전히 기술할 수 있다.

$$\{\varphi\}^T [M] \{\varphi\}_j = \delta_{ij} \quad (18)$$

여기서  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker delta 이다

Ritz 벡터를 구하는 과정을 순차적으로 적으면 다음과 같다.

단계 1. : 초기벡터 설정(식 (19)를 이용)

여기서  $\{F\}$ 는 외력벡터로 임의로 정한다.

$$[K]\{\bar{\varphi}\}_1 = \{F\} \quad (19)$$

$$\{\varphi\}_1 = \frac{1}{\beta_1} \{\bar{\varphi}\}_1 \quad (20)$$

$$\beta_1^2 = \{\bar{\varphi}\}^T [M] \{\bar{\varphi}\}_1 \quad (21)$$

단계 2. : 다음 벡터를 구한다.

(vector iteration 이용)

$$[K]\{\bar{\varphi}\}_i = [M]\{\varphi\}_{i-1} \quad i > 1 \quad (22)$$

단계 3. : 직교화 과정

(gram-schmidt orthogonalization)

단계 2.에서 구한 벡터를 이미 구해진 벡터들에 대하여 직교화 시킨다.

$$\{\bar{\varphi}\}_i = \{\bar{\varphi}\}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \{\varphi\}_j \quad (23)$$

$$\alpha_j = \{\bar{\varphi}\}_i^T [M] \{\bar{\varphi}\}_j \quad (24)$$

단계 4. : 단위화 과정(normalization)

단위 3.에서 구한 벡터를 단위화 시킨다.

$$\{\varphi\}_i = \frac{1}{\beta_i} \{\bar{\varphi}\}_i$$

$$\beta_i^2 = \{\bar{\varphi}\}_i^T [M] \{\bar{\varphi}\}_i \quad (26)$$

단계 5. : 단계 2.부터 반복

위의 과정을 통해서 특정 시스템의 Ritz 벡터들을 구할 수 있다. 위의 방법은 초기벡터를 어떻게 설정하느냐에 따라 매우 다른 형태의 Ritz 벡터들이 구해진다. 그러나 단계 2가 Vector Iteration과 같으므로 초기벡터가 저차 고유모우드에 대해서 직교되지 않는다면 구해진 벡터들은 시스템의 저차 고유모우드성분을 항상 포함하고 있다. 그러므로, 여기에서 구한 Ritz 벡터들을 이용하여 시스템의 저차모우드를 효과적으로 표현할 수 있다. 이것은 고유모우드벡터대신 Ritz 벡터를 이용하여 해석 대상 시스템의 지배방정식을 축약시킬 수 있음을 뜻하는 것이기도 한다.

### 3. 제안방법

기존의 고정경계법을 사용하여 구조물을 해석하기

위해서는, 경계를 고정시킨 부분구조물의 고유 모우드들을 구해야 한다. 구조해석 과정 중 시스템의 고유진동수와 고유 모우드를 구하는 과정이 다른 과정에 비해서 많은 시간을 요구한다는 것은 잘 알려진 사실이다. 그러므로 분할구조해석법을 수행하는 과정에서 이 시간을 줄일 수 있다면 보다 빠른 수렴특성을 갖는 해석법을 구할 수 있다.

본 연구에서 제안하는 방법은 기존의 분할구조해석법에서 사용하는 고유 모우드 대신 부분구조의 Ritz 벡터를 구하여 사용하자는 것이다. Ritz 벡터를 이용해 축약, 해석하여 구한 결과가 시스템의 특성을 큰 오차없이 보여준다는 것이 이미 증명되었으므로<sup>(4)</sup>, 제안방법은 기본 원리상 문제가 없다. Ritz 벡터를 구하는 과정은 그다지 많은 계산시간을 요구하지 않으므로, 이를 이용한 해석은 상당한 시간적 이득을 줄 수 있을 것이다. 제안방법을 고정경계법에 적용하면 다음과 같다.

Ritz 벡터를 이용하여, 고정경계법에 사용되는 변환행렬을 다음과 같이 변형한다.

$$[T_F]_r = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \phi_C & \phi_R \end{bmatrix}_r \quad (27)$$

여기서 하첨자  $C$ 와  $R$ 은 각각 제한 모우드벡터와 Ritz 벡터를 뜻하는 것이며, 하첨자  $r$ 은  $r$ 번째 부분구조를 뜻한다. 식 (27)에 사용된 Ritz 벡터는 부분구조물의 경계를 고정한 상태에서 구한  $k$ 개의 Ritz 벡터이다. 이것은 부분구조의 고유 모우드를 구하기 위해 사용한 고유치문제, 즉 식 (7)의 질량행렬과 강성행렬을 이용하여 구할 수 있다.

#### 4. 예제 및 결과

제안방법의 효용성을 알아보기 위하여 예제를 수행하였다. 해석 대상 시스템으로, 길이가 10m인 원편 끝은 고정되어져 있고 오른쪽 끝은 단순지지되어 있는 보를 선택하였다. 유한요소법을 이용하여, 이 보를 100개의 요소(element)로 나누었으며, 각 절점의 자유도는 수직방향의 변형( $v$ )과 회전변형( $\theta$ )으로 하였다. 분할구조해석법을 적용하기 위해, Fig. 3에서 볼 수 있듯이 시스템을 두개의 부분구조로 나누었다.  $\rho A_1$ 과  $EI_1$ 은 부분구조 1의 물성치이며  $\rho A_2$ 와  $EI_2$ 는 부분구조 2의 물성치이다. 시스템의 전체 자유도수는 199이며, 각 부분구조는 50개, 51개씩의

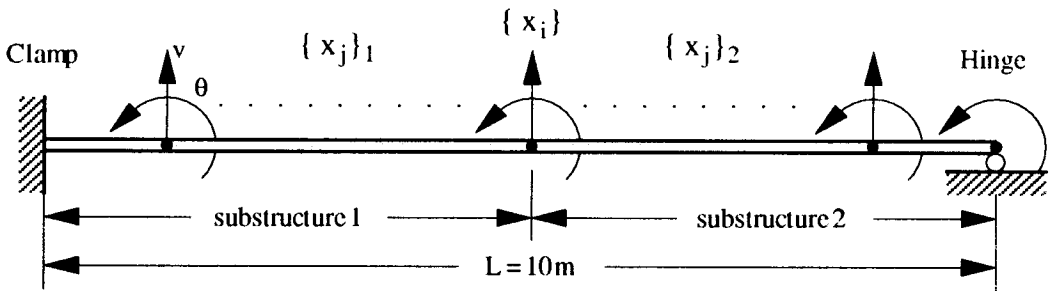


Fig. 3 예제

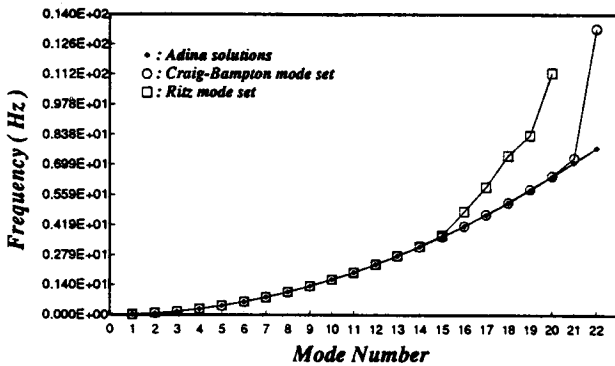


Fig. 4 고유진동수 비교(기저벡터 10개)  
( $\rho A_1=1, EI_1=1, \rho A_2=1, EI_2=1$ )

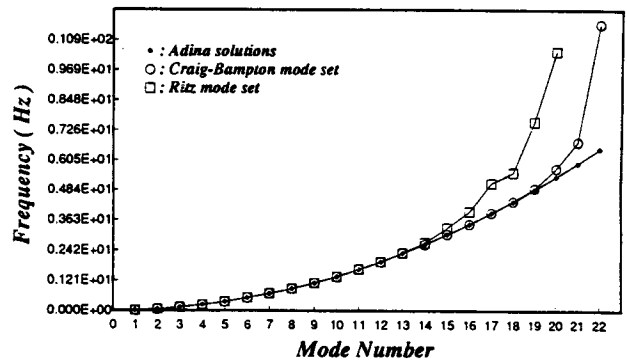


Fig. 5 고유진동수 비교(기저벡터 10개)  
( $\rho A_1=1, EI_1=1, \rho A_2=2, EI_2=1$ )

자유도를 갖도록 하였다. 상용코드인 ADINA 프로그램과 기존 분할구조해석법 중에서 고정경계법, 그리고 본 연구에서 제안한 방법을 이용하여 이 시스템의 고유 진동수를 구해 보았다. 사용한 컴퓨터의 기종은 SUN3/160이며 Fortran 77을 이용하여 필요한 프로그램을 작성하였다. Fig. 4, Fig. 5 그리고 Fig. 6은 부분구조의 물성치들을 바꾸어 가면서 각 방법들로 부터 구한 보의 고유 진동수를 비교한 것이다. ADINA의 결과를 기준으로 할 때, 저차모우드에서 제안방법은 기존 고정경계법과 같은 정도의 정확도를 유지하고 있다. 이 그림들에서 기저벡터(basis vector)란 변환행렬을 구성하는 벡터 중 제한 모우드이외의 벡터, 즉 고정경계법에서는 고유 모우드벡터 그리고 제안방법에서는 Ritz 벡터를 뜻한다. Fig. 7부터 Fig. 12까지는 제안방법과 기존 고정경계법의 특성을 비교한 것이라 할 수 있다. 각 그림들에서 유용가능벡터(available vector)란 고정경계법과 제안방법을 사용해 구한 고유진동수값이 ADINA를 이용하여 구한 것과 비교할 때, 그 오차가 3%미

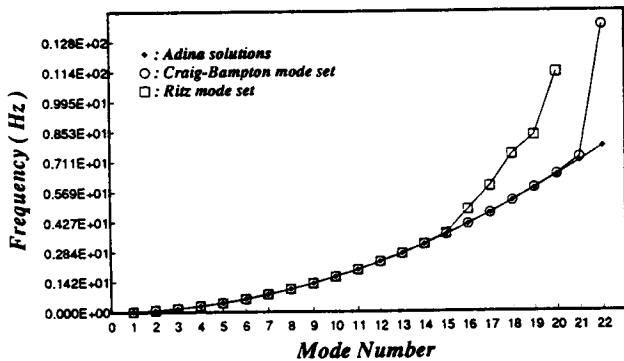


Fig. 6 고유진동수 비교(기저벡터 10개)  
( $\rho_{A1}=1, EI_1=1, \rho_{A2}=2, EI_2=2$ )

만인 모우드벡터들을 뜻한다. 기저벡터수를 비교한 Fig. 7, Fig. 9 그리고 Fig. 11에서 알 수 있듯이 제안 방법을 이용하면 기존 고정경계법에서보다 2개 혹은 3개의 기저벡터를 더 사용하여야, 기존 고정경계법의 결과와 같은 수의 유용가능벡터를 구할 수 있다. 이 말은 제안방법을 이용하여 기존 고정경계법과 같은 정확도의 결과를 얻으려면 더 많은 기억용량을 사용해야 한다는 것을 의미한다. 즉 기억용량면에서는 기존 고정경계법의 성능이 제안방법의 것보다 다소 우수하다. 그러나 연산회수 비교를 보여주는 Fig.

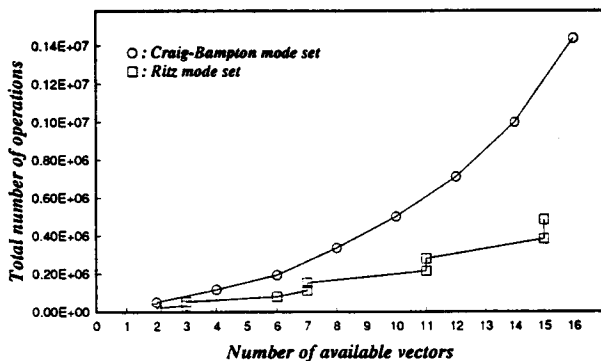


Fig. 8 연산회수 비교( $\rho_{A1}=1, EI_1=1, \rho_{A2}=1, EI_2=1$ )

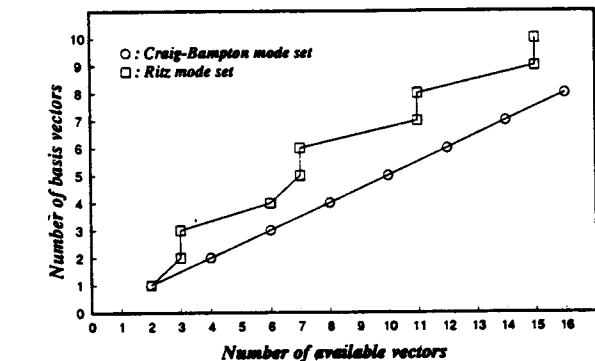


Fig. 7 기저벡터수 비교( $\rho_{A1}=1, EI_1=1, \rho_{A2}=1, EI_2=1$ )

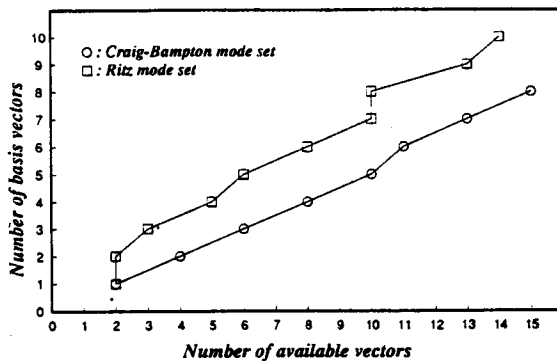


Fig. 9 기저벡터수 비교( $\rho_{A1}=1, EI_1=1, \rho_{A2}=2, EI_2=1$ )

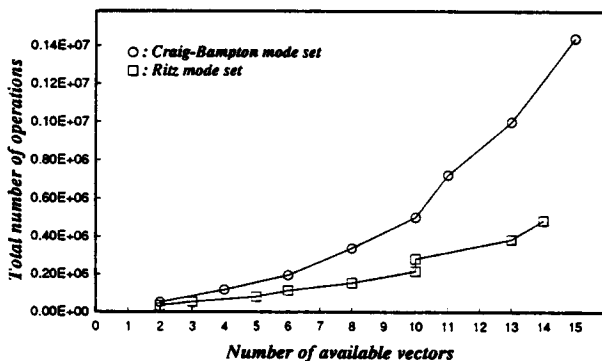


Fig. 10 연산회수 비교( $\rho_{A1}=1, EI_1=1, \rho_{A2}=2, EI_2=1$ )

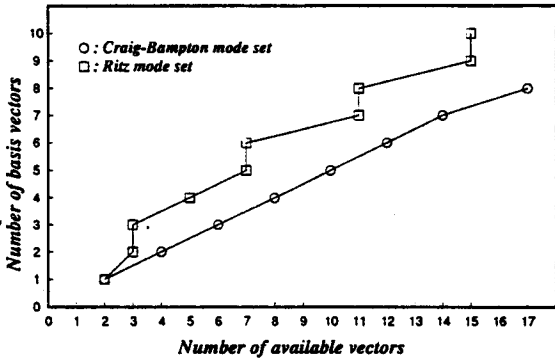


Fig. 11 기저벡터수 비교 ( $\rho A_1=1, EI_1=1, \rho A_2=2, EI_2=2$ )

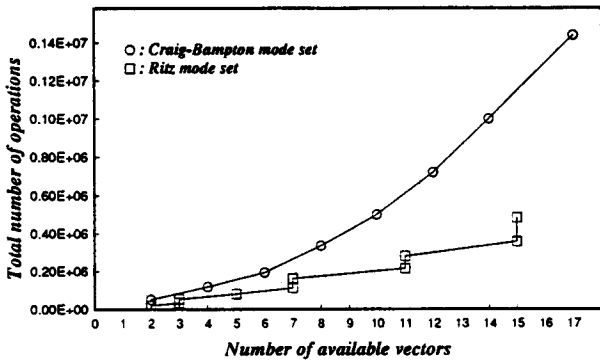


Fig. 12 연산회수 비교 ( $\rho A_1=1, EI_1=1, \rho A_2=2, EI_2=2$ )

8, Fig. 10 그리고 Fig. 12를 보면, 같은 수의 유용가능한 모우드를 구하는데 필요한 곱셈 연산회수는 제안방법의 것이 기존 고정경계법의 것보다 전체적으로 50% 이상 적게 나타나고 있다. 또한 각 방법의 연산회수 증가비율을 보면 제안방법의 것이 보다 낮은 비율로 증가하고 있다. 이것은 제안방법의 수렴특성이 기존 고정경계법의 것보다 상당히 우수함을 뜻한다.

### 5. 결 론

예제를 통해서 알 수 있듯이, 제안방법은 기존 고정경계법보다 다소 많은 기억용량을 사용하기는 하지만, 보다 짧은 시간에 신뢰할 수 있는 정확도로 구조물의 동특성을 구해 준다. 제안방법의 수렴특성이 상당히 우수하므로, 제안방법을 이용한 구조물의 동특성 해석시 요구되는 다소의 기억용량 증가는 큰 단점이 되지 않는다고 본다. 또한 본 예제에서 사용한 Ritz 벡터는 제안방법의 일반성을 입증하기 위해

구조물의 자중벡터를 외력벡터로 하여 구한 것이므로 썩 우수한 성질을 갖고 있다고는 볼 수 없다. 즉, 보다 적절히 초기벡터를 설정한다면 해석에 사용되는 기억용량을 효과적으로 절약할 수 있을 것이다. 실제로 본 예제에서 사용한 보의 경우, 균일분포하중벡터(uniform distributed load vector)와 균일분포모멘트벡터(uniform distributed moment vector)를 동시에 외력벡터로 하고, 반복적으로 반복연산(iteration)과 직교화(orthogonalization)를 시키면서 구한 Ritz 벡터들을 사용하여 해석하면 앞의 예제에서보다 적은 기억용량을 사용하여 보다 정확한 결과를 얻을 수 있다. 본 연구에서 제안한 방법은 분할구조해석법에서 사용하는 변환행렬을 구성하는 모우드 벡터 중 부분구조의 고유 모우드 대신 Ritz 벡터를 사용한다에서 시작되므로 고정경계법이 아닌 다른 방법에도 무리 없이 적용될 수 있을 것으로 본다. 결론적으로, 제안방법은 분할구조 해석법의 수렴특성을 향상시켰다.

### 참 고 문 헌

- (1) J. T. Spanos and W.S. Tsuha, "Selection of Component Modes for Flexible Multibody Simulation," J. Guidance, Vol. 14, No. 7, 1989, pp. 278~286.
- (2) K. J. Batehe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis," Printice-Hall, 1987.
- (3) Maurice Petyt, "Introduction to Finite Element Vibration Analysis," Cambridg, 1990.
- (4) E. L. Wilson, M. W. Yuan and J.M. Dickens, "Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, 1982, pp. 813~821.
- (5) W. C. Hurty, "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes," AIAA. J., Vol. 3, No. 4, 1964, pp. 678~685.
- (6) R. R. Craig and M. C. Bampton, "Coupling of Substructure for Dynamic Analysis," AIAA. J., Vol. 6, No. 7, 1968, pp. 1313~1319.
- (7) S. Rubin, "Improved Component-Mode Representation for Structural Dynamic Analysis," AIAA. J., Vol. 6, No. 7, 1975, pp. 995~1006.
- (8) W. A. Benfield and R. F. Hruda, "Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution," AIAA. J., Vol. 9, No. 7, 1971, pp. 1255~1261.