

지진하중하의 구조물의 동적해석을 위한 중적분방법

Double Integration Method for Dynamic Analysis of Structures
under Earthquake Load

김진호* · 김동욱** · 이인원***

Lee, In Won · Kim, Jin Ho · Kim, Dong Ok

Abstract

The computational time in direct integration method depends on the integration time interval directly. The integration time interval is often restricted by the rapidity of variation in excitation, or by yielding and unloading in the structural members. Especially in case of structural analysis under earthquake load or non-linear problems, quite a small time interval must be used to assure high precision.

In the proposed method, original equation of motion is transformed into equivalent equation of motion through double integration and an efficient numerical integration method for solution is employed. The proposed method permits larger time intervals to be used than usual techniques, and eliminates the difficulties for solution at yielding and unloading in structural dynamic analysis. The proposed method expects the reduction of computational time with high accuracy.

요 지

수치적분법을 이용한 구조물의 동응답해석시 해석시간은 적분시간 간격에 좌우된다. 적분시간 간격은 가진력의 변화율과 비선형 거동을 하는 재료의 항복과 재하 그리고 하중제거 등에 의해 제한을 받는다. 특히 지진하중과 같이 고주파성분이 지배적이거나 재료의 비선형 문제의 경우에 충분한 정확성을 보장하기 위해서는 매우 짧은 적분시간 간격으로 해석을 하여야 한다.

본 논문에서는 기존의 운동방정식을 두 번의 적분에 의해 등가방정식으로 변환하고 이에 보다 효율적인 수치적분 방법을 적용시켜 해석하는 방법을 제안한다. 제안방법을 이용하면 보다 긴 적분시간 간격을 사용할 수 있으므로 전체적인 해석시간을 감소시킬 수 있으며 재료의 비선형 문제에도 매우 효과적인 방법이다.

*정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 석사과정

**정회원 · 한국과학기술원 기계공학과 박사과정

***정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 부교수

1. 서 론

동적하중(Dynamic Load)을 받는 구조물의 정확하고 경제적인 해석방법의 개발은 공학적 관점에서 매우 중요하다.

일반적으로 구조물의 동적해석(Dynamic Analysis) 방법을 크게 두 그룹으로 분류하면, 모드중첩법(Mode Superposition Method)과 직접적분법(Direct Integration Method)으로 나눌 수 있다.^(1,2) 모드중첩법은 구조물의 동적 평형방정식을 각 독립적인 모드로 분리(decoupling)하여 해를 구한뒤, 각 모드별로 전체거동에 대한 기여(participation)를 조합하여 전체 결과를 구하는 방법이다. 이 방법은 선형 문제의 해석에 있어서 하중의 작용 시간이 긴 경우 직접적분법 보다 해석 시간이 적게 소요되는 장점이 있으나 변환행렬에 의해 변환된 감쇠행렬이 대각행렬이 아니거나(non-classical damping), 구조물이 비선형일 때에는 적용이 곤란하므로 위와 같은 문제의 해석시에는 직접적분법에 의한 해석이 일반적이다.

직접적분법에 의한 수치해석법(Numerical Integration Method)은 유한요소법을 이용하여 구한 구조물의 지배방정식을 전혀 변화시키지 않고 점진적인(step-by-step) 방법에 의해 수치적으로 적분한다. 이 방법은 앞 시점(0, Δt, 2Δt, ..., t)에서의 거동을 알고 있을 때 이를 이용하여 다음 시점인(t+Δt) 때의 거동을 계산하는 작업을 반복하여 전체 시간 구간에 걸친 거동을 구하는 것이다.

수치적인 해법에는 t+Δt시간에서의 평형방정식으로부터 거동을 구하는 묵시적(implicit)방법인 Houbolt, Wilson-θ, Newmark방법 등이 있고, 시간 t에서의 평형방정식으로부터 거동을 구하는 명시적(explicit)방법인 Central Difference방법 등이 있다. 먼저 묵시적방법은 적분시간 간격(time step)을 크게 할 수 있으며 무조건 안정(unconditionally stable)한 해를 구할 수 있으나 그 과정에서 필요한 유효 강성행렬을 계산하기 위해 많은 계산량을 요구한다. 반면 명시적 방법은 적은 계산량으로 해를 구할 수 있으나 조건부 안정(conditionally stable)하기 때문에 임계적분시간(critical time step) 간격보다 짧은 적분시간 간격을 사용해야 하는 단점이 있다.

위에서 언급 했듯이 직접 적분법으로 해석시에는 변위, 속도 및 가속도의 각 해법 과정의 안정성(stability)과 정확성(accuracy)을 고려하여 적분 시간 간격을 결정하여야 하며, 만약 임계적분시간 간격 이상의 적분시간 간격으로 해를 구할 경우에는 해석시간이 경과함에 따라 응답 주파수가 작아지는 주파수 변형이 발생하게 된다.⁽²⁾ 수치적분에 사용되는 적분시간 간격은 해석시간에 영향을 주게 되므로 적절한 적분시간 간격의 결정은 매우 중요한 사항이다. 지진하중과 같이 구조물의 고유진동수에 비해 고주파 성분이 지배적인 가진력이 입력될 경우, 충분한 정확성을 보장하기 위해 더 짧은 적분시간 간격으로 해석한다. 그러나 위와 같은 경우 해석시간이 길어지는 단점이 있으므로 변화가 심한 가진력과 속도의 함수로 표현되는 감쇠 저항력 그리고 변위의 함수로 표현되는 강성 저항력을 적절히 처리하여 보다 긴 적분시간 간격하에서 수치적분을 수행할 수 있는 방법에 대한 연구는 매우 중요한 의미를 갖는다.

본 논문에서는 지배방정식을 이중적분(double integration)에 의해 유연화(smoothing)된 등가방정식⁽³⁾으로, 변환하고 SSQ(successive symmetric quadrature)방법을 적용시켜 해석함으로써 적분시간 간격에 대한 제한성을 완화하면서 정확한 결과를 구할 수 있는 이중적분 방법을 제안한다. 또한 수치적분법의 하나인 SSQ 방법을 소개하고 이를 Newmark family방법과 비교하여 이의 우수한 효율성을 제시한다. 아울러 이중적분법과 SSQ 방법을 조합한 제안방법의 효율성을 제시한다. SSQ 방법의 개념은 Ehle⁽⁴⁾에 의해 처음 제안되었고(Lobatto IIIA-method), 추후에 Healy와 Robinson⁽⁵⁾은 이를 다른 접근 방법으로 유도하여 "successive symmetrical quadratures"라 명명하였다.

제안방법은 구조물의 고유 진동수에 비해 가진력의 진동수가 큰 경우에 매우 효율적이며 이의 효율성을 검증하기 위하여 세가지 예제에 대하여 수치해석을 수행하였다.

2. 등가방정식

구조물의 지배 방정식은 아래와 같이 표현된다.

$$M\ddot{X}(t) + C(X(t)) + K(X(t)) = F(t) \quad (1)$$

여기서 M : 구조물의 질량 행렬
 $C(\dot{X}(t))$: 구조물의 감쇠 저항력
 $K(X(t))$: 구조물의 강성 저항력
 $F(t)$: 가진력

시간에 관한 변위의 한번 적분을 P , 두번 적분을 Q 라 하면,

$$P(t) = \int_{t^*}^t X(\xi) d\xi \quad (2)$$

$$Q(t) = \int_{t^*}^t P(\xi) d\xi = \int_{t^*}^t \int_{t^*}^{\xi} X(\eta) d\eta d\xi \quad (3)$$

여기서 t^* : 적분 구간의 최초 시간
 t : 적분 구간의 최종 시간

따라서 구조물의 변위와 속도는 식 (4), (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$X(t) = \dot{P}(t) = \ddot{Q}(t) \quad (4)$$

$$\dot{X}(t) = \ddot{P}(t) \quad (5)$$

가진력이 지진일 경우 식 (1)을 한번 적분하면,

$$\int_{t^*}^t M\ddot{X}(\xi) d\xi + \int_{t^*}^t C(\dot{X}(\xi)) d\xi + \int_{t^*}^t K(X(\xi)) d\xi \quad (6)$$

$$= - \int_{t^*}^t M\ddot{Y}_g d\xi$$

$$M[\dot{X}(t) - \dot{X}(t^*)] + \int_{t^*}^t C(\dot{X}(\xi)) d\xi + \int_{t^*}^t K(X(\xi)) d\xi \quad (7)$$

$$= -M\dot{Y}_g$$

식 (7)을 (5)식의 관계를 이용하여 표현하면,

$$M(\ddot{P} - \ddot{P}_{t^*}) + \int_{t^*}^t C(\dot{X}(\xi)) d\xi + \int_{t^*}^t K(X(\xi)) d\xi = -M\dot{Y}_g \quad (8)$$

식 (8)을 다시 한번 적분하면,

$$M[\dot{Q} - \dot{Q}_{t^*} - \ddot{P}_{t^*} \cdot (t-t^*)] + \int_{t^*}^t \int_{t^*}^{\xi} C(\dot{X}(\eta)) d\eta d\xi \quad (9)$$

$$+ \int_{t^*}^t \int_{t^*}^{\xi} K(X(\eta)) d\eta d\xi = -M\dot{Y}_g$$

식 (9)는 식 (1)의 유연화된 등가방정식이다. 두 번의 적분에 의하여 저항력(감쇠 저항력, 강성 저항력)과 가진력이 유연화되므로 보다 긴 적분시간 간격을 사용할 수 있다(그림 3). 식 (6) 우변의 \ddot{Y}_g 는 구조물의 고유진동수에 비해 고주파 성분이 많이 포함되

어 있는 지진 하중의 지반 가속도이며 식 (9) 우변의 \dot{Y}_g 는 \ddot{Y}_g 를 이중 적분에 의해 유연화시킨 값으로 측정이 가능한 지반변위를 의미한다.

실제로 우리가 구하고자 하는 값은 X, \dot{X}, \ddot{X} 이다. 식 (4)에서 \ddot{Q} 즉, X 값은 아래와 같이 직접 구해지고,

$$X = \ddot{Q} = -\dot{Y}_g + \ddot{Q}_{t^*} + \dot{P}_{t^*}(t-t^*) \quad (10)$$

$$-M^{-1} \int_{t^*}^t \int_{t^*}^{\xi} C(\dot{X}(\eta)) d\eta d\xi - M^{-1} \int_{t^*}^t \int_{t^*}^{\xi} K(X(\eta)) d\eta d\xi$$

또한, 식 (5)에서 \ddot{P} 즉 \dot{X} 값은 다음 식 (11)에 의해 계산한다.

$$\dot{X} = \ddot{P} = -\dot{Y}_g + \ddot{P}_{t^*} - M^{-1} \int_{t^*}^t C(\dot{X}(\xi)) d\xi \quad (11)$$

$$-M^{-1} \int_{t^*}^t K(X(\xi)) d\xi$$

식 (10)과 (11)의 우변의 적분항은 유연화된 곡선이다.

2.1 선형문제에의 적용

이중적분에 의해 유연화된, 등가 운동방정식 (9)는, 선형 구조물의 경우에는 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$M(\ddot{Q} - \ddot{Q}_{t^*} - \ddot{P}_{t^*}) + C\dot{Q} + KQ = -MY_g \quad (12)$$

$$\text{여기서 } Q = \int_0^t \int_0^{\xi} X(\eta) d\eta d\xi$$

식 (12)를 Newmark 방법으로 해석하면, 긴 적분시간 간격을 사용해도 오차가 작은 결과를 얻을 수 있다. 부가적으로 SSQ 방법을 사용하면 더 긴 적분시간 간격으로 해석할 수 있다. 이에 대한 결과는 뒤에서 설명한다.

2.2 비선형문제에의 적용

비선형 거동 구조물의 유연화된 등가 운동방정식을 이용한 해석시 변위에 따른 저항력의 적분과 중적분은 그리 간단한 문제는 아니다.

선형 거동 구조물의 경우 강성 저항력의 적분 또는 중적분은 다음 식 (13), (14)와 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$\int_0^t KX(\xi) d\xi = KP(t) \quad (13)$$

$$\int_0^t \int_0^\xi \mathbf{KX}(\eta) d\eta d\xi = \mathbf{KQ}(t) \quad (14)$$

그러나 비선형 거동 구조물의 경우 강성 저항력은 변위의 함수이므로 사다리꼴 법칙(trapezoidal rule)과 같은 수치적분을 이용하여 적분과 중적분 값을 계산한다. 즉, 비선형 거동의 경우에는 강성 저항력과 감쇠 저항력을 구한 뒤 이 값을 수치적으로 적분하여 실제 거동의 계산에 이용한다는 것이다.

비선형 거동 문제의 해석 과정은 다음과 같이 요약할 수 있다.

1. 구하고자하는 시간에서의 속도와 변위를 수치 적분에 의해 계산한다.
2. 계산된 속도와 변위를 이용하여 강성저항력과 감쇠저항력을 계산한다.
3. 구해진 강성저항력과 감쇠저항력을 두 번 적분한다.
4. 위의 값들을 이용하여 구하고자 하는 시간에서의 가속도를 계산한다.

구하고자 하는 최종 변위, 속도, 가속도 값은 위의 1번부터 4번까지의 단계를 수렴할 때까지 반복적으로 수행함으로써 구할 수 있다.

제안방법은 저항력을 두번 적분해야 하는 과정이 추가되지만 변환된 등가 운동방정식의 유연화 효과로 수렴성이 증가하고 보다 긴 적분시간 간격을 사용할 수 있으므로 전체적인 해석시간은 감소한다. 또한 저항력을 계산하는 데 있어서 SSQ 방법을 적용함으로써 보다 정확하고 빠르게 저항력을 계산할 수 있는 장점이 있다. 따라서 본 논문에서 제안하는 방법으로 해석할 경우 해석에 소요되는 시간을 현저히 감소시킬 수 있다.

3. 수치적분방법

3.1 SSQ 방법

Newmark방법으로 긴 적분시간 간격을 사용하여 적분할 경우 오차는 작아지나 약간의 주파수변형이 발생한다. SSQ 방법은 좀더 긴 적분시간 간격을 사용해도 주파수변형 없이 정확한 결과를 주는 수치적분 방법이다. 함수의 적분은 식 (15)와 같이 근사화할 수 있다.

$$\int_0^t f(t) dt \cong h \sum_{i=0}^m f_i \alpha_{ik} \quad (15)$$

여기서 $f_i = f(t_{i+1})$ 이며, h 와 α , m , k 는 각각 적분시간 간격, 무차원 가중치, 보간함수의 차수, 적분시간 간격 사이의 보간점을 의미한다.

• SSQ 방법에 의한 해석

비감쇠 자유진동의 지배방정식은 식 (16)과 같이 나타낼 수 있다.

$$M\ddot{X}_{nk} + \mathbf{K}X_{nk} = 0 \quad (16)$$

식 (15)를 적용하면 변위와 속도는 식 (17), (18)과 같이 표시할 수 있다.

$$\dot{X}_{nk} = \dot{X}_{n0} - M^{-1}Kh \sum_{i=0}^2 \alpha_{ik} X_{ni} \quad (17)$$

$$X_{nk} = X_{n0} + M^{-1}Kh \sum_{i=0}^2 \alpha_{ik} \dot{X}_{ni} \quad (18)$$

위의 방법은 함수 $f(t)$ 를 2차 보간함수로 가정함으로써 Newmark방법과 같이 선형 보간함수를 사용하여 수치 적분했을 때보다 주파수 변형을 줄여준다.

3.2 SSQ와 Newmark family 방법의 오차비교

위 식 (16)의 해는 식 (19), (20)과 같은 형태로 표시할 수 있다.

$$X_{n+1} = X_n \cos\phi + \frac{\dot{X}_n}{\omega} \sin\phi \quad (19)$$

$$\dot{X}_{n+1} = -X_n \omega \sin\phi + \dot{X}_n \cos\phi \quad (20)$$

여기서 ϕ 는 $\theta (= \omega h)$ 의 함수이며 θ/ϕ 는 주기의 실제값과 근사값의 비로 주파수 변형을 의미한다. $\theta/\phi = 1$ 인 경우 식 (3.2.1)과 (3.2.2)값은 정확해이다.

3.2.1 SSQ 방법의 오차

비감쇠 자유진동 해석의 경우 변위, 속도, 가속도를 SSQ 방법을 적용하여 나타내면 식 (21), (22)와 (23)의 형태로 표시할 수 있다.

$$\ddot{X}_{nk} + \omega^2 X_{nk} = 0 \quad (21)$$

$$\dot{X}_{nk} = \dot{X}_{n0} - \omega^2 h \sum_{i=0}^m \alpha_{ik} X_{ni} \quad (22)$$

$$X_{nk} = X_{n0} + h \sum_{i=0}^m \alpha_{ik} \dot{X}_{ni} \quad (23)$$

2차 보간함수($m=2$)를 사용한 경우 식 (22), (23)은, 식 (24)와 같이 표현된다.

$$X_{n1} = X_{n0} + h(\alpha_{01}\dot{X}_{n0} + \alpha_{11}\dot{X}_{n1} + \alpha_{21}\dot{X}_{n2}) \quad (24)$$

$$X_{n2} = X_{n0} + h(\alpha_{02}\dot{X}_{n0} + \alpha_{12}\dot{X}_{n1} + \alpha_{22}\dot{X}_{n2})$$

$$\dot{X}_{n1} = \dot{X}_{n0} + \omega^2 h(\alpha_{01}X_{n0} + \alpha_{11}X_{n1} + \alpha_{21}X_{n2})$$

$$\dot{X}_{n2} = \dot{X}_{n0} + \omega^2 h(\alpha_{02}X_{n0} + \alpha_{12}X_{n1} + \alpha_{22}X_{n2})$$

(24) 식을 행렬식으로 표시하면,

$$\begin{Bmatrix} X_{n1} \\ X_{n2} \\ \dot{X}_{n1} \\ \dot{X}_{n2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{n0} \\ X_{n0} \\ \dot{X}_{n0} \\ \dot{X}_{n0} \end{Bmatrix} + h \begin{Bmatrix} \alpha_{01}\dot{X}_{n0} \\ \alpha_{02}\dot{X}_{n0} \\ -\omega^2\alpha_{01}X_{n0} \\ -\omega^2\alpha_{02}X_{n0} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ 0 & 0 & \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ -\omega^2\alpha_{11} & -\omega^2\alpha_{21} & 0 & 0 \\ -\omega^2\alpha_{12} & -\omega^2\alpha_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{n1} \\ X_{n2} \\ \dot{X}_{n1} \\ \dot{X}_{n2} \end{Bmatrix}$$

보간함수가 2차인 경우, $\alpha_{01} = \frac{5}{4}$, $\alpha_{11} = \frac{8}{24}$, $\alpha_{21} = -\frac{1}{24}$, $\alpha_{02} = \frac{1}{6}$, $\alpha_{12} = \frac{2}{3}$, $\alpha_{22} = \frac{1}{6}$ 이므로 식 (25)는 다음 식 (26)과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} X_{n1} \\ X_{n2} \\ \dot{X}_{n1} \\ \dot{X}_{n2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{144 + 12h^2\omega^2 + h^4\omega^4} \quad (26)$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(24 + h^2\omega^2)(12X_{n0} - h^2\omega^2X_{n0} + 6h\dot{X}_{n0}) \\ 144X_{n0} - 60h^2\omega^2X_{n0} + h^4\omega^4X_{n0} + 144h\dot{X}_{n0} - 12h^3\omega^2\dot{X}_{n0} \\ \frac{1}{2}(24 + h^2\omega^2)(-6h\omega^2X_{n0} + 12\dot{X}_{n0} - h^2\omega^2\dot{X}_{n0}) \\ -144h\omega^2X_{n0} + 12h^3\omega^4X_{n0} + 144\dot{X}_{n0} - 60h^3\omega^2\dot{X}_{n0} + h^4\omega^4\dot{X}_{n0} \end{bmatrix}$$

그러므로,

$$X_{n+1} = X_{n2} = \frac{144 - 60h^2\omega^2 + h^4\omega^4}{144 + 12h^2\omega^2 + h^4\omega^4} X_n \quad (27)$$

$$+ \frac{(144 - 12h^2\omega^2)h\omega}{144 + 12h^2\omega^2 + h^4\omega^4} \cdot \frac{1}{\omega} \dot{X}_n$$

$$\dot{X}_{n+1} = \dot{X}_{n2} = -\frac{(144 - 12h^2\omega^2)h\omega}{144 + 12h^2\omega^2 + h^4\omega^4} \cdot \omega X_n \quad (28)$$

$$+ \frac{144 - 60h^2\omega^2 + h^4\omega^4}{144 + 12h^2\omega^2 + h^4\omega^4} \dot{X}_n$$

또는,

$$X_{n+1} = X_n \cos\phi + \frac{\dot{X}_n}{\omega} \sin\phi \quad (29)$$

$$\dot{X}_{n+1} = -X_n \omega \sin\phi + \dot{X}_n \cos\phi$$

식 (19), (20)과 (27), (28)에서,

$$\cos\phi = \frac{144 - 60\theta^2 + \theta^4}{144 + 12\theta^2 + \theta^4} \quad (30)$$

$$\sin\phi = \frac{(144 + 12\theta^2)\theta}{144 + 12\theta^2 + \theta^4} \quad (31)$$

$$\tan\phi = \frac{144\theta - 12\theta^3}{144 - 60\theta^2 + \theta^4} \quad (32)$$

따라서 ϕ 는 식 (33)과 같이 구해지고 근사해에서 발생하는 오차는 식 (34)를 θ 에 대하여 급수전개함으로써 구할 수 있다.

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{144\theta - 12\theta^3}{144 - 60\theta^2 + \theta^4}\right) \quad (33)$$

$$\frac{\theta}{\phi} = \frac{\theta}{\tan^{-1}\left(\frac{144\theta - 12\theta^3}{144 - 60\theta^2 + \theta^4}\right)} \quad (34)$$

$$\frac{\theta}{\phi} = 1 + \frac{\theta^4}{720} + o(\theta^6) + \dots \quad (35)$$

여기서 θ 는 정확해 이고 ϕ 는 근사해이다. 이의 오차는 θ^4 에 비례한다.

3.2.2 Newmark family 방법의 오차

비감쇠 자유진동의 경우 변위, 속도, 가속도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{X}_{n-1} = -\omega^2 X_{n-1} \quad (36)$$

$$\dot{X}_{n+1} = \dot{X}_n + [(1-\gamma)\dot{X}_n + \gamma\dot{X}_{n+1}]h \quad (37)$$

$$X_{n+1} = X_n + \dot{X}_n h + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\dot{X}_n + \beta\dot{X}_{n+1}\right]h^2 \quad (38)$$

식 (36)을 (37)과 (38)에 대입하면 다음 식 (39), (40)과 같다.

$$\dot{X}_{n+1} = \dot{X}_n + [-(1-\gamma)\omega^2 X_n - \gamma\omega^2 X_{n+1}]h \quad (39)$$

$$X_{n+1} = X_n + \dot{X}_n h + [-(\frac{1}{2} - \beta)\omega^2 X_n - \beta\omega^2 X_n - \beta\omega^2 X_{n+1}]h^2 \quad (40)$$

1) 평균 가속도법

(constant average-acceleration method)

$$\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}$$

식 (39)와 (40)에 β , γ 값을 대입하면 식 (41), (42)와 같이 표현된다.

$$\dot{X}_{n+1} = \dot{X}_n + [-\frac{1}{2}\omega^2 X_n - \frac{1}{2}\omega^2 X_{n+1}]h \quad (41)$$

$$X_{n+1} = X_n + \dot{X}_n h + [-\frac{1}{4}\omega^2 X_n - \frac{1}{4}\omega^2 X_{n+1}]h^2 \quad (42)$$

식 (41)과 (42)는, 다음 식 (43), (44)와 같이 간단히 표현되고,

$$X_{n+1} = \frac{4-h^2\omega^2}{4+h^2\omega^2} X_n + \frac{4\omega h}{4+h^2\omega^2} \frac{\dot{X}_n}{\omega} \quad (43)$$

$$\dot{X}_{n+1} = -\frac{4\omega h}{4+h^2\omega^2} \omega X_n + \frac{4-h^2\omega^2}{4+h^2\omega^2} \dot{X}_n \quad (44)$$

또는,

$$X_{n+1} = X_n \cos\phi + \frac{\dot{X}_n}{\omega} \sin\phi$$

$$\dot{X}_{n+1} = -X_n \omega \sin\phi + \dot{X}_n \cos\phi \quad (45)$$

식 (43), (44)와 (19), (20)으로 부터,

$$\cos\phi = \frac{4-h^2\omega^2}{4+h^2\omega^2} \quad (46)$$

$$\sin\phi = \frac{4\omega h}{4+h^2\omega^2} \quad (47)$$

$$\tan\phi = \frac{4\omega h}{4-h^2\omega^2} \quad (48)$$

따라서 ϕ 는 식 (49)와 같이 구해지고 근사해에서 발생하는 오차는 식 (50)을 θ 에 대하여 급수전개 함으로써 구할 수 있다(식 51).

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{4\omega h}{4-h^2\omega^2}\right) \quad (49)$$

$$\frac{\theta}{\phi} = \frac{\theta}{\tan^{-1}\left(\frac{4\omega h}{4-h^2\omega^2}\right)} \quad (50)$$

$$\frac{\theta}{\phi} = 1 + \frac{\theta^2}{12} + O(\theta^4) + \dots \quad (51)$$

위의 식은 오차가 θ^2 에 비례하여 나타난다. 즉 식 (35)와 비교하여 그 오차가 SSQ 방법 보다 훨씬 큼을 알 수 있다.

2) 선형 가속도법
(linear-acceleration method)

$$: \beta = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\theta}{\phi} = 1 + \frac{\theta^2}{24} + O(\theta^4) + \dots \quad (52)$$

위식에서 오차는 θ^2 에 비례한다. 즉 평균 가속도법 보다는 오차가 작으나 SSQ 방법 보다는 훨씬 크다.

3.2.3 오차의 비교

위 식 (35), (51)과 (52)의 결과를 비교해 볼 때 SSQ 방법이 Newmark family 방법보다 주파수 변형이 작음을 알 수 있다. SSQ 방법은 Newmark방법에 비해 하나의 보간점을 더 제공 함으로써, 적분 시 발생하는 주파수 변형을 최소화하여 정확한 결과를 구할 수 있다.

4. 제안방법

4.1 개요

앞의 2장과 3장에서 등가 방정식을 이용한 수치 적분법과 SSQ 방법을 설명하였다.

제안 방법에서는 이 두 방법을 조합함으로써 지진 하중과 같이 구조물의 고유진동수에 비해 높은 진동수 영역이 지배적인 가진력에 대한 응답을 안정적이고 빠르게 구한다. 그리고 제안 방법에 대한 효율성은 수치해석을 통해 검증한다.

4.2 해석 알고리즘

제안 방법의 기본적인 해석 알고리즘은 다음과 같다. 우선 구하고자 하는 시간구간내에서 변환된 등가 방정식의 초기값 \ddot{Q} , \dot{Q} , Q 를 가정하고 이 초기값을 이용하여 현 단계에서의 \ddot{Q} , \dot{Q} , Q 를 계산한다. 계산된 \ddot{Q} , \dot{Q} , Q 와 가정한 값을 비교하여 오차가 허용범위 이내일 경우에는 다음 시간 단계로 진행되고 그렇지 못한 경우에는 현 단계에서 구해진 \ddot{Q} , \dot{Q} , Q 를 초기값으로 위의 계산과정을 반복한다. 위에서 설명한 해석 알고리즘을 순서도로 나타내면 그림 1과 같다.

5. 수치해석

제안방법의 효율성을 증명하기 위하여 3가지 예제에 대하여 수치해석을 수행 하였다. 가진력은 1940년 5월 18일 발생한 El-Centro 남북방향 지진(그림 3)과 여러 하중이 조합된 가상의 가진력(그림 9)을 사용하였고 적분시간 간격별로 정확성과 해석 소요시

간을 비교하여 제안방법의 효율성을 입증하였다. 해석에 사용한 컴퓨터는 IRIS4D20과 486DX2-66 P. C이다.

5.1 선형 단자유도 구조물의 진동해석

첫번째 예제는 그림 2와 같이 평면 뼈대 구조물을 단일 자유도를 갖는 선형 거동 등가 구조물로 해석하였으며 이 구조물의 기본 고유 진동수는 0.5 Hz이다. 해석에 사용한 가진력은 El-Centro 지진이다. 이에 대한 가속도, 속도 그리고 변위성분을 그림 3에 표시하였다.

Newmark방법(평균 가속도법)으로 기존의 운동 방정식을 해석할 경우 적분시간 간격과 구조물의 최소 고유주기 또는 가진력의 최소 주기의 비가 0.01 정도로 충분히 작아야 그 정확성을 보장할 수 있다. 본 예제의 경우 적분시간 간격 0.02 sec까지 정확한 결과를 나타낸다. Newmark방법(평균 가속도법)으로 기존의 운동 방정식을 적분시간 간격 0.04, 0.06

sec에 대하여 해석하였고(그림 5) Newmark 방법으로 등가운동 방정식을 적분시간 간격 0.06, 0.12 sec에 대하여 해석하였다(그림 6). 또한 적분시간 간격 0.12 sec, 0.16 sec에 대하여 SSQ 방법으로 해석하였다(그림 7). 그림 5에서 적분시간 간격을 0.04 sec로 하여 기존의 운동 방정식을 Newmark 방법으로 구한 결과는 정확성을 보장할 수 있는 적분시간 간격으로 해석한 결과인 그림 4와 비교하여 오차가 발생함을 알 수 있고 적분시간 간격을 0.06 sec로 증가시켜 해석할 경우 그 오차는 더욱 커지며 시간이 경과함에 따라 주파수 변형이 발생하게 된다.

그림 6(a)에서는 등가 운동방정식을 Newmark 방법으로 해석 하였을때 적분시간 간격이 0.06 sec로 증가 했음에도 유연화 효과로 인하여, 같은 적분시간

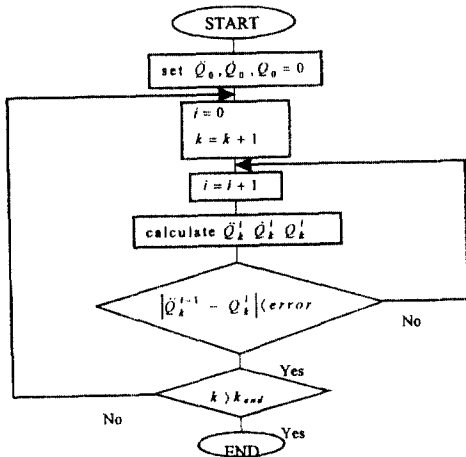


그림 1. 제안방법의 알고리즘

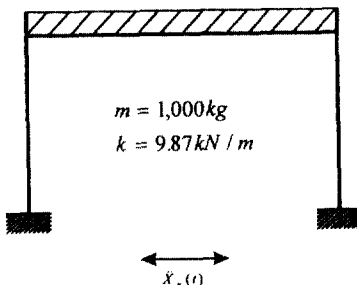
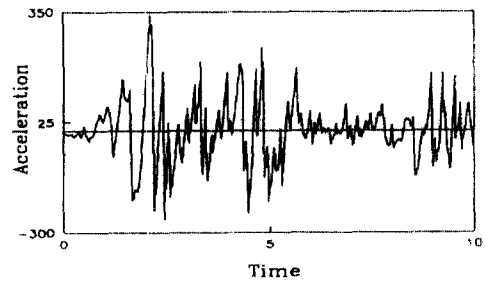
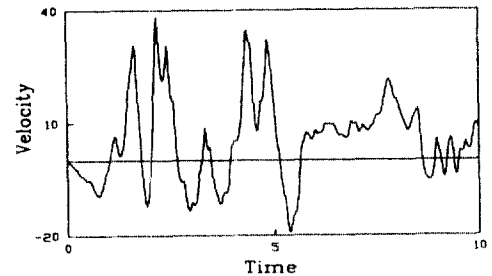


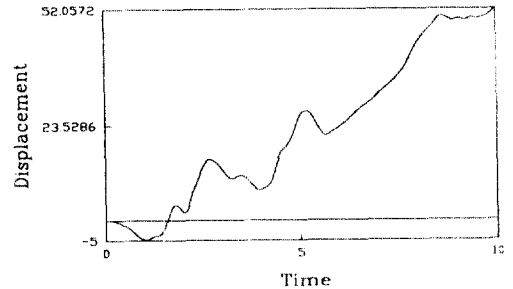
그림 2. 평면 뼈대구조물



(a) 가속도



(b) 속도 : 가속도의 적분



(c) 변위 : 가속도의 이중적분

그림 3. El-Centro 지진

간격으로 기존의 운동 방정식을 해석 하였을때 보다 훨씬 정확한 결과를 보여준다. 또한 적분시간 간격이 0.12 sec로 증가했을 경우에도 주파수 변형을 제외 하고는 비교적 정확한 결과를 구할 수 있다(그림 6(b)).

그림 7은 적분시간 간격 0.12 sec, 0.16 sec일 때 등가운동 방정식을 SSQ 방법으로 해석한 결과이다. 그림 7에서 알 수 있듯이 Newmark방법에 의한 해석에 비하여 SSQ 방법은 주파수 변형을 현저히 감소

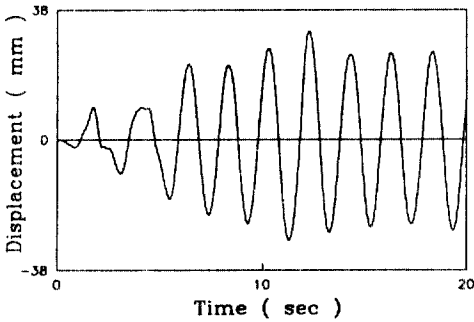
시켰다.

그림 7과 그림 4를 비교해 볼 때 적분시간 간격은 8배로 증가했지만 정확도는 거의 차이가 없음을 알 수 있다.

표 1에서 각 방법에 대한 해석 시간을 비교해 보았다. 표 1에서 알 수 있듯이 약 2.8배정도의 계산시간 단축 효과를 보였다. 이는 적분시간 간격을 8배로 증가시켜 정확한 결과를 얻었지만 주파수변형을 감소시키기 위해 도입한 SSQ 방법으로 인해 해석시간 단축 효과가 다소 감소 했음을 의미한다. 위의 결과로부터 제안 방법은 적분시간 간격을 8배로 증가시켜 정확한 결과를 구할 수 있으며 해석 시간을 2.8배 정도 단축시킬 수 있는 방법이다.

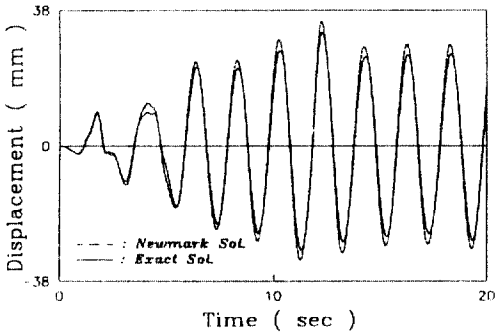
5.2 선형 다자유도 구조물의 진동해석

두번째 예제는 그림 8과 같이 27개의 자유도를 갖는 2차원 3층짜리 선형 거동 구조물을 해석 하였고 각 해석 방법에 대하여 A점 에서의 X축 방향 변위를 비교 하였다. 이 구조물의 첫번째 고유 진동수는 0.18 Hz이며 해석에 사용한 가진력은 진동수 5 Hz정도인 가상의 가진력 이다(그림 9).

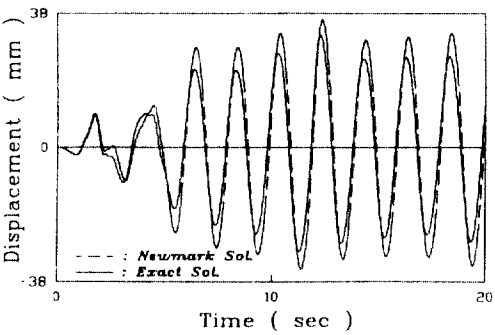


적분시간 간격 : 0.02 sec

그림 4. 정확해

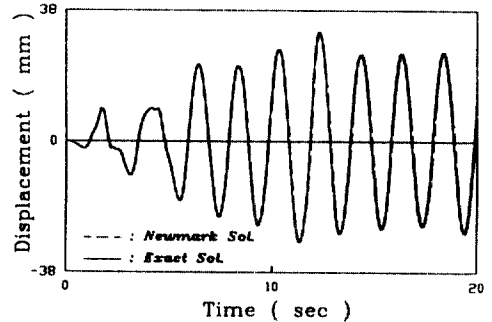


(a) 적분시간 간격 : 0.04 sec

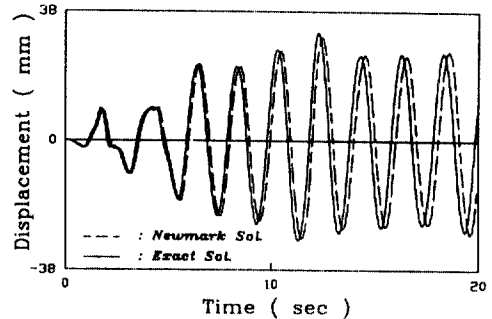


(b) 적분시간 간격 : 0.06 sec

그림 5. 기존 운동방정식에 의한 해석 : Newmark 방법



(a) 적분시간 간격 : 0.06 sec

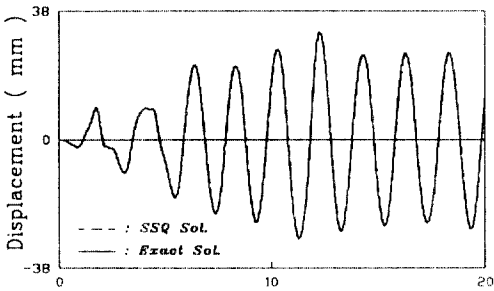


(b) 적분시간 간격 : 0.12 sec

그림 6. 등가 운동 방정식에 의한 해석 : Newmark 방법

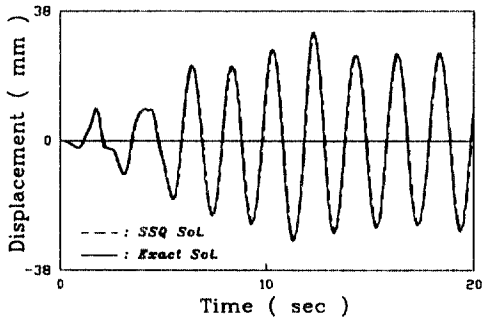
Newmark방법(평균 가속도법)으로 기존의 운동 방정식을 해석할 경우 정확성 측면에서 적분시간 간격 0.002 sec까지 정확한 결과를 보장한다. 본 예제에 대한 정확해는 적분시간 간격을 0.0001 sec로 매우 짧게하여 구한 결과를 사용한다. Newmark방법(평균 가속도법)으로 기존의 운동 방정식을 적분시간 간격 0.002, 0.01 sec에 대하여 해석하였고(그림 10) SSQ 방법으로 등가운동 방정식을 적분시간 간격 0.013 sec에 대하여 해석하였다(그림 11).

그림 10에서 적분시간 간격을 0.01 sec로 하여 기존의 운동 방정식을 Newmark 방법으로 구한 결과와 정확해와 비교하여 오차가 발생함을 알 수 있다.



Time (sec)

(a) 적분시간 간격 : 0.12 sec



Time (sec)

(b) 적분시간 간격 : 0.16 sec

그림 7. 등가 운동 방정식에 의한 해석 : SSQ 방법

표 1. 해석 시간 비교 : 60초 동안의 응답

운동방정식	기존 운동방정식	등가 운동방정식
적분방법	Newmark 방법 (평균 가속도법)	SSQ 방법
해석시간(sec) (Ratio)	0.17 (2.83)	0.06 (1.00)
적분시간 간격 (sec)	0.02	0.16

그러나 그림 11에서는 등가운동 방정식을 SSQ 방법으로 해석 하였을 때 적분시간 간격이 0.013 sec로 증가 했음에도 유연화 효과로 인하여, 매우 짧은 적분시간 간격으로 기존의 운동 방정식을 해석 하였을 때(그림 10(a))와 같이 정확한 결과를 보여준다. 그림 10과 그림 11을 비교해 볼 때 적분시간 간격은 6.5배로 증가했지만 정확도는 거의 차이가 없음을 알 수 있다.

표 2에서 각 방법에 대한 해석 시간을 비교해 보았다. 표 2에서 알 수 있듯이 제안방법은 약 2.2배정도

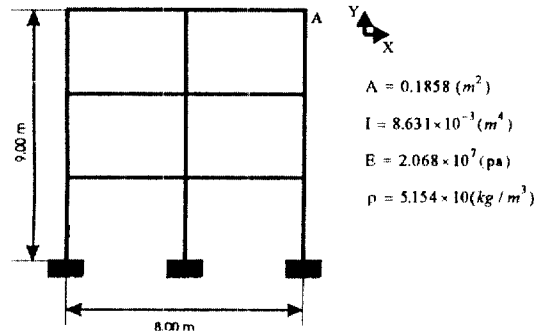
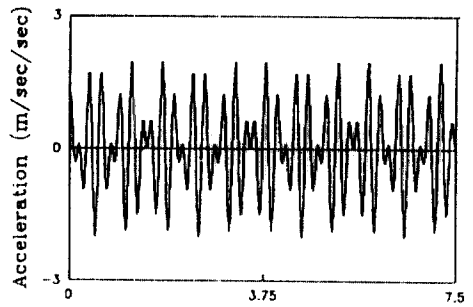
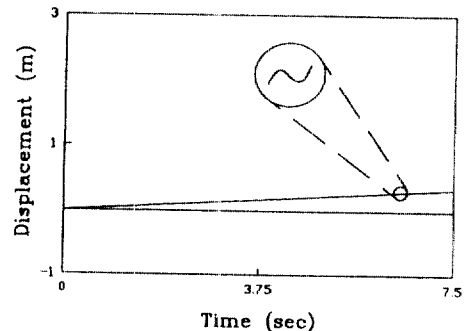


그림 8. 2차원 평면 뼈대구조물



(a) 가속도



(b) 변위(이중적분)

그림 9. 가상의 가진력

해석시간을 단축시킬 수 있다. 위의 결과로부터 제안 방법은 적분시간 간격을 6.5배로 증가시켜 정확한 결과를 구할 수 있으며 해석 시간을 2.2배정도 단축시킬 수 있는 방법이다.

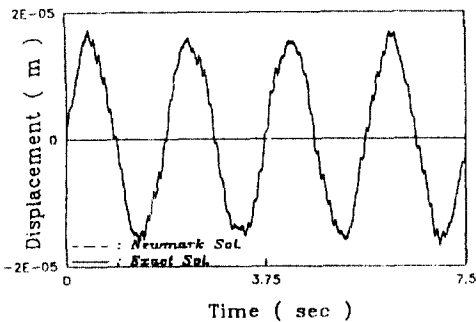
5.3 비선형 단자유도 구조물의 진동해석

세번째 예제는 그림 2와 같은 평면 뼈대 구조물을 단일 자유도를 갖는 등가 비선형 거동 구조물로 해석하였으며 이 구조물의 기본 고유 진동수는 0.5 Hz이다. 해석에 사용한 가진력은 El-Centro지진이다(그림

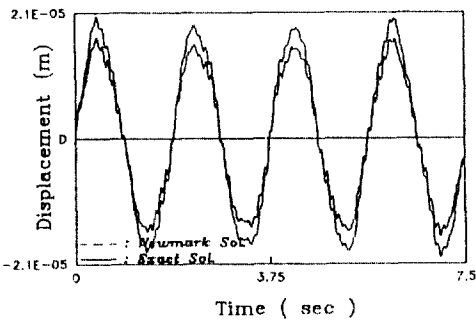
3). 구조물은 보요소를 Bilinear elasto-plastic material model로 사용하여 모델링 하였다(그림 12). 이 구조물의 $K_e = 1.0 \times 10^6 (N/m)$, $K_p = 5.0 \times 10^5 (N/m)$ 이며 변위에 따른 강성저항력은 그림 13에 나타내었다.

Newmark방법(평균 가속도법)으로 기존의 운동방정식을 해석할 경우 적분 시간간격 0.02 sec까지 정확한 결과를 나타낸다. Newmark방법(평균 가속도법)으로 기존의 운동방정식을 적분시간 간격 0.02, 0.04, 0.06 sec에 대하여 해석하였고(그림 14) 적분 시간 간격 0.12 sec에 대하여 SSQ 방법으로 해석하였다(그림 15).

그림 14에서 적분시간 간격을 0.04 sec로 증가시켜 기존의 운동방정식을 Newmark 방법으로 구한

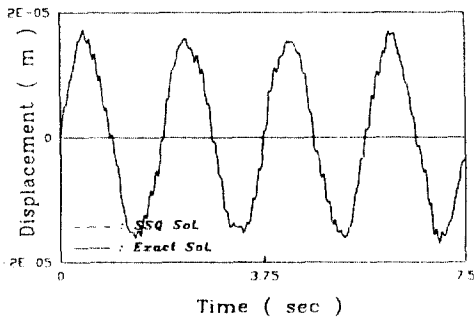


(a) 적분시간 간격 : 0.002 sec



(b) 적분시간 간격 : 0.01 sec

그림 10. 기존 운동방정식에 의한 해석 : Newmark 방법



(a) 적분시간간격 : 0.013 sec

그림 11. 등가 운동방정식에 의한 해석 : SSQ 방법

운동방정식	기존 운동방정식	등가 운동방정식
적분방법	Newmark 방법 (평균 가속도법)	SSQ 방법
해석시간(sec) (Ratio)	129.53 (2.17)	59.63 (1.00)
적분시간 간격 (sec)	0.002	0.13

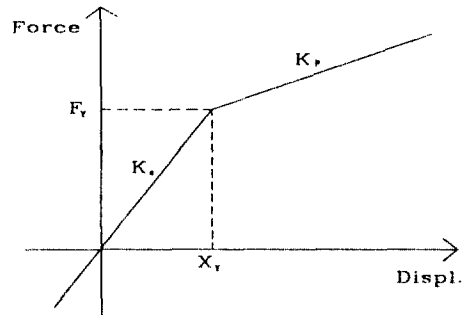


그림 12. 보요소의 하중-변위 관계도

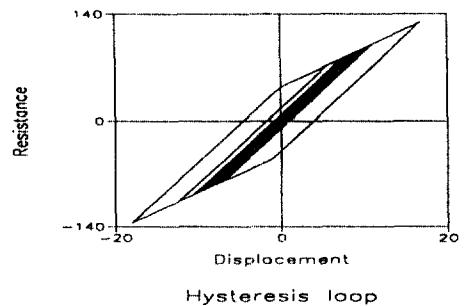
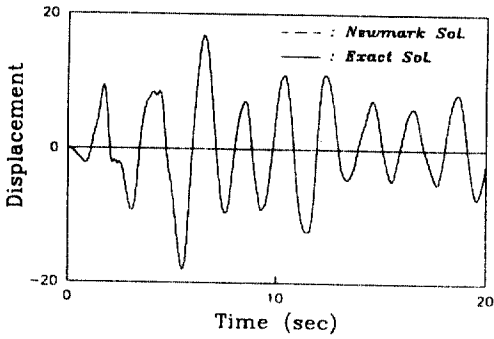
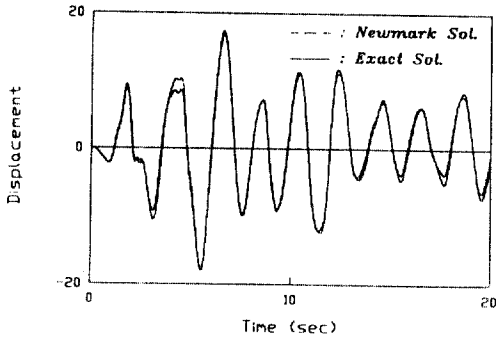


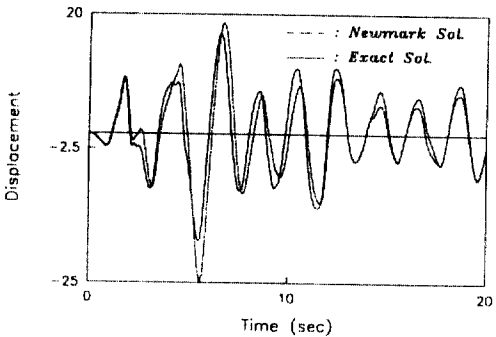
그림 13. 변위에 따른 강성저항력



(a) 적분시간 간격 : 0.02 sec



(b) 적분시간 간격 : 0.04 sec

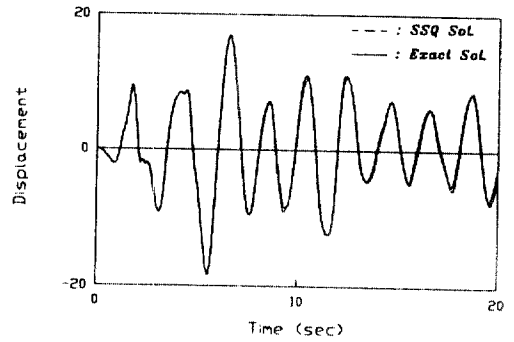


(c) 적분시간 간격 : 0.06 sec

그림 14. 기존 운동방정식 : Newmark 방법

결과는 정확해와 비교하여 오차가 발생함을 알 수 있고 적분시간간격을 0.06 sec로 증가시켜 해석할 경우 그 오차는 더욱 커지며 시간이 경과함에 따라 주파수변형이 발생하는 것을 볼 수 있다.

그림 15는 적분시간 간격 0.12 sec일때 등가 운동방정식을 SSQ 방법으로 해석한 결과이다. 그림 15에서 알 수 있듯이 Newmark방법에 의한 해석에 비하여 SSQ 방법은 주파수변형을 현저히 감소 시키며 정확한 결과를 나타낸다. 그림 14(a)와 그림 15(a)를 비교해 볼 때 적분시간 간격은 6배로 증가했



(a) 적분시간 간격 : 0.12 sec

그림 15. 기존 운동방정식 : SSQ 방법

표 3. 해석 시간 비교 : 60초 동안의 응답

운동방정식	기존 운동방정식	등가 운동방정식
적분방법	Newmark 방법 (평균 가속도법)	SSQ 방법
해석시간(sec) (Ratio)	63.00 (2.55)	24.71 (1.00)
적분시간 간격 (sec)	0.02	0.12

지만 정확도는 거의 차이가 없음을 알 수 있다.

표 3에서 각 방법에 대한 해석 시간을 비교해 보았다. 표 3에서 알 수 있듯이 제안 방법은 적분시간 간격을 6배로 증가시켜 정확한 결과를 구할 수 있으며 해석 시간을 2.5배 정도 단축시킬 수 있는 방법이다.

6. 결 론

본 논문은 기존의 운동방정식을 이중적분에 의해 저항력과 가진력을 유연화시키고, 수치적분 방법으로 SSQ 방법을 이용함으로써 임계 적분시간 간격 보다 증가된 적분시간 간격을 사용하여 정확한 결과를 구할 수 있는 방법을 제안 하였다. 예제를 통해서 알 수 있듯이, 제안방법은 다음과 같은 특징이 있다.

첫째, 이중적분에 의해서 저항력과 가진력을 유연화 하므로 지진과 같이 고주파 성분이 지배적인 하중이 입력될 경우에 비교적 긴 적분시간 간격을 사용하여 해석하여도 정확한 결과를 구할 수 있다.

둘째, 수치적분시 발생하는 주파수 변형과 같은 오차를 SSQ 방법을 적용함으로써 현저히 줄일 수 있다.

세째, 비선형 문제의 해석에 있어서 하중과 변위에

따라 변하는 저항함수(resistance function)에 대한 고려가 필요하며, 특히 재하(load), 하중제거(unloading)와 항복(yield) 상태에 대한 정확한 관찰을 위해 보간 차수가 높은 SSQ 방법을 등가방정식에 적용함으로써 해석시간을 단축시킬 수 있다.

네째, SSQ 알고리즘 특성상 Newmark 알고리즘보다 해석 시간은 조금 증가 하지만 등가운동 방정식에 적용시켜 해석한 전체적인 시간을 고려할 때 약 2.2 - 2.8배 정도 해석 시간을 단축시킬 수 있다. 즉 제안방법은 기존의 방법에 비해서 해석 시간을 현저히 단축시킬 수 있으며 특히 지진 입력과 같이 고주파 성분이 지배적인 하중에 대하여 큰 효과를 갖는 방법이다.

참고문헌

1. Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in En-*

gineering Analysis, Prentice-Hall, 1982.

2. Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, Prentice-Hall.

3. C.-C. Chen., and Robinson, A.R., "Improved time-history analysis for structural dynamics. I: Treatment of rapid variation of excitation and material nonlinearity." *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. 119, 1993, pp. 2496-2513.

4. Ehle, B.L., "On Pad" "approximations to exponential function and A-stable methods for the numerical solution of initial value problems." *Research Report CSSR 2010*, Dept. AACS, Univ. of Waterloo, Waterloo, Canada, 1969.

5. Healey, T.J., and Robinson, A.R., "Successive symmetric quadratures: a new approach to the integration of ordinary differential equations." *Proc. 5th ASCE-Engrg. Mech. Div. Specialty. Conf.*, ASCE, 1984.

(接受: 1995. 1. 18)