

## 중복 또는 근접한 고유진동수를 갖는 구조물의 효율적인 자유진동해석방법

An Efficient Free Vibration Analysis of Structures  
with Multiple or Close Natural Frequencies

정형조\* · 김만철\*\* · 이인원\*\*\*

Jung, Hyung Jo · Kim, Man Cheol · Lee, In Won

### Abstract

An efficient numerical method which can analyze the eigenproblem for the large structural system with multiple or close eigenvalues is presented. This method is formulated by applying the accelerated Newton-Raphson method to eigenproblem obtained from solution of a constrained stationary value problem. The step length used in the accelerated Newton-Raphson method is calculated by the least square concept.

This method can calculate the natural frequencies and mode shapes without any numerical instability which may be often encountered in the subspace iteration method or the determinant search method which has been mainly used for solving eigenvalue problem. The efficiency of this method is verified by comparing convergence and solution time for numerical examples with those of the subspace iteration method and the determinant search method.

### 요 지

본 논문에서는 중복 또는 근접한 고유진동수를 갖는 대형 구조물의 고유치문제를 효율적으로 해석할 수 있는 수치해석법을 제안하였다. 이 방법은 제한된 정적치문제를 풀어서 얻어진 고유치문제에 accelerated Newton-Raphson 방법을 적용하여 해를 구하는 방법이다. Accelerated Newton-Raphson 방법에서 사용하는 step length는 최소자승개념으로부터 구해진다.

제안방법은 오늘날 널리 쓰이고 있는 subspace iteration 방법이나 determinant search 방법에서 발생하기 쉬운 수치적 불안정성 없이 고유진동수와 모우드형을 구할 수 있다. 이 방법의 효율성은 몇가지의 수치해석을 통해서 증명하였다.

\*정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 석사과정

\*\*정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

\*\*\*정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 부교수

## 1. 서론

각종 구조물(건물, 교량, 자동차, 항공기, 선박, 기계, 원자력발전소 및 해양구조물 등)의 설계에 있어서 동적해석은 필수적이다. 이러한 구조물의 동적해석을 모두드 중첩법에 의하여 수행하는 경우, 계산시간의 대부분이 고유치 문제의 해(고유진동수와 모두드형)를 구하는데 소요된다. 따라서 구조물의 고유치 문제에 대한 효과적인 알고리즘 개발은 보다 경제적인 동적해석을 위해서 반드시 선행해야 하는 과제이다.

오늘날 고유치 문제를 해석하기 위해 사용되는 해법들을 크게 구분하면, 한번의 계산 과정으로 해를 구하는 근사 해법과 반복과정을 통해 정확한 해를 구해가는 반복 해법으로 나눌 수 있다. 근사 해법은 static condensation, dynamic condensation, Rayleigh-Ritz 해석, component mode 해석 등이 있다. 이 방법들은 근본적으로 방정식의 차수를 줄여서 해석하는 방법으로서, 적은 해석시간이 소요되지만 정확도가 낮기 때문에 예비설계나 반복 해법의 초기값을 구하기 위한 과정으로 사용된다. 반복 해법은 vector iteration 방법, 변환방법, Sturm sequence 성질을 이용하는 방법, polynomial iteration 방법 등이 있다.

대형구조물의 고유치 문제를 해석하는 경우에는 위 방법들중에서 유용한 특성을 가진 몇몇을 조합하여 해석을 수행하게 되는데, 현재 가장 널리 쓰이는 방법으로는 determinant search 방법과 subspace iteration 방법이 있다.

Determinant search 방법은 Sturm sequence 성질과 polynomial iteration 방법 그리고 inverse iteration 방법의 조합이다. 이 해법은 각 단계마다 새로운 행렬분해(matrix decomposition)를 필요로 하며, 이것에 필요한 연산 횟수는 약  $1/2 nm^2$ 이다. 여기서  $n$ 은 시스템의 차수이고  $m$ 은 시스템의  $1/2$ 띠폭(half bandwidth)을 의미한다. 위의 식에서 알 수 있듯이 행렬분해에 필요한 연산횟수는 띠폭이 증가하는 경우 급격히 증가하기 때문에, 이 해법은 띠폭이 큰 시스템의 고유치 해석에는 비효율적이다. 그리고 inverse iteration 방법을 사용하고 있기 때문에 고유치가 모여 있는 경우에는 수렴성이 낮다.

Subspace iteration 방법은 simultaneous inverse iteration 방법과 Rayleigh-Ritz 방법을 조합한 방법으로서, 이 해법은 띠폭이 비교적 큰 대형 구조물의 고유치 해석에 가장 효율적이며 안정된 해법이지만, 다음과 같은 몇가지 단점이 있다.

첫째, 수렴성을 증가시키기 위하여 shift를 가진 inverse iteration을 이용했을 경우 shift 값이 정확한 고유치에 가까우면 수치적 불안정성을 갖게 된다.

둘째, 많은 고유치를 구하고자 하는 경우 해석시간이 급격히 증가하는 단점을 가지고 있다.

셋째, 고유치가 모여 있는 경우에 determinant search 방법과 마찬가지로 수렴성이 낮다.

이상에서 알 수 있듯이 대형구조물에 대한 가장 효율적인 고유치 해석방법이라 할 수 있는 두 방법이 각기 단점을 가지고 있고, 특히 고유치가 중복되거나 근접한 경우에 수치적 불안정성이 존재한다. 즉 다경간 교량, 원자력 격납구조물, 사장교, 타이어 또는 단면이 대칭인 구조물 등과 같이 중복 또는 근접한 고유진동수를 갖는 구조물들을 subspace iteration 방법이나 determinant search 방법과 같은 기존 방법으로 해석할 경우에는 수치적 불안정성이 발생하기 쉽고, 또한 수렴성도 낮아져서 해를 얻지 못하거나 부정확한 해를 갖게 된다.

본 논문에서는 accelerated Newton-Raphson 방법을 이용하여 중복되거나 근접해 있는 고유진동수를 갖는 구조물의 고유치 해석을 수행하는 경우에 기존 방법에서 발생하기 쉬운 수치적 불안정성을 해소하고 또한 수렴성을 향상시키기 위한 효율적인 고유치 문제 해석법을 제안한다. 제안방법의 효율성을 증명하기 위하여 평판 구조물과 냉각탑 구조물을 예제로하여 수치해석을 수행하였다.

## 2. 해석방법

구조물의 동적해석에서 고려되는 일반화된 고유치 문제는 다음과 같다.

$$K\bar{x}_i = \lambda M\bar{x}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

여기에서  $K$ 는 강성행렬,  $M$ 은 질량행렬을 나타내고 두 행렬 모두  $n$ 차의 대칭행렬이며,  $M$ 은 정부호(positive definite)이다. 또한  $\bar{x}_i$ 는  $i$ 번째 모두드 형

을.  $\lambda_i$ 는  $i$ 번째 고유진동수의 제곱( $\omega^2$ )을 의미한다.

$s$ 개로 정의된 집합  $S = \{m, m+1, \dots, m+s-1\}$ 를 생각해 보자. 또한 고유치  $\lambda_j (j \in S)$ 에 대응하는 고유벡터  $\bar{x}_j (j \in S)$ 에 의해 span되어지는  $s$ 차원 부분공간을  $R$ 이라 하고,  $M$ 에 대해 정규직교하고 부분공간  $R$ 에 근접해 있는  $s$ 개의 벡터를  $\bar{y}_j (j \in S)$ 라 하자. 이때 벡터  $\bar{y}_j$ 는 다음과 같이 구조물의 고유벡터  $\bar{x}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 의 급수형태로 표현된다.

$$\bar{y}_j = \sum_{i=1}^n C_{ij} \bar{x}_i \quad (j \in S) \quad (2)$$

여기에서  $C_{ij}$ 는 아래와 같은 관계를 만족한다.

$$\sum_{i \in S} c_{ij}^2 \leq \sum_{i \in S} c_{ij}^2 \quad (j \in S) \quad (3)$$

위와 같은 정의를 이용하여 고유벡터  $\bar{x}_j (j \in S)$ 의 부분공간  $R$ 을 "제한된 정적치 문제(Constrained stationary value problem)"로 표현하면 다음과 같다.

$$w = \sum_{j \in S} \bar{y}_j^T K \bar{y}_j \quad (4)$$

라 하고 제한조건

$$\bar{y}_i^T M \bar{y}_j = \delta_{ij} \quad (i, j \in S) \quad (5)$$

을 만족하는  $w$ 의 정적치(stationary value)를 구하는 문제이다.

여기서  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker delta이다. 식 (4)와 식 (5)를 통해서 함수  $w$ 가 벡터  $\bar{y}_j$ 의 Rayleigh quotient의 합이 됨을 알 수 있다.

Lagrange multiplier 방법을 이용하여 위와 같은 정적치 문제를 표현하면 다음과 같다.

$$L = \sum_{i \in S} \bar{y}_i^T K \bar{y}_i - \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \mu_{ij} (\bar{y}_i^T M \bar{y}_j - \delta_{ij}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{y}_j} = 0 : K \bar{y}_j = \sum_{i \in S} \mu_{ij} M \bar{y}_i \quad (j \in S) \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_{ij}} = 0 : \bar{y}_i^T M \bar{y}_j = \delta_{ij} \quad (i, j \in S) \quad (8)$$

여기서  $\mu_{ij}$ 는 대칭, 즉  $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ 이다.

여기에서 식 (7)과 식 (8)을 행렬식을 이용하여 나타내면, 식 (9)와 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$K \bar{y}_j = M Y \bar{d}_j \quad (j = m, m+1, \dots, m+s-1) \quad (9)$$

또는

$$K Y = M Y D \quad (10)$$

그리고

$$Y^T M Y = I_s \quad (11)$$

여기서

$$Y = [\bar{y}_m, \bar{y}_{m+1}, \dots, \bar{y}_{m+s-1}]$$

$$\bar{d}_j^T = (\mu_{mj}, \mu_{m+1j}, \dots, \mu_{m+s-1j}) \quad (j = m, m+1, \dots, m+s-1)$$

$$D = [\bar{d}_m, \bar{d}_{m+1}, \dots, \bar{d}_{m+s-1}]$$

$I_s$ 는  $s$ 차의 단위행렬

초기 근사값  $\bar{d}_j^{(0)}, \bar{y}_j^{(0)} (j = m, m+1, \dots, m+s-1)$ 을 가지고 식 (9)를  $k$ 번 반복 연산하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\bar{r}_j^{(k)} = K \bar{y}_j^{(k)} - M Y^{(k)} \bar{d}_j^{(k)} \quad (12)$$

여기서  $\bar{r}_j^{(k)}$ 는 잔류벡터를 의미하며  $\bar{d}_j^{(k)} = \bar{d}_j, \bar{y}_j^{(k)} = \bar{y}_j$ 가 되려면 잔류벡터가 영벡터(null vector)이어야 한다. 이를 위해서 다음과 같은 Newton-Raphson 방법을 적용한다.

$$\bar{r}_j^{(k-1)} = 0 \quad (13)$$

$$= K \bar{y}_j^{(k-1)} - M Y^{(k-1)} \bar{d}_j^{(k-1)}$$

여기서

$$\bar{d}_j^{(k+1)} = \bar{d}_j^{(k)} + \Delta \bar{d}_j^{(k)} \quad (14)$$

$$\bar{y}_j^{(k+1)} = \bar{y}_j^{(k)} + \Delta \bar{y}_j^{(k)} \quad (15)$$

식 (14)와 식 (15)를 식 (13)에 대입한 후, 비선형 항을 무시하고 정리하면 다음과 같은 선형식을 얻게 된다.

$$-K \bar{y}_j^{(k)} + M Y^{(k)} \bar{d}_j^{(k)} \quad (16)$$

$$= K \Delta \bar{y}_j^{(k)} - M \Delta Y^{(k)} \bar{d}_j^{(k)} - M Y^{(k)} \Delta \bar{d}_j^{(k)}$$

여기서  $\lambda_j (j = m, m+1, \dots, m+s-1)$ 가 중복근일 때는  $D$ 의 비대각요소들은 0이 되고, 서로 근접한 경우에는 비대각요소들은 대각요소에 비해서 매우 작다.<sup>(1)</sup> 그러므로 식 (16)의 우변의 두번째 항을  $\mu_{jj}^{(k)} M \Delta \bar{y}_j^{(k)}$ 로 근사할 수 있고 식 (16)을 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 & -\bar{K}\bar{y}_j^{(k)} + M\bar{Y}^{(k)}\bar{d}_j^{(k)} \\
 & = K\Delta\bar{y}_j^{(k)} - \mu_{jj}^{(k)}M\Delta\bar{y}_j^{(k)} - M\bar{Y}^{(k)}\Delta\bar{d}_j^{(k)}
 \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)에서 미지수는  $(n+s)$ 개( $\Delta\bar{d}_j^{(k)}$ 의  $s$ 개 요소,  $\Delta\bar{y}_j^{(k)}$ 의  $n$ 개 요소)이지만 방정식은  $n$ 개이므로,  $\Delta\bar{d}_j^{(k)}$ 와  $\Delta\bar{y}_j^{(k)}$ 를 구하기 위해서는  $s$ 개의 방정식이 더 필요하다.

추가적으로 필요한  $s$ 개의 방정식은 다음과 같다.

$$\bar{Y}^{(k)T} M \Delta\bar{y}_j^{(k)} = 0 \quad (18)$$

이 식은 증분벡터  $\Delta\bar{y}_j^{(k)}$ 가 질량행렬  $M$ 에 대하여 현 벡터  $\bar{y}_j^{(k)}$  ( $j \in S$ )에 직교하도록 하므로써, 현 벡터가 가장 효율적으로 구조물의 고유벡터  $\bar{x}_j$  ( $j \in S$ )에 수렴하도록 증분벡터를 제한하는 것을 의미한다(그림 1 참조).

식 (17)과 식 (18)을 하나의 선형대수 행렬식으로 표현하면 다음과 같다(그림 2 참조).

$$\begin{bmatrix} K - \mu_{jj}^{(k)}M & -M\bar{Y}^{(k)} \\ -\bar{Y}^{(k)T}M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\bar{y}_j^{(k)} \\ \Delta\bar{d}_j^{(k)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \bar{r}_j^{(k)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

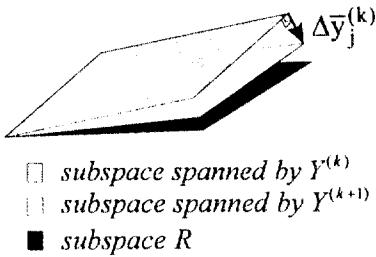


그림 1. 부가조건의 기하학적 설명(가정:  $M=I$ ).

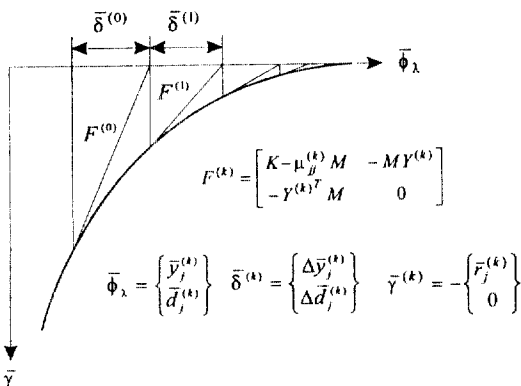


그림 2. Newton-Raphson 방법.

미지수  $\Delta\bar{d}_j^{(k)}$ 와  $\Delta\bar{y}_j^{(k)}$ 에 대해서 계수행렬은 대칭이고 또한 정칙(nonsingular)이다.

식 (19)의 알고리즘은 반복할 때마다 계수행렬이 변하기 때문에 많은 연산을 필요로 한다. 이러한 비효율성을 개선하기 위해 수정된 Newton-Raphson 방법을 이용하여 다음과 같은 고유치 해법을 유도하였다(그림 3 참조).

$$\begin{bmatrix} K - \mu_{jj}^{(0)}M & -M\bar{Y}^{(k)} \\ -\bar{Y}^{(k)T}M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\bar{y}_j^{(k)} \\ \Delta\bar{d}_j^{(k)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \bar{r}_j^{(k)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

즉, 식 (19)의 계수행렬에서  $\mu_{jj}^{(k)}$ 를  $\mu_{jj}^{(0)}$ 로 대체하였다.

식 (20)은 수렴을 위해서 식 (19)보다 많은 반복횟수를 필요로 하지만, 일단 계수행렬의 부행렬  $K - \mu_{jj}^{(0)}M$ 가 각 반복 때마다 항상 일정하기 때문에 연속적인 반복연산에서는 부행렬  $-M\bar{Y}^{(k)}$ 에 대한 적은 연산만을 필요로 하게 되어 전체적인 해석시간을 감소시킨다.

반복횟수  $k$ 가 충분히 커지면, 증분벡터  $\Delta\bar{d}_j^{(k)}$ 와  $\Delta\bar{y}_j^{(k)}$ 는 0이 되고 식 (20)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{K}\bar{y}_j^{(k)} - M\bar{Y}^{(k)}\bar{d}_j^{(k)}) = 0 \quad (21)$$

또한,

$$\begin{aligned}
 \bar{d}_j &= \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{d}_j^{(k)} \\
 \bar{y}_j &= \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{y}_j^{(k)}
 \end{aligned} \quad (22)$$

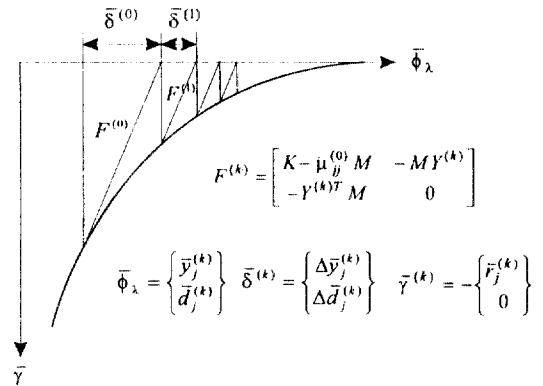


그림 3. 수정된 Newton-Raphson 방법.

식 (21)과 식 (11)을 다시 쓰면 아래와 같다.

$$KY = MYD \quad (23)$$

$$Y^TMY = I_s \quad (24)$$

여기서

$$Y = [\bar{y}_m, \bar{y}_{m+1}, \dots, \bar{y}_{m+s-1}]$$

$$D = [\bar{d}_m, \bar{d}_{m+1}, \dots, \bar{d}_{m+s-1}]$$

고유치  $\lambda_j (j=m, m+1, \dots, m+s-1)$ 가 중복근이라면, D의 비대각요소의 값들은 모두 0이다. 그리고 대각요소 값들은 구하고자 하는 중복 고유치를 나타낸다. 또한 Y의 벡터들은 그에 대응하는 고유벡터들이 된다.<sup>(1)</sup> 그러나 고유치가 중복근이 아니고 근접해 있을 경우에는 추가적인 연산이 필요하다. 그 과정은 아래와 같다.

s개의 고유벡터 ( $X = [\bar{x}_m, \bar{x}_{m+1}, \dots, \bar{x}_{m+s-1}]$ )와 그에 대응하는 고유치 ( $A = \text{diag}(\lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+s-1})$ )를 갖는 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$KX = MXA \quad (25)$$

여기서 K, M은 n차의 대칭행렬이다.

다음과 같은 관계를 생각해 보자.

$$X = YZ \quad (26)$$

여기서 Z는 s차의 변환행렬이다.

식 (26)을 식 (25)에 대입하면,

$$KYZ = MYZA \quad (27)$$

또한 식 (23)에 행렬 Z를 곱하면,

$$KYZ = MYDZ \quad (28)$$

식 (27)과 식 (28)에  $Y^T$ 를 곱하고 식 (24)를 이용하여 정리하면, 다음과 같은 고유치 문제를 얻게 된다.

$$DZ = ZA \quad (29)$$

위 식은 차수가 s로 매우 작기 때문에, Jacobi 방법과 같은 기존 기법으로 손쉽게 계산할 수 있다. 여기서 구해진 고유치가 구하고자 하는 구조물의 고유치가 되고 고유벡터들은 식 (26)을 통해서 구할 수 있다. 여기까지가 수정된 Newton-Raphson 방법

을 이용하여 중복 또는 근접한 고유진동수를 갖는 구조물의 고유치 문제를 해석하는 내용이다. 이 방법을 Lee-Robinson 방법이라 한다.<sup>(1)</sup>

수정된 Newton-Raphson 방법을 이용하는 고유치 해법, 즉 Lee-Robinson 방법은 각 반복횟수당 필요한 연산횟수를 현저히 감소시켰으나, 수렴성의 저하로 수렴을 위해서는 많은 반복횟수를 필요로 한다. 이러한 문제점을 개선하기 위해서 본 논문에서는 다음과 같은 accelerated Newton-Raphson 방법을 이용하였다(그림 4 참조).

$$\bar{d}_j^{(k+1)} = \bar{d}_j^{(k)} + \Delta \bar{d}_j^{(k)} \quad (30)$$

$$\bar{y}_j^{(k+1)} = \bar{y}_j^{(k)} + \alpha_j^{(k)} \Delta \bar{y}_j^{(k)} \quad (31)$$

식 (31)에 있어서 step length( $\alpha_j^{(k)}$ )는  $\bar{r}_j^{(k+1)}$ 의 정규(norm)를 최소화하기 위한 값으로, 다음과 같이 최소자승법(least square method)을 이용하여 구했다.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j^{(k)}} \left\{ (\bar{r}_j^{(k+1)})^T \bar{r}_j^{(k+1)} \right\} = 0 \quad (32)$$

$$\alpha_j^{(k)} = - \frac{N_1 - N_2}{D} \quad (33)$$

여기서

$$N_1 = (\Delta \bar{y}_j^{(k)})^T (K - \mu_j^{(k+1)} M) (K - \mu_j^{(k+1)} M) \bar{y}_j^{(k)}$$

$$N_2 = (\Delta \bar{y}_j^{(k)})^T (K - \mu_j^{(k+1)} M) \left( \sum_{i=1}^s \mu_i^{(k+1)} M \bar{y}_i^{(k)} \right)$$

$$D = (\Delta \bar{y}_j^{(k)})^T (K - \mu_j^{(k+1)} M) (K - \mu_j^{(k+1)} M) \Delta \bar{y}_j^{(k)}$$

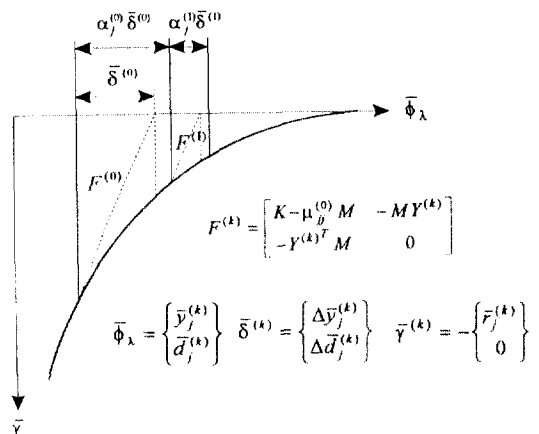


그림 4. Accelerated Newton-Raphson 방법.

$\mu_j^{(k+1)}$ 은 식 (30)의  $j$ 번째 행으로, 이미 구해진 값이다.

제안방법에서 step length( $\alpha_j^{(k)}$ )를 벡터에 대해서만 적용한 이유는 고유치에 대한 수렴성이 고유벡터의 수렴성 보다 좋기 때문이다.<sup>(1)</sup>

제안방법의 첫번째 반복과정에서 step length( $\alpha_j^{(k)}$ )를 구하는데 필요한 연산횟수는  $2nm_a + 2nm_b + (s+5)n+1$ 이다. 이러한 연산횟수는 Lee-Robinson 방법의 첫번째 반복과정에서 필요한 총연산횟수  $(s+4)nm_a + 2snm_b + (1/2)n(s^2+7s+4)$ 와 비교할 때 무시할 수 없는 값이다. 그러나 두번째 이후의 각 반복과정부터는 전 단계의 step length( $\alpha_j^{(k)}$ )를 구하는 과정에서 계산된 결과들을 다음 과정에서 이용할 수 있기 때문에 단지  $7n+1$ 의 부가적인 연산만을 필요로 한다.

제안방법의 알고리즘은 다음과 같다(그림 5 참조). 여기에서는 고유치가 중복되거나 근접한 경우만을 고려하기로 한다. Subspace iteration 방법에서 상대오차  $10^{-1}$ 을 만족하는 중간결과를 초기값으로 하고, 그 값의 오차정규가  $10^{-1}$  이상인 경우 step length( $\alpha_j^{(k)}$ )를 적용한다. 그리고 수렴된 고유치를 조사해서

중복근이면 반복을 끝내고 단지 근접한 경우라면 추가적인 연산을 수행한다.

### 3. 수치해석

제안방법의 효율성을 증명하기 위하여, 단순지지된 평판 구조물과 냉각탑 구조물을 해석하였다. 각 대상 구조물에 대해서 ADINA-84의 subspace iteration 방법과 determinant search 방법 그리고 수정된 Newton-Raphson 방법을 이용한 방법(Lee-Robinson 방법)과 이번 연구에서 제안한 accelerated Newton-Raphson 방법을 이용한 방법으로 수치해석을 수행하여, 허용오차정규  $10^{-9}$ 을 만족하는 10개의 모우드를 구하는데 소요되는 해석시간(CPU 시간)과 수렴성을 각각 비교하였다. 특히 subspace iteration 방법은 가장 수렴성이 좋은 결과를 얻어내기 위하여 Lanczos method로 20개의 초기 벡터를 generation하고 accelerated scheme을 적용시켰다.

제안방법의 초기값들은 ADINA-84에 사용하고 있는 subspace iteration 방법에서 상대오차  $10^{-1}$ 을 만족하는 중간결과를 이용하였고, 오차정규가  $10^{-1}$  이상인 모우드에 대해서 step length( $\alpha_j^{(k)}$ )를 적용하였다. 해석에 사용한 컴퓨터는 IRIS4D20-S17이다.

#### 3.1 평판 구조물

단순지지된 평판 구조물의 유한요소 모델<sup>(12)</sup>은 36개의 9절점 shell 요소와 169개의 절점으로 되어 있고, 총 자유도는 701개이다(그림 6 참조). 유한요소법에 의해서 모델화된 평판 구조물의 1/2띠폭(half bandwidth)은 89이다. 이 구조물의 제원과 물성치는 그림 6에 있다.

##### 3.1.1 중복 고유진동수를 갖는 경우

표 1은 네가지 해석방법에 대해서 허용 오차정규  $10^{-9}$ 을 만족하는데 소요되는 해석시간을 비교한 것이다. 제안방법에 소요되는 해석시간을 1이라 하면, accelerated subspace iteration 방법은 1.59배, determinant search 방법은 6.49배 그리고 Lee-Robinson 방법은 1.05배의 해석시간이 더 소요되었다. 여기서 제안방법이 Lee-Robinson 방법에 비해 단지 5%의 해석시간 단축 효과만을 보인 이유는 step length( $\alpha_j^{(k)}$ )가 3개의 모우드에만 적용됐기 때문이다.

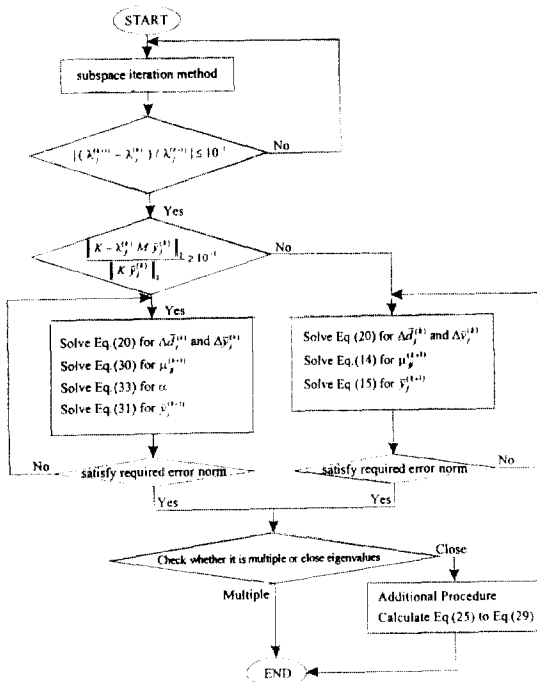
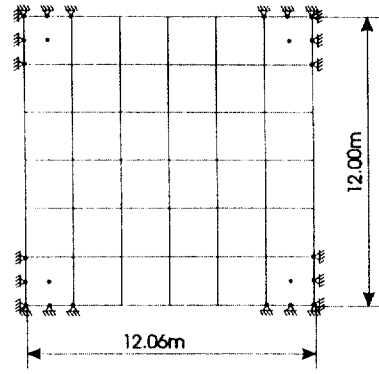
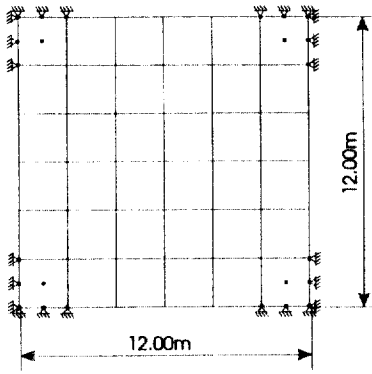


그림 5. 제안방법의 알고리즘.



$E = 2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}$      $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$   
 Poisson ratio = 0.3    Shell thickness = 0.01m

(a) 중복 고유진동수를 갖는 경우

(b) 근접한 고유진동수를 갖는 경우

그림 6. 단순지지된 평판 구조물. (12)

표 1. 허용 오차정규  $10^{-9}$ 을 만족하는 10개의 고유값을 구하는데 소요되는 해석시간.

Methods	Solution Time, sec (ratio)
Proposed Method	172.39 (1.00)
Lee-Robinson Method	180.27 (1.05)
Accelerated Subspace Iteration Method	274.60 (1.59)
Determinant Search Method	1118.60 (6.49)

표 2. 허용 오차정규  $10^{-9}$ 을 만족하는 10개의 고유값을 구하는데 소요되는 해석시간.

Methods	Solution Time, sec (ratio)
Proposed Method	177.41 (1.00)
Lee-Robinson Method	187.19 (1.06)
Accelerated Subspace Iteration Method	291.85 (1.65)
Determinant Search Method	832.09 (4.69)

그림 7은 고유치가 중복근 중 하나인 8번째 고유값의 수렴성을 비교한 것으로 제안방법과 Lee-Robinson 방법이 기존방법에 비해 훨씬 빨리 수렴되었고, step length( $\alpha^{(k)}$ )를 적용한 제안방법이 Lee-Robinson 방법보다 좋은 수렴성을 나타냈다.

### 3.1.2 근접한 고유진동수를 갖는 경우

표 2는 네가지 해석방법에 대해서 허용 오차정규

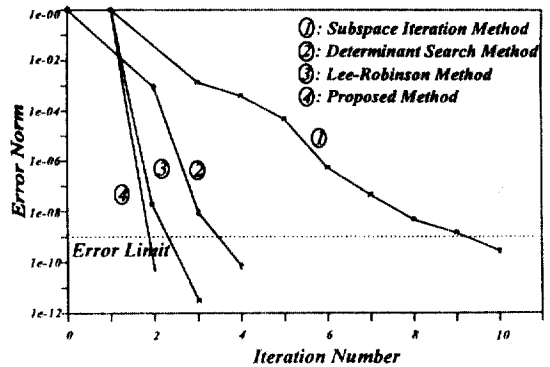


그림 7. 8번째 고유값의 수렴성.

$10^{-9}$ 을 만족하는데 소요되는 해석시간을 비교한 것이다. 제안방법에 소요되는 해석시간을 1이라 하면 accelerated subspace iteration 방법은 1.65배가 더 소요되었고, determinant search 방법은 4.69배 그리고 Lee-Robinson 방법은 1.06배의 해석시간이 더 소요되었다. 여기서 제안방법이 Lee-Robinson 방법에 비해 단지 6%의 해석시간 단축 효과만을 보인 이유는 step length( $\alpha^{(k)}$ )가 3개의 모드에에만 적용됐기 때문이다.

그림 8은 근접한 고유치를 갖는 7번째 고유값의 수렴성을 비교한 것이고, 그림 9는 서로 다른(distinct) 고유치를 갖는 9번째 고유값의 수렴성을 비교한 것이다. 두 경우 모두 기존 방법에 비해 제안방법과 Lee-Robinson 방법이 훨씬 빨리 수렴됨을 알 수 있다.

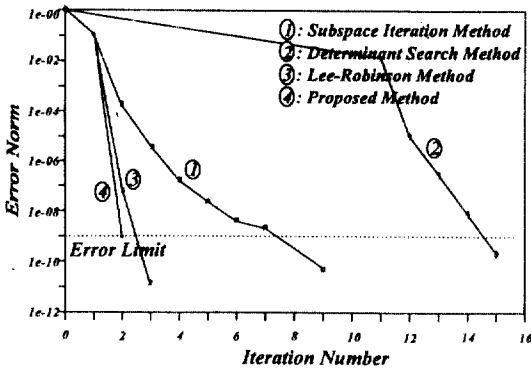
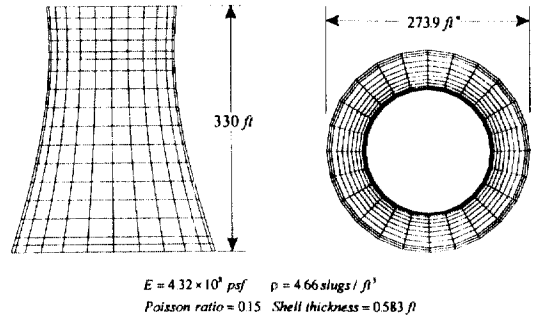


그림 8. 7번째 고유값의 수렴성.



(a) 정면도 (b) 평면도  
그림 10. 냉각탑 구조물.<sup>(13)</sup>

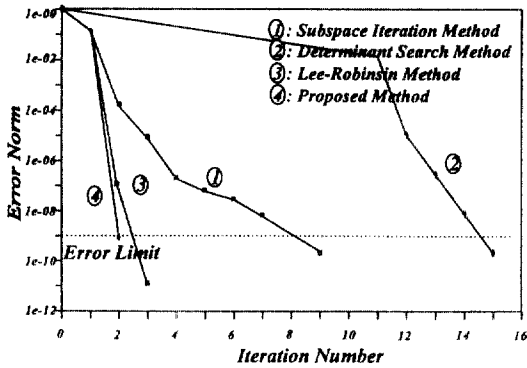


그림 9. 9번째 고유값의 수렴성.

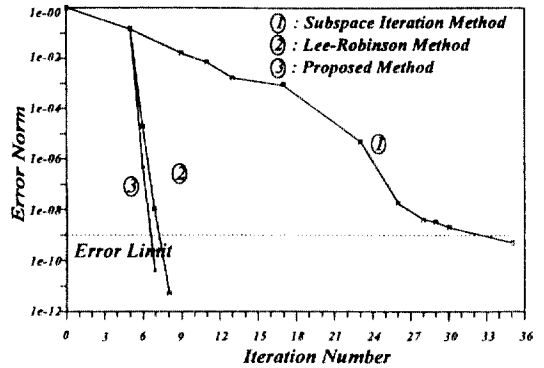


그림 11. 8번째 고유값의 수렴성.

표 3. 허용 오차정규  $10^{-9}$ 을 만족하는 10개의 고유값을 구하는데 소요되는 해석시간

Methods	Solution Time, sec (ratio)
Proposed Method	3067.71 (1.00)
Lee-Robinson Method	3165.62 (1.03)
Accelerated Subspace Iteration Method	6182.49 (2.02)

### 3.2 냉각탑 구조물

냉각탑 구조물의 유한요소 모델<sup>(13)</sup>은 408개의 4절점 shell요소와 432개의 절점으로 되어 있고, 총 자유도는 2448개이다(그림 10 참고). 유한요소법에 의해서 모델화된 냉각탑 구조물의 1/2띠폭(half bandwidth)은 201이다. 이 구조물의 제원과 물성치는 그림 10에 있다.

냉각탑 구조물은 1/2띠폭이 상당히 큰 구조물이어서 determinant search 방법으로는 정확한 수치 해석 결과를 얻어낼 수 없었다.

표 3은 세가지 해석방법에 대해서 허용 오차정규

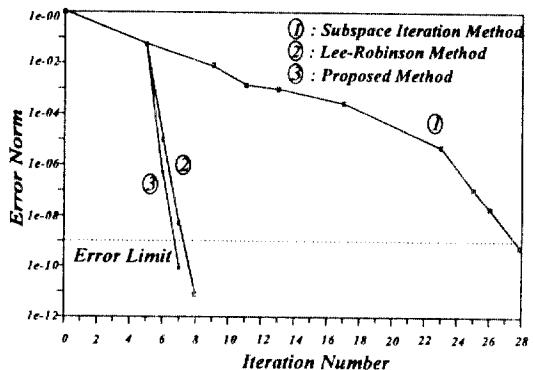


그림 12. 10번째 고유값의 수렴성.

$10^{-9}$ 을 만족하는데 소요되는 해석시간을 비교한 것이다. 제안방법에 소요되는 해석시간을 1이라고 하면, subspace iteration 방법은 2.02배, Lee-Robinson 방법은 1.03배의 해석시간이 더 소요되었다. 여기서 제안방법이 Lee-Robinson 방법에 비해 단지 3%의 해석시간 단축 효과만을 보인 이유는 step length ( $\alpha^{(k)}$ )가 2개의 모우드에만 적용됐기 때



문이다.

그림 11과 그림 12는 각각 8번째와 10번째 고유치에 대응하는 고유벡터의 수렴성을 비교한 것으로, 제안방법과 Lee-Robinson 방법이 accelerated subspace iteration 방법보다 수렴성이 월등히 좋았다. 또한 제안방법은 step length( $\alpha^{(k)}$ )가 적용되었기 때문에 Lee-Robinson 방법보다 좋은 수렴성을 보였다.

#### 4. 결 론

본 논문은 accelerated Newton-Raphson 방법을 이용하여 구조물의 고유진동수가 중복 또는 근접한 경우의 고유치 문제에 대한 효율적인 수치해석법을 제안하였다. 예제를 통해서 알 수 있듯이 제안방법은 다음과 같은 특징을 가지고 있다.

첫째, 제안방법은 고유치가 서로 다른 경우는 물론이고 고유치가 중복되거나 근접해 있는 경우에도 수치적 불안정성을 유발하지 않고 효율적으로 구조물의 동특성을 구해주는 매우 일반적인 방법이다.

둘째, 제안방법은 각각의 고유쌍(eigenpair)을 독립적으로 구하기 때문에 이미 구해진 고유쌍의 오차에 영향을 받지 않는다.

셋째, 일반적인 고유치 해법들의 수렴성은 초기값의 오차에 매우 큰 영향을 받게 되는데, 제안방법에서 사용하는 step length( $\alpha^{(k)}$ )는 초기값의 오차가 클수록 보다 효율적으로 작용한다. 따라서 제안방법은 기존방법에 비해서 수렴가능한 초기값의 오차범위가 더 커지는 장점을 갖는다.

넷째, 제안방법은 정확한 계산을 요구하는 고유치 문제에 더욱 효과적으로 사용할 수 있다.

다섯째, 기존 accelerated Newton-Raphson 방법에서는 특성함수의 형상을 무시한 채 일정한 값을 step length( $\alpha^{(k)}$ )로 사용하므로써 몇몇의 경우 오히려 수렴성이 감소하는 문제점이 지적되었다. 그러나 제안방법에서는 각 반복단계마다 잔류벡터의 정규를 최소화하도록 특성함수의 형상을 고려한 적절한 값을 step length로 사용하기 때문에 위의 문제점을 해결하였다.

즉, 제안방법은 구조물의 고유진동수가 중복 또는 근접한 경우와 같이 수치적 불안정성을 가지기 쉬운

경우에도 수치적 안정성을 가지고 구조물의 동특성을 구할 수 있을 뿐만 아니라, 비록 step length( $\alpha^{(k)}$ )를 구하기 위해 부가적인 연산을 필요로 하지만 수렴성을 향상시킴으로써 전체 해석시간을 감소시킨 효율적인 고유치 해법이다.

#### 참고문헌

1. Lee, I.W. and Robinson, A.R., "Solution techniques for large eigenvalue problems in structural dynamics", *Structural Research Series No.462*, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1979.
2. 김만철, "대형구조물의 효율적인 자유진동 해석 방법", 석사학위논문, 한국과학기술원, 1994.
3. Robinson, A.R. and Harris, J.F., "Improving approximate eigenvalues and eigenvectors", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol.97(EM2), 1971, pp. 457-475.
4. Bathe, K.J. and Wilson, E.L., "Eigensolution of the large structural systems with small bandwidth", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol.99, 1973, pp.467-479.
5. Bathe, K.J. and Ramaswamy, S., "An accelerated subspace iteration method", *Computer Methods in Applied Mech. and Eng.*, Vol.23, 1980, pp.313-331.
6. Wilson, E.L. and Itoh, T., "An eigensolution strategy for large systems", *Computers & Structures*, Vol.16, 1983, pp.259-265.
7. Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982.
8. Meirovitch, L., *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff, 1980.
9. Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*, McGraw-Hill, 1967.
10. Hughes, Thomas J.R., *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1987.
11. Blevins, R.D., *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Company, 1979.
12. *ADINA System Verification Manual*, ADINA Engineering, Inc., 1983.
13. Habibulah, A. and Wilson, E.L., *SAP90™ Sample Example and Verification Manual*, Computers and Structures, Inc., 1989.

(接受: 1995. 1. 18)