

부가조건을 이용한 고유진동수 및 모드 미분값의 효율적인 계산기법

An Efficient Computational Technique of Eigenpair Derivatives Using Side Conditions

정길호* · 정형조** · 오주원*** · 이인원****

Jung, Gil Ho · Jung, Hyung Jo · Oh, Ju Won · Lee, In Won

Abstract

This paper presents an efficient numerical method whose stability is proved for computation of eigenpair derivatives. The method is very simple and a compact algorithm and gives an exact solution. Furthermore, the proposed method can save the computational time and computer memory. The eigenpair derivatives can be obtained by solving algebraic equations with side conditions in the both case of nonrepeated and repeated eigenvalues. As an example to demonstrate the efficiency of the proposed method in the case of distinct eigenvalues, a cantilever plate is considered, and a cantilever beam in the case of repeated eigenvalues. Especially, the proposed method can save the computer memory about 33% and the computational time about 30% in the case of repeated eigenvalues. The design parameter of the cantilever plate is its thickness, and that of the cantilever beam its height. It is important to note that the numerical stability of the proposed algorithm is proved.

Keywords : *sensitivity analysis, eigenvalue problem, eigenpair derivative*

요 지

본 논문은 시스템의 고유치와 고유 벡터들의 민감도 해석을 위한 수치적으로 안정적이고 효율적인 방법을 제시한다. 이 방법은 알고리즘이 대단히 간단하고 정확한 값을 구한다. 또한 제안 방법은 계산시간과 컴퓨터 메모리를 줄일 수 있다. 고유진동수가 서로 다른 경우나 중복근을 갖는 경우에도 간단한 부가 조건식을 고려함으로써 해를 구한다. 평판과 외팔보를 예제로하여 제안 방법의 효율성을 증명했다. 특히 고유치가 중복근을 갖는 경우 33%의 컴퓨터 메모리와 약 30%의 계산시간을 줄였다. 평판의 경우 설계 변수

*정희원 · KAIST 기계공학과 박사과정

**정희원 · KAIST 토목공학과 박사과정

***정희원 · 한남대학교 토목공학과 교수

****정희원 · KAIST 토목공학과 교수

는 평판의 두께이고, 외팔보의 경우는 높이이다. 제안 방법의 수치적 안정성을 증명하였다.

핵심용어 : 민감도해석, 고유치 문제, 고유쌍 미분

1. 개 요

시스템의 거동은 고유치 문제의 해, 즉 고유 진동수와 모우드를 구함으로써 완전히 결정된다. 이러한 고유치 문제의 해는 시스템의 설계변수가 변함에 따라 변하게 되고, 따라서 시스템의 동응답 특성도 변하게 된다. 그래서 고유쌍의 미분값들은 동응답의 민감도를 결정하는데 대단히 유용할 뿐만 아니라, 설계 경향 연구나 실제 시스템 거동에 대한 직관을 얻는데도 유용하다.

1974년에 Rudisill과 Chu^(1,2)가 고유 벡터 미분을 구할 수 있는 대수적인 방법을 제안했다. 이 방법은 알고리즘은 간단하지만 최종적으로 풀어야 하는 선형 대수 방정식의 계수 행렬이 비대칭이고, 서로 다른 고유치를 갖는 고유치 문제에 국한되어 있다. 1976년에 Nelson⁽²⁾은 서로 다른 고유치를 갖는 일반적인 실제수 행렬에 대한 고유쌍을 계산하는 알고리즘을 제안했다. Rudisill과 Chu의 방법과 마찬가지로 이 방법도 한 개의 고유쌍 미분을 계산하기 위하여 그에 해당하는 한 쌍의 고유쌍 고유치가 필요하기 때문에 대단히 효율적이긴 하지만, 고유치가 중근을 갖는 경우에 어려움이 있다. 일반적인 구조물은 구조물의 대칭성 때문에 많은 중근이 존재한다. 그래서 중근을 갖는 경우에 고유 진동수 및 모우드의 미분을 구하기 위하여 많은 연구가 진행되고 있다.^(4,7) Nelson의 방법을 중근을 갖는 경우까지 확장한 Ojalvo^(4,5)방법이 있고, 이 방법을 수정한 Mills-Curren⁽⁶⁾방법과 Dailey⁽⁷⁾ 방법이 있다. 이 방법들은 Nelson의 방법을 기본적인 알고리즘으로 사용하기 때문에 모우드의 미분값을 구할 때 많은 연산과정이 필요하다. 그렇지만 제안 방법은 계수 행렬이 대칭을 유지하도록 제약 조건을 첨가하여 대칭으로 만들어서 선형 대수 방정식을 풀기 때문에 밴드(band)형태나 스카이라인(sky-line)형태로 계산하여서 컴퓨터 메모리나 해석 시간을 절약할 수 있는 장점이 있다. 또한 시스템의 고유 진동수가 중복근을 갖는 경우에도, 설계 변수가 변할 때 나타나는 m(중

복근의 갯수)개의 고유 벡터에 근접한 원래 시스템의 고유 벡터 집합을 구하면, 이 벡터들을 이용한 제약 조건을 첨가하여 모우드의 미분을 계산할 수 있다. 고유 진동수가 중복근을 갖는 경우에 있어서 기존의 해법들(Mills-Curren 방법, Dailey 방법 등)은 질량 및 강성행렬의 2차 미분값까지 필요한 반면에 제안 방법은 1차 미분값만이 필요하다. 이것이 제안 방법의 가장 큰 장점중의 하나이다.

2장에서는 기존 방법들의 고유치 문제에 대한 민감도 해석을 간략히 살펴보았다. 3장에서는 제안 방법과 제안 방법의 수치적 안정성을 증명하였고, 4장에서는 예제를 통한 수치 해석을 수행하였다.

2. 기존의 민감도 해석 기법

2.1 이론적 배경

동적 해석에서 일반화된 고유치 문제는 다음과 같다.

$$K \phi_j = \lambda_j M \phi_j \quad (1)$$

여기서 K와 M은 각각 시스템의 강성 행렬과 질량 행렬이다. M은 양의 한정(positive definite) 행렬이고, K는 양의 한정(positive definite) 행렬 또는 반 양의 한정(semipositive definite) 행렬이다. K와 M은 n차의 대칭 행렬이고 λ_j 는 시스템의 j번째 고유 진동수의 제곱이고, ϕ_j 는 시스템의 모우드이다. 모우드는 일반적으로 다음과 같이 정규화한다.

$$\phi_j^T M \phi_j = 1 \quad (2)$$

고유치의 미분을 구하기 위하여 설계 변수에 대하여 식 (1)을 미분하면, 다음과 같다.

$$(K - \lambda_j M) \phi_j' = -(K' - \lambda_j M') \phi_j + \lambda_j' M \phi_j \quad (3)$$

식 (3)의 양변 앞에 ϕ_j^T 를 곱하고 정리하면, 고유치 미분을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\lambda_j' = \phi_j^T (K' - \lambda_j M') \phi_j \quad (4)$$

여기서, $\lambda_j' = \partial \lambda_j / \partial p$, $K' = \partial K / \partial p$ 그리고 $M' = \partial M / \partial p$ 이고, p 는 설계 변수이다. 이제 모우드의 미분값을 살펴보면, 행렬 $[K - \lambda_j M]$ 가 정칙 행렬이 아니기 때문에 직접적으로는 ϕ_j' 을 구할 수 없다. 그래서 Rudisill과 Chu는 제약 조건을 첨가해서 비대칭 정칙 행렬을 구성하여 ϕ_j' 을 계산했고, Nelson은 특이해(particular solution)와 비특이해(homogeneous solution)의 합으로 ϕ_j' 를 구하는 알고리즘을 제시했다. 이외에도 모우드의 미분을 모우드의 조합으로 표시하여 계산하는 모우드 방법(modal method)⁽⁸⁻¹²⁾과 이를 수정·보완한 많은 방법들이 있지만, 한 개의 모우드의 미분을 구하기 위하여 전부, 또는 여러 개의 모우드들이 필요하기 때문에 계산량이 많은 단점이 있다.

2.2 Nelson 방법

이 방법은 특이해(particular solution) v 와 비특이해(homogeneous solution) $c\phi_j$ 의 합으로 모우드의 미분을 계산한다. 즉,

$$\phi_j' = v + c\phi_j \quad (5)$$

여기서 c 는 계수이다. 특이해 v 는 j 번째 고유벡터의 요소중에서 가장 큰 값에 해당하는 위치를 k 라고 하면, ϕ_j' 의 요소중에서 k 번째 값을 0으로 하고 계산함으로써 얻을 수 있다. 계수 c 는 식 (2)를 미분한 식에 식 (5)를 대입하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$c = -vM\phi_j - 0.5\phi_j^T M' \phi_j \quad (6)$$

이 방법은 알고리즘은 다소 복잡하지만 계산시간은 지금까지 개발된 방법중에서 가장 우수한 방법이다.⁽¹³⁾ 그러나 중복근을 갖는 경우에 ϕ_j' 을 구할 수 없다. Ojalvo, Mills-Curren 그리고 Dailey 등이 Nelson의 방법을 확장하여 중복근을 갖는 경우에 해법을 개발하였지만, 알고리즘이 대단히 복잡할 뿐만 아니라 계산량도 많다.

2.3 Rudisill & Chu 방법

이 방법은 제약 조건을 첨가하여 비대칭 선형 대수 방정식을 푸는 방법이다. 식 (1)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$(K - \lambda_j M)\phi_j = 0 \quad (7)$$

식 (7)을 미분하여 정리하면,

$$(K - \lambda_j M)\phi_j' - \lambda_j' M \phi_j = -(K' - \lambda_j M')\phi_j \quad (8)$$

고유 벡터를 길이로 정규화한 다음 미분하면 다음과 같다.

$$\phi_j^T \phi_j' = 1 \quad (9)$$

$$\phi_j^T \phi_j'' = 0 \quad (10)$$

식 (8)과 식 (10)을 행렬 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \phi_j^T & 0 \\ K - \lambda_j M & -M\phi_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_j' \\ \lambda_j' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(K' - \lambda_j M') \end{Bmatrix} \phi_j \quad (11)$$

식 (11)에서 계수 행렬을 Choleski의 행렬 분해법 등을 이용하여 ϕ_j' 과 λ_j' 을 구할 수 있다. 이 방법은 알고리즘이 대단히 간단하지만, 계수 행렬이 비대칭이기 때문에 계산시간이 많이 걸린다. 또한 수치적 안정성에 대한 증명이 없을 뿐만 아니라 중복근이 있는 경우에 사용할 수 없는 단점이 있다.

2.4 Dailey 방법

고유치 문제의 고유 진동수가 m 개 중복되었다고 하면, 설계 변수가 변함에 따라 중복되었던 m 개의 고유 진동수가 서로 다른 값을 갖게 된다. 이 경우 m 개의 서로 다른 고유 진동수에 대해서 유일한 고유 벡터를 구할 수 있다. 그러나 고유 벡터의 미분이 존재하기 위해서는 설계 변수가 변하기 전에 고유치가 중복근을 갖는 공간에서 설계 변수가 변할 때 나타나는 고유 벡터에 가장 근접한 고유 벡터 집합을 먼저 구해야 한다. 이러한 근접한 고유 벡터 집합을 구하기 위해서 다음과 같은 고유치 문제를 고려한다.

$$K\Psi = M\Psi\Lambda \quad (12)$$

여기서 $\Lambda = \lambda I$, $\Psi^T M \Psi = I$, 그리고 λ 는 Ψ 에 의해 점유되는 고유공간(eigenspace)의 고유치이다. 즉, λ 는 m 개의 중복근을 갖는다. 또한 Ψ 는 $(n \times m)$ 행렬이고, Λ 는 $(m \times m)$ 행렬이다. 근접한 고유 벡터들은 단위 직교 변환(orthonormal transformation)에 의해 Ψ 의 항으로 표시된다.

$$Z = \Psi\Gamma \quad (13)$$

여기서, Γ 는 $(m \times m)$ 단위 직교 변환 행렬이다.

$$Z^T M Z = \Gamma^T \Psi^T M \Psi \Gamma = \Gamma^T \Gamma = I \quad (14)$$

고유벡터 미분을 구하기 위하여 먼저 Γ 를 계산해야 한다. 설계 변수가 변함에 따라 서로 다른 m 개의 값을 갖게 되기 때문에, $\Lambda' = \partial \Lambda / \partial p = \text{diag}(\lambda_1', \dots, \lambda_m')$ 로 쓸 수 있다. 우선 Γ 를 구하기 위하여 다음과 같이 근접한 고유 벡터 Z 로 구성된 고유치 문제를 고려하면,

$$KZ = MZA \quad (15)$$

식 (16)을 미분하고 정리하면 다음과 같다.

$$(K - \lambda M)Z' = -(K' - \lambda M')Z + MZA' \quad (16)$$

식 (16)의 양변에 Ψ^T 를 곱하고, $Z = \Psi\Gamma$ 를 대입하면,

$$[\Psi^T(K' - \lambda M')\Psi]\Gamma \equiv D\Gamma = \Gamma\Lambda' \quad (17)$$

고유치 문제 식 (17)을 풀면 Γ 와 중복된 고유치의 미분값들인 Λ' 를 구할 수 있다. 그러므로 식 (13)을 이용하여 근접한 고유 벡터들로 이루어진 행렬 Z 를 구할 수 있다. Z' 을 구하기 위하여 식 (16)에서 $F \equiv (\lambda M' - K')Z + MZA'$ 으로 정의하면,

$$(K - \lambda M)Z' = F \quad (18)$$

$[K - \lambda M]$ 가 특이행렬이기 때문에 식 (18)을 직접적으로 푸는 것은 어렵다. 행렬 $[K - \lambda M]$ 의 랭크(rank)는 $(n - m)$ 이고, 중복근을 갖는 고유벡터들이 시스템의 빈공간(null space)가 된다. 그래서 V 가 $(K - \lambda M)V = F$ 의 해이면 $V + ZC$ 도 해가 된다. 여기서 C 는 $(m \times m)$ 행렬이다. 특이해 V 를 구하기 위한 과정은 표 1에 정리하였다.

행렬 C 의 대각요소는 $Z^T M Z = I$ 를 미분한 식에 $V + ZC$ 를 대입함으로써 얻을 수 있다. 결과식은 다음과

같다.

$$C + C^T = -V^T M Z - Z^T M V - Z^T M' Z \equiv Q \quad (19)$$

즉,

$$c_{ij} = 0.5 q_{ij} \quad (20)$$

행렬 C 의 비대각요소는 고유치 문제 $KZ = MZA$ 를 두번 미분함으로써 구할 수 있다. 식 (12)를 한번 미분하면,

$$K'Z + KZ'M'ZA - MZ'A - MZA' = 0 \quad (21)$$

식 (21)을 다시 한번 미분하고 정리하면,

$$(K'' - \lambda M'')Z + 2(K' - \lambda M')Z' + (K - \lambda M)Z'' - 2M'ZA' - 2MZ'A' - MZA'' = 0 \quad (22)$$

양변의 앞에 Z^T 를 곱하고 $Z' = V + ZC$ 를 대입하면:

$$\begin{aligned} Z^T(K'' - \lambda M'')Z + 2Z^T(K' - \lambda M')V \\ + 2Z^T(K' - \lambda M')ZC - 2Z^T M'ZA' \\ - 2Z^T MVA' - 2Z^T MZCA' - \Lambda'' = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

다음의 관계식, 즉 $Z^T M Z = I$ 과 $Z^T(K' - \lambda M')Z = Z^T[MZA' - Z^T(K - \lambda M)Z'] = \Lambda'$ 을 이용하면 다음과 같은 최종식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} CA' - A'C + 0.5\Lambda'' = Z^T(K' - \lambda M')V \\ - Z^T(M'Z + MV)A' + 0.5Z^T(K'' - \lambda M'')Z \equiv R \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 Λ'' 는 대각행렬이고, $CA' - A'C$ 는 대각 요소가 0이기 때문에 식 (24)만으로 C 와 Λ'' 를 구할 수 있다.

$C = [c_{ij}]$, $R = [r_{ij}]$, $\Lambda' = \partial \Lambda / \partial p = \text{diag}(\lambda_1', \dots, \lambda_m')$ 그리고 $\Lambda'' = \text{diag}(\lambda_1'', \dots, \lambda_m'')$ 라고 하면,

$$r_{ij} = \begin{cases} c_{ij}(\lambda_j' - \lambda_i'), & \text{if } j \neq i \\ 0.5\lambda_i'', & \text{if } j = i \end{cases} \quad (25)$$

Table 1. Procedure to find the particular solution V

<ol style="list-style-type: none"> (1) Let $Z = [z_{ij}]$ (2) Find k such that $z_{1,k}$ is the largest element on the first column of Z. (3) Replace the kth row and column of G with zeros, except placing 1 on the kth diagonal element. (4) Replace the kth row of F with zeros. (5) Go back to step 2 and repeat for the next column of Z until through. If k has been used before, choose the second largest (third largest, etc.) element in the column instead. (6) Call the resulting matrices \bar{G} and \bar{F}. (7) Solve $\bar{G}V = \bar{F}$.

그러므로, $\lambda_j' \neq \lambda_i'$ 이거나 $c_{ij}=0.5 q_{ij}$ 이면 $c_{ij}=r_{ij}/(\lambda_j'-\lambda_i')$ 가 된다. 모우드 미분값이 증근을 갖으면, 즉 $\lambda_j'=\lambda_i'$ ($j \neq i$)이면 설계변수가 변해도 원래의 m -차원 고유공간이 m 개의 서로 다른 고유공간을 분리되지 않는다. 이 경우 $Z'=V+ZC$ 의 각각의 열은 행렬 C 가 $c_{ij}+c_{ji}=q_{ij}=q_{ji}$ 인 관계를 만족하는 한 유효한 모우드의 미분이 될 수 있다.^(6,7) 즉, 모우드의 미분이 여러개 존재한다.

3. 제안방법

3.1 서로 다른 고유치를 갖는 경우

제안 방법은 식 (2)의 정규화 조건을 미분한 식을 제약 조건으로 하여 대칭인 계수 행렬을 만들고, 수치적 안정성을 확보하여 고유 벡터의 미분을 구하는 방법이다. 식 (8)을 다시 써 보면 다음과 같다.

$$(K-\lambda_j M)\phi_j' - \lambda_j' M \phi_j = -(K' - \lambda_j' M') \phi_j \quad (26)$$

식 (25)와 같이 정규화한 식을 미분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\phi_j^T M \phi_j' + 0.5 \phi_j^T M' \phi_j = 0 \quad (27)$$

식 (26)과 식 (27)을 합해서 계수 행렬이 대칭인 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K-\lambda_j M & -M \phi_j \\ -\phi_j^T M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_j' \\ \lambda_j' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(K' - \lambda_j' M') \phi_j \\ -0.5 \phi_j^T M \phi_j \end{Bmatrix} \quad (28)$$

식 (28)에서 계수 행렬을 LDL^T 로 행렬 분해해서 ϕ_j' 와 λ_j' 을 간단히 구할 수 있다. 계수 행렬이 대칭인 것은 대단히 중요하다. 계수 행렬을 밴드(band)형태나 스카이라인(sky-line) 형태로 저장할 수 있기 때문에 컴퓨터 메모리나 계산 시간이 절약된다. 이 방법은 Rudisill과 Chu의 장점을 유지하면서 단점을 모두 보완하였다. 제안 방법의 수치적 안정성은 3.3절에서 증명하였다.

3.2 중복된 고유치를 갖는 경우

Dailey 방법과 같은 방법으로 근접한 고유 벡터를 구했다고 하고 Z 로 구성된 고유치 문제, 식 (15)을 다시 고려하면,

$$KZ = MZA \quad (15)$$

식 (15)를 미분하고 정리하면 다음과 같다.

$$(K - \lambda M)Z' + MZA' = -(K' - \lambda M')Z \quad (29)$$

$Z^T M Z = I$ 를 설계 변수에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$Z^T M Z' + 0.5 Z^T M' Z = 0 \quad (30)$$

식 (29)와 식 (30)을 행렬 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K-\lambda M & -MZ \\ -Z^T M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z' \\ A' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(K' - \lambda M')Z \\ -0.5 Z^T M' Z \end{Bmatrix} \quad (31)$$

제안 방법은 식 (31)에서 직접 해를 구함으로써 간단히 모우드의 미분값을 구할 수 있다. 여기서 식 (31)의 계수 행렬의 차수는 $(n+m) \times (n+m)$ 이다. 이 행렬은 대칭 행렬이므로 고유치가 서로 다른 경우와 같은 장점이 있다.

3.3 제안 방법의 수치적 안정성

고유치가 중복근을 갖는 일반적인 경우에 대하여 제안 방법의 수치적 안정성을 증명하자. 수치적 안정성은 제안 방법의 최종 결과식에서 계수 행렬의 정칙성(nonsingularity)을 증명하면 된다. 증명의 간단화를 위하여 처음 m 개의 고유값이 중복되었다고 가정하고, 다음과 같은 행렬 K^* 를 정의하자.

$$K^* = \begin{bmatrix} K - \lambda M & -MZ \\ -Z^T M & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

여기서 Z 는 근접한 고유벡터들로 이루어진 $(n \times m)$ 행렬이다. 행렬 K^* 가 정칙 행렬임을 증명하기 위하여 다음과 같은 고유치 문제를 도입한다.

$$K^*U = M^*UD \quad (33)$$

여기서,

$$M^* = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{n+m}] \quad (35)$$

$$D = \text{diag}(\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_{n+m}) \quad (36)$$

I_m 은 m 차의 단위 행렬이고, U 와 D 는 각각 $(n+m) \times (n+m)$ 행렬이다. 식 (33)의 고유치 문제의 $(n+m)$ 개의 고유 벡터와 고유치는 다음과 같다.

고유벡터,

$$u: \begin{cases} \begin{Bmatrix} z_i \\ e_i \end{Bmatrix}, & i=1,2,\dots,m \\ \begin{Bmatrix} z_k \\ -e_k \end{Bmatrix}, & k=m+1,m+2,\dots,n \end{cases} \quad (37)$$

고유치,

$$\gamma: \begin{cases} -1, \dots, -1 \text{ (} m \text{개)} \\ 1, \dots, 1 \text{ (} m \text{개)} \\ \lambda_k - \lambda \text{ (} n-m \text{개)} \end{cases} \quad (38)$$

($k=m+1, m+2, \dots, n$)

여기서 $e_i = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]$ 와 같이 i 번째 만이 1인 벡터이다. λ 는 중복된 고유치이다.

식 (33)의 determinant 관계를 고려하면,

$$\det[K^*] = \det[M^*] \det[D] \quad (39)$$

$$= (-1)^m \det[M] \prod_{k=m+1}^n (\lambda_k - \lambda)$$

식 (39)에서 $\det[M]$ 은 정의에 의해 0(zero)이 아니므로 $\det[K^*] \neq 0$ 이다. 이상에서 제안 방법의 수치적 안정성이 증명되었다.

4. 수치해석

제안 방법의 효율성을 증명하기 위하여 서로 다른 고유치를 갖는 경우인 평판과, 중복된 고유치를 갖는 경우인 외팔보를 예제로 하여 해석하였다. 해석에 사용한 컴퓨터는 계산 속도가 10 Mips이고, 0.9 MF-lops인 IRIS4D20-S17이다.

4.1 평판

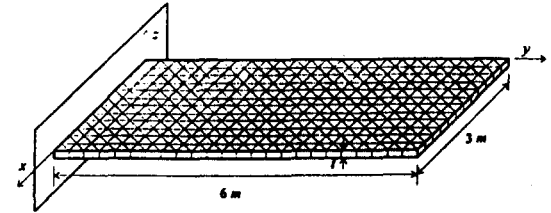
서로 다른 고유치를 갖는 시스템의 예로 그림 1의 평판 구조물을 고려하자. 이 구조물은 576개의 삼각형 요소로 모델링하였다. 각 절점은 3자유도(z -변위, x -각변위, y -각변위)이기 때문에 한 요소는 9 자유도이다. 전체 자유도는 936이다.

탄성계수는 $10.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 이고, 밀도는 $5.88 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ 이다. Poisson비는 0.3이다. 설계 변수는 평판의 두께 t 이다. 고유진동수 10개를 표 2에 표시

하였다. 강성 행렬과 질량 행렬의 각각 t^3 과 t 에 비례한다. 그래서 이 경우 강성 행렬과 질량 행렬의 미분은 t 에 대하여 미분함으로써 구할 수 있다.

제안 방법으로 구한 첫번째 고유벡터의 미분값을 표 3에 나타내었다.

이 예제의 경우 해석 시간은 지금까지 방법중에서 가장 효율적인 방법중의 하나인 Nelson 방법과 비교하였다. 10개의 고유쌍 미분을 구하는데 걸린 시간은 Nelson 방법의 경우 47.3 sec이고, 제안 방법은 46.8 sec이다. Nelson 방법은 n 차의 선형 대수 방정식과 상수 c 를 계산하고, 제안 방법은 $(n+1)$ 차의 선형 대수 방정식을 계산하기 때문에 계산 시간은 비슷하다. 이 결과를 그림 2에 표시하였다. Rudisill과 Chu의 방법은 비대칭 계수 행렬을 풀기 때문에 계



Number of nodes	: 325
Number of elements	: 576
Number of degrees of freedom	: 936
Young's modulus	: $E = 10.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$
Mass density	: $\rho = 5.88 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$

Fig. 1. Cantilever plate with the thickness t as the design parameter.

Table 2. The lowest 10 natural frequencies of the cantilever plate

Natural frequency (No.)	Natural frequency (Hz)	Eigenvalue
1	0.926	0.3387E+02
2	3.964	0.6202E+03
3	5.760	0.1310E+04
4	12.90	0.6567E+04
5	16.13	0.1068E+05
6	24.54	0.2377E+05
7	24.76	0.2420E+05
8	31.60	0.3943E+05
9	33.57	0.4450E+05
10	40.74	0.6552E+06

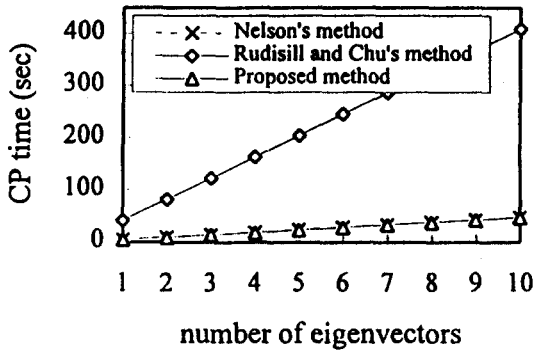
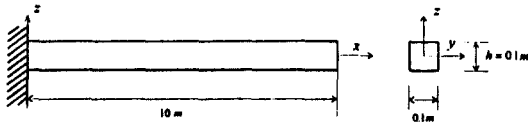


Fig. 2. Computational time according to the number of mode shape derivatives to be calculated in case of the cantilever plate.



Number of nodes : 201
 Number of elements : 200
 Number of degrees of freedom : 800
 Young's modulus : $E = 2.10 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
 Mass density : $\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

Fig. 3. Cantilever beam with the height h as the design parameter.

산 시간이 상당히 많이 걸린다.

4.2 외팔보

중복된 고유치를 갖는 시스템의 예로 그림 3의 외팔보를 고려하자. 이 구조물은 200개의 요소로 모델링하였다. 각 절점은 4자유도(y -변위, z -변위, y -각변위, z -각변위)이기 때문에 한 요소는 8 자유도이다. 전체 자유도는 800이고, 고유치 문제의 차수는 (800×800) 이다. 탄성계수는 $2.10 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 이고, 밀도는 $7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 이다. Poisson비는 0.3이고, 보의 폭과 높이는 모두 0.1 m이다. 설계 변수는 보의 높이 h 이다. 고유진동수 10개를 표 4에 표시하였다. 이 외팔보는 첫번째와 두번째, 세번째와 네번째의 순으로 중복된 고유치를 갖는다. 제안방법으로 구한 첫번째와 두번째 고유벡터의 미분값을 표 5에 나타내었다. 이 예제의 경우 해석 시간은 Dailey 방

Table 3. Exact solution of the 1st eigenvector derivative computed by the proposed method

Node number	1st eigenvector derivative
1	-0.804E+01
2	-0.735E+02
3	0.265E+02
4	-0.121E+02
5	-0.932E+02
.	.
.	.
68	-0.108E+04
69	-0.141E+02
70	-0.464E+04
71	-0.108E+04
72	-0.149E+02

Table 4. The lowest 10 natural frequencies of the cantilever beam

Natural frequency (No.)	Natural frequency (Hz)	Eigenvalue
1	4.172	0.6872E+03
2	4.172	0.6872E+03
3	20.07	0.2683E+05
4	20.07	0.2683E+05
5	72.67	0.2085E+06
6	72.67	0.2085E+06
7	141.5	0.7899E+06
8	141.5	0.7899E+06
9	231.8	0.2122E+07
10	231.8	0.2122E+07

Fig. 5. Exact solutions of the 1st and 2nd eigenvector derivatives computed by the proposed method

Node number	1st eigenvector derivative	2nd eigenvector derivative
1	-0.623E-07	0.126E-14
2	-0.683E-14	0.626E-06
3	0.273E-12	-0.250E-04
4	-0.250E-04	0.504E-13
5	-0.250E-05	0.504E-14
.	.	.
.	.	.
68	-0.196E-02	0.353E-10
69	-0.143E-01	0.235E-09
70	0.226E-09	0.143E-01
71	-0.312E-10	-0.197E-02
72	-0.196E-02	0.353E-10

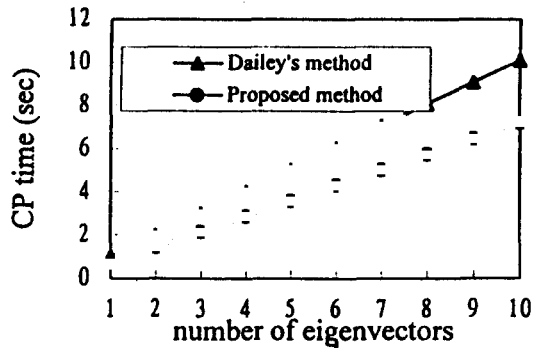


Fig. 4. Computational time according to the number of mode shape derivatives to be calculated in case of the cantilever beam.

법과 비교하였다. 10개의 고유상 미분을 구하는데 걸린 시간은 Dailey 방법의 경우 10.1 sec이고, 제안 방법은 7.2 sec이다. 약 30%의 계산 시간이 절약된다. Dailey 방법에서 n 차의 선형 대수 방정식과 상수 행렬 C 를 계산하는데, 상수 행렬을 구하기가 복잡하기 때문에 제안 방법에 비해서 계산 시간이 다소 많이 걸린다. 제안 방법은 $(n+2)$ 차의 선형 대수 방정식을 계산한다. 이 결과를 그림 4에 표시하였다.

5. 결 론

본 논문에서 모우드의 미분을 구하기 위해 수치적으로 안정한 수치 해석 기법을 개발하였다. 제안 방법은 최종 결론식의 계수 행렬이 대칭이기 때문에 기존의 상용 코드에 무리없이 적용할 수 있고, band 형태나 skyline 형태로 저장할 수 있기 때문에 컴퓨터 메모리나 계산 시간이 절약된다. 또한 알고리즘이 대단히 간단하고, 정확한 해를 구할 수 있으며, 고유치가 중복근을 갖을 때에도 강성행렬과 질량행렬의 2차 미분값이 필요없이 쉽게 모우드의 미분을 구할 수 있다.

참고문헌

1. Rudisill, C.S. and Chu, Y., "Numerical

Methods for Evaluating the Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors," *AIAA Journal*, Vol. 13, 1974.

2. Rudisill, C.S., "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors of a General Matrix," *AIAA Journal*, Vol. 12, 1974.
3. Nelson, R.B., "Simplified Calculations of Eigenvector Derivatives," *AIAA Journal*, Vol. 14, 1976.
4. Ojalvo, I.U., "Efficient Computation of Mode-Shape Derivatives for Large Dynamic Systems," *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 10, 1986.
5. Ojalvo, I.U., "Efficient Computation of Modal Sensitivities for Systems with Repeated Frequencies," *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 3, 1988.
6. Mills-Curran, W.C., "Calculation of Derivatives for Structures with Repeated Eigenvalues," *AIAA Journal*, Vol. 26, 1988.
7. Dailey, R.L., "Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues," *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 4, 1989.
8. Fox, R.L. and Kapoor, M.P., "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors," *AIAA Journal*, Vol. 6, 1968.
9. Haftka, R.T. and Adelman, H.M., "Recent Developments in Structural Sensitivity Analysis," *Structural Optimization*, Vol. 1, 1989.
10. Lim, K.B., Junkins, J.L. and Wang, B.P., "Reexamination of Eigenvector Derivatives," *Journal of Guidance*, Vol. 10, No. 6, 1987.
11. Zhong, W. and Cheng, G., "Second-order Sensitivity Analysis of Multimodal Eigenvalues and Related Optimization Techniques," *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 14, 1986.
12. Bernard, M.L. and Bronowicki, A.J., "Modal Expansion Method for Eigensensitivity with Repeated Roots," *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 7, 1994.
13. Sutter, T.R., Camarda, C.J., Walsh, J.L. and Adelman, H.M., "Comparison of Several Methods for Calculating Vibration Mode Shape Derivatives," *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 12, 1988.

(接受: 1995. 8. 4)