

섹터해석법을 이용한 환형반복구조물의 자유진동해석 프로그램

Free Vibration Analysis Program Using Sector Method for the Rotationally Periodic Structures

김 동 옥¹⁾ · 이 종 현²⁾ · 이 인 원³⁾
By *KIM, D. O. LEE, J. H. and LEE, I. W.*

ABSTRACT : Free vibration analysis program for rotationally periodic structures is coded. Many kind of structures have the form of rotationally periodic structure such as cooling tower of the nuclear power plant, large chimney, oil tank, natural gas tank and tire. The rotationally periodic structures can be divided into several substructures with the same form called the sector. Using this property, one can obtain natural frequencies and the corresponding mode shapes of the entire structure with information of only one sector as shown in Ref. [1,2]. It is programmed, called as sector method in this paper, and is added to ADINA the commercial FEM package. One can efficiently calculate the dynamic characteristics of the rotationally periodic structure by using the modified program. The program can quickly give the accurate results with very small memory space of a computer. As an example to demonstrate the efficiency of the program, cooling tower of the nuclear power plant is considered.

1. 서 론

구조물의 동특성은 구조물의 동적 안정성을 평가하는 기준을 제공한다. 그러므로 구조물의 동특성 파악은 새로운 구조물의 설계과정에서 매우 중요한 과정이며 이미 운용중에 있는 구조물의 안전성 평가에도 필수적인 과정이라 할 수 있다. 고유진동수와 진동모우드로 대표되는 구조물의 동특

성은 일반적으로 실험적인 방법이나 유한요소법과 같은 수치해석법을 이용하여 구할 수 있다. 실제적인 많은 경우에 있어 구조물의 동특성 실험은 많은 비용과 시간을 필요로하므로 수치해석법을 이용하는 것이 일반적이다. 그러나 수치해석 역시 대형이고 복잡한 구조물의 해석에는 그 나름대로의 문제점을 갖고 있다. 즉 수치해석법을 이용한 대형 복잡구조물의 해석에는 많은 컴퓨터 기억용량과 긴 계산시간이 요구된다. 이러한 이유로 많은 공학자들은 빠르고 정확한 해석법에 큰 관심을 두고 있다. 본 연구에서 추천하는 섹터해석법은

1) 한국과학기술원 기계공학과 박사과정
2) 경북산업대학교 토목공학과 교수
3) 한국과학기술원 토목공학과 교수

환형반복구조물의 동특성해석을 위한 것으로 기본 아이디어는 환형반복구조물의 기하학적 특성을 이용하면 구조물의 한 부분인 섹터의 정보를 이용하여 전체구조물의 고유진동수와 진동모우드를 구할 수 있다는 것이다. 섹터해석법은 전체구조물의 특성이 고려된 매우 낮은 차수의 지배방정식을 이용하므로 적은 기억용량을 사용하여 빠르고 정확하게 전체구조물의 동특성을 구해 준다. 1979년에 D. L. Thomas^[1,2]는 환형반복구조물에서 정상파로 표현되는 고유진동모우드와 고유진동수를 환형이기 때문에 생기는 기하학적 특성을 이용하여 구하였다. 본 연구에서 작성한 프로그램은 그의 연구결과에 기초하고 있다. 1994년에 I. Y. Shen^[3]은 환형반복구조물의 이러한 해석법을 전달함수의 개념을 이용하여 주파수영역에서도 유도할 수 있음을 보였다.

본 논문의 전반부에서는 환형반복구조물의 고유진동수와 진동모우드를 효율적으로 계산할 수 있는 섹터해석법에 관하여 설명하고 있으며 후반부에서는 이를 이용하여 작성한 환형반복구조물 해석프로그램을 설명하였다. 예제로는 대형 환형반복구조물인 원자력발전소 냉각탑의 동특성을 해석하였다.

2. 환형반복구조물의 자유진동해석

2.1 환형반복구조물

단일한 형태의 부구조물이 반복적으로 연결되어 전체 구조물의 형태가 환형을 이룬다면 이를 환형반복구조물이라 한다. 환형반복구조물내의 모든 물리량들은 다음 식과 같은 특징을 갖고 있다.

$$\phi(r, \theta, z) = \phi(r, \theta + 2\pi, z) \quad (1)$$

여기서 ϕ 는 구조물의 상태를 기술하는 데 사용되는 물리량을 뜻한다. 즉 변형량 혹은 속도, 가속도, 힘, 모우멘트 등 구조물의 상태를 표시하는 어떠한 값도 될 수 있다. 이러한 특성을 이용하면 환

형반복구조물의 거동을 기술하는 매우 낮은 차수의 지배방정식을 구성할 수 있다. 이러한 방법을 본 연구에는 섹터해석법이라 한다.

2.2 섹터해석법^[1,2,3,4]

Fig. 1는 섹터해석법을 효과적으로 적용할 수 있는 N개의 섹터로 이루어진 일반적인 환형반복구조물의 형상이다.

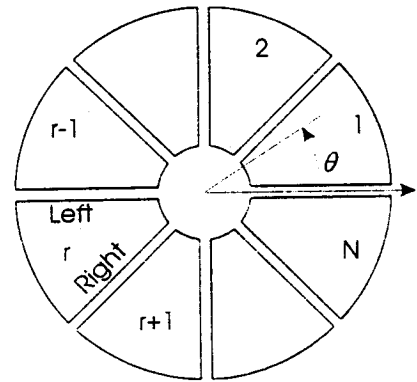


Fig. 1 Rotational periodic structure

식(2)는 구조물 전체에 대한 지배방정식이다. 여기서 K과 M는 구조물의 강성행렬과 질량행렬이며 U는 각 절점에서의 변위를 나타내는 변위벡터이다. 각 섹터의 변위 벡터는 l개의 좌측경계자유도와 l개의 우측경계 자유도 그리고 p개의 내부 자유도로 구성된다. 즉 전체지배방정식의 차수는 $N(l+p)$ 가 된다.

$$[K - \omega^2 M]\{U\} = \{0\} \quad (2)$$

섹터해석법은 섹터 하나를 이용한 모델에서 시작된다. r번째 섹터의 운동방정식을 구성하면 식(3)과 같으며 총 자유도수는 $(2l+p)$ 이다. 식(2)와 비교하여 방정식의 차수가 매우 낮음을 알 수 있다.

$$[K^{(r)} - \omega^2 M^{(r)}]\{u\}^{(r)} = \{f\}^{(r)} \quad (3)$$

여기서 상첨자 r은 r번째 섹터를 벡터 $\{f\}^{(r)}$ 는 이웃

한 섹터의 진동에 의해 발생하는 등가 외력벡터로 확정할 수 없는 미지의 값이다. 이러한 미지의 값과 불필요한 자유도는 환형반복구조물의 특성을 이용하면 소거할 수 있다. 환형반복구조물내에서 어떤 물리량이 양의 θ 방향으로 전파된다면 이는 식(4)로 기술된다.

$$\phi = \bar{\phi} e^{i(\omega t - k\theta)} \quad (4)$$

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}(r, z) \quad (5)$$

여기서 ω 는 파동의 진동수이며 k 는 전파상수이다. 만약 k 가 실수이면 파동은 감쇠 없이 전파되어 정상파를 이루게 된다. 식(4)를 이용하면 두 이웃한 섹터간의 변위에 대한 관계를 유도할 수 있다.

$$\{u\}^{(r)} = \{\bar{u}\} e^{i(\omega t - k\theta)} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \{u\}^{(r+1)} &= \{\bar{u}\} e^{i(\omega t - k\theta - k\theta_s)} \\ &= \{u\}^{(r)} e^{-i\mu} \end{aligned} \quad (7)$$

위식에서 $\mu = k\theta_s$ 이며 θ_s 는 한 섹터가 이루는 각을 의미한다. 아래 식은 외력벡터와 변위벡터를 분할하여 표현한 것이다.

$$\{u\}^{(r)} = \begin{Bmatrix} u_L \\ u_I \\ u_R \end{Bmatrix}^{(r)} \quad (8)$$

$$\{f\}^{(r)} = \begin{Bmatrix} f_L \\ f_I \\ f_R \end{Bmatrix}^{(r)} \quad (9)$$

여기서 하첨자 L, R, I는 각각 섹터의 좌측과 우측 그리고 내부자유도를 뜻한다. 여기에 식(7)의 관계를 이용하면 식(10)과 같은 변위벡터간의 관계를 유도할 수 있다.

$$\{u_L\}^{(r)} = \{u_R\}^{(r+1)} = \{u_R\}^{(r)} e^{-i\mu} \quad (10)$$

또한 외력벡터에 대해서는 다음의 관계가 성립한다.

$$\{f_I\}^{(r)} = \{0\} \quad (11)$$

$$\{f_L\}^{(r)} + \{f_R\}^{(r+1)} = \{0\} \quad (12)$$

$$\{f_L\}^{(r)} = -\{f_R\}^{(r+1)} = -\{f_R\}^{(r)} e^{-i\mu} \quad (13)$$

식(10)과 식(13)을 이용하면 식(15)와 식(17)로 표현되는 변환행렬들을 구성할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u_L \\ u_I \\ u_R \end{Bmatrix}^{(r)} = [T_1] \begin{Bmatrix} u_L \\ u_I \\ u_R \end{Bmatrix}^{(r)} \quad (14)$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} I_L & 0 \\ 0 & I_I \\ e^{i\mu} I_L & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} f_L \\ f_I \\ f_R \end{Bmatrix}^{(r)} = [T_2] \begin{Bmatrix} f_L \\ f_I \\ f_R \end{Bmatrix}^{(r)} \quad (16)$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} I_L & 0 \\ 0 & I_I \\ -e^{i\mu} I_L & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

이러한 변환행렬을 이용하면 앞서 구한 섹터의 운동방정식에서 불필요한 자유도를 제거할 수 있다. 식(14)와 식(16)을 식(5)에 대입하고 양변의 앞에 첫번째 변환행렬의 허미시안행렬을 곱하여 차수가 인 식(18)을 구한다.

$$[K^{(r)}(\mu) - \omega^2 M^{(r)}(\mu)] \{q\}^{(r)} = \{F\}^{(r)} \quad (18)$$

여기서 $K^{(r)}(\mu)$ 와 $M^{(r)}(\mu)$ 는 각각 축약된 시스템의 강성 및 질량행렬이다.

$$[K^{(r)}(\mu)] = [T_1]^H [K^{(r)}] [T_1] \quad (19)$$

$$[M^{(r)}(\mu)] = [T_1]^H [M^{(r)}] [T_1] \quad (20)$$

$$\{F\}^{(r)} = [T_1]^H [T_2] \begin{Bmatrix} f_L \\ f_I \\ 0 \end{Bmatrix}^{(r)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_L \\ f_I \\ 0 \end{Bmatrix}^{(r)} = \{0\} \quad (21)$$

$$\{q\}^{(r)} = \begin{Bmatrix} u_L \\ u_r \end{Bmatrix}^{(r)} \quad (22)$$

수식의 간략한 표현을 위해 상평자 r를 생략하고 실수부와 허수부를 나타내는 R과 I를 도입하여 다시 쓰면 아래와 같다. 여기서 i는 허수를 뜻한다.

$$[K(\mu)] = [K^R] + i[K^I] \quad (23)$$

$$[M(\mu)] = [M^R] + i[M^I] \quad (24)$$

$$\{q\} = \{q^R\} + i\{q^I\} \quad (25)$$

식(18)의 실수부와 허수부를 재정렬하여 식 (26)과 같은 실수대칭행렬로 이루어진 $2(l+p)$ 의 차수를 갖는 고유치문제를 구성한다. 여기서 각 행렬들은 μ 의 함수이다.

$$[K_S(\mu) - \omega^2 M_S(\mu)]\{Q_S\} = \{0\} \quad (26)$$

$$[K_S(\mu)] = \begin{bmatrix} K^R & -K^I \\ K^I & K^R \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$[M_S(\mu)] = \begin{bmatrix} M^R & -M^I \\ M^I & M^R \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\{Q_S\} = \begin{Bmatrix} q^R \\ q^I \end{Bmatrix} \quad (29)$$

다음으로 해야 할 과정은 μ 를 결정하는 것이다. 이는 환형반복구조물의 기하학적 특징을 이용하여 구한다.

$$\begin{aligned} \{u_L\}^{(N)} &= \{u_R\}^{(N)} e^{-i\mu} = \{u_L\}^{(N-1)} e^{-i\mu} \\ &= \{u_R\}^{(N-1)} e^{-2i\mu} = \{u_L\}^{(N-2)} e^{-2i\mu} \\ &\vdots \\ &= \{u_R\}^{(1)} e^{-Ni\mu} = \{u_L\}^{(N)} \end{aligned} \quad (30)$$

식(30)으로부터 아래의 결과가 구해진다.

$$e^{-Ni\mu} = 1 \quad (31)$$

$$\mu = \frac{2m\pi}{N} \quad (32)$$

μ 를 결정하는데 필요한 정수 m은 특정한 범위 안에서 결정된다. 만약 어떤 두개의 μ 가 그 크기는 같고 부호가 서로 다르다면 이는 모두 같은 모우드를 생성하므로 m의 범위는 먼저 양의 정수로 한정지을 수 있다. 또한 특정한 두개의 μ 에 의해 구해진 두 $e^{i\mu}$ 의 실수부와 허수부가 서로 각각 π 만큼의 차이를 갖는다면 이 역시 같은 모우드를 생성하므로 이중 하나는 생략하여도 무관하다. 이러한 결과를 종합하면 m의 범위를 결정할 수 있다.

If N is even number : $m = 0, 1, 2, \dots, N/2$

If N is odd number : $m = 0, 1, 2, \dots, (N-1)/2$

벡터해석법으로 구한 결과의 특징은 모든 진동수가 중근의 형태를 하고 있다는 것이다. 환형반복구조물의 고유진동수는 대개 소수의 단일근과 다수의 중근을 포함한다. 그러므로 벡터해석법의 결과들중에서 실질적인 중근과 단일근을 구분하는 작업은 필수적이다. 이러한 작업은 m 값을 이용하면 가능하다. 즉 0과 $N/2$ 은 파동이 전파되지 않는 경우를 의미하므로 이를 이용하여 구한 근은 단일근이며 그 이외의 값은 중근을 구하는 데 사용되는 값이다.

다음은 전체모델의 모우드형을 계산하는 과정을 요약한 것이다.

$$\{U\} = [\{\{q\}^{(1)}\}^T, \{\{q\}^{(2)}\}^T, \dots, \{\{q\}^{(N)}\}^T]^T \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \{q\}^{(2)} &= \{q\}^{(1)} e^{-i\mu} \\ \{q\}^{(3)} &= \{q\}^{(1)} e^{-2i\mu} \\ &\vdots \\ \{q\}^{(N)} &= \{q\}^{(1)} e^{-(N-1)i\mu} \end{aligned} \quad (34)$$

행렬 [U]는 각 섹터의 변위벡터들의 집합으로 실수부는 모우드형을 허수부는 위상을 의미한다. 이러한 섹터의 변위 벡터는 식(34)를 이용하여 구하게 된다.

3. 프로그램

본 연구에서는 벡터해석법을 기초로하여 프로

그램을 작성하고 이를 상용프로그램인 ADINA와 접목시킴으로써 그 사용을 편리하게 하였다. 즉 각종 자료의 입력과정과 시스템의 강성 및 질량행렬의 구성은 ADINA의 기능을 이용하도록 하였으며 섹터해석법의 기타 계산과정들은 본 연구에서 작성한 서브루틴을 이용하도록 하였다. 수정된 ADINA의 해석기능 선택옵션에 섹터해석법에 관한 항목을 선택할 수 있도록 하여 전체적인 해석이 일괄적으로 진행되도록 하였다. ADINA에 추가된 서브루틴에서는 dynamic memory를 사용하며 각 시스템행렬들은 blocked skyline 형태로 저장되므로 기존 ADINA의 대형구조물 해석기능을 유지하고 있다. 본 연구에서 작성한 서브루틴의 흐름도를 간략히 기술하면 다음과 같다.

- (1) Construct system matrices of r-th sector; $K^{(r)}, M^{(r)}$.
- (2) Determine μ
- (3) Construct transformation matrices $[T_1], [T_2]$.
- (4) Construct and solve the eigenvalue problem, Eq. (26).
- (5) Generate the mode shapes of full model.
- (6) Repeat step(2)~step(5)

4. 예 제

본 연구에서 작성한 프로그램을 이용하여 원자력 발전소 냉각탑의 고유진동수와 진동모우드를 구하

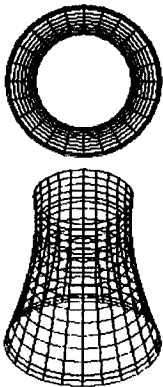


Fig. 2
Finite element model

였다. 냉각탑은 높이 330ft, 밑면 반지름 136.96ft, 윗면반지름 87.4ft, 최단반지름 84.0ft이며 24개의 섹터로 모델링하여 해석하였다. 냉각탑의 유한요소모델(Fig. 2)은 SAP90의 예제집에 있는 것을 참고하여 ADINA를 이용한 해석에 적합한 형태로 재구성하였다. 모델은 4절점 쉘요소로 구성되었으며 전체모델의 절점 수는 432개, 요소 수는 408개로 총 2448개의 자유도를 갖는다. 또한 전체모델은 24개의 섹터로 분할되며 각 섹터는 18개의 좌측경계자유도와 같은 수의 우측경계자유도를 갖으며 내부자유도는 없다. 즉 섹터모델은 절점 36개, 요소 17개, 총 자유도 수 204개로 매우 작은 모델이다. 전체모델을 사용하여 해석한 결과와 섹터모델을 사용한 결과를 비교하기 위해서 20개의 저차 고유진동수를 ADINA에 있는 기존의 일반해석법과 추가된 섹터해석법을 이용하여 계산하고 그 결과를 비교하였다. 각 경우의 고유치문제에 accelerated subspace iteration 방법을 사용하여 해석하였으며 수렴허용범위 (convergence tolerance)는 10^{-6} 로 하였다. 모든 해석결과는 IRIS 4D20-S17 workstation에서 구한 것이다.

Table 1은 각 방법으로 구한 냉각탑의 고유진동수를 비교한 것으로 두 방법의 결과가 매우 잘 일치하고 있다. Table 2는 각 경우의 해석에 필요한 자유도수와 소요된 해석시간을 비교한 것이다. 섹터해석법을 이용한 경우 전체모델에 비하여 자유

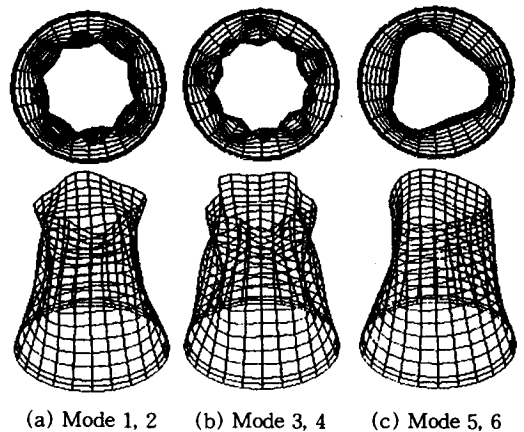


Fig. 3 Mode shapes of the cooling tower

도 수는 8.33%이며 해석시간은 4.47% 밖에 되지 않는다. Figure 3는 섹터해석법으로 구한 냉각탑의 진동모우드이다. 여기서 중근의 모우드는 대칭축이 다를 뿐 그 형태는 같으므로 그림 하나로 표현하였다.

4. 결 론

본 연구에서는 섹터해석법을 이용하여 구조해석 프로그램으로 작성하였으며 작성된 프로그램을 이용하면 일반 대형 환형반복구조물의 동특성을 빠르고 정확하게 구할 수 있다. 원자력발전소 냉각탑의 자유진동해석을 통하여 작성된 프로그램의 우수성을 증명하였다. 섹터해석법은 낮은 차수의 지배방정식을 사용하므로 적은 기억용량의 소형 컴퓨터를 사용하여서도 빠르고 정확한 해석이 가능하다. 또한 이러한 지배방정식의 차수 감소와 이에 따른 시간적, 경제적 효과는 섹터 수가 많을 수록 더욱 두드러지게 나타난다.

Table 2. Analysis of the cooling tower

	No.of d.o.f	CPU time
Full model analysis	2448	8583 sec
Sector model analysis	204	384 sec
Ratio	8.33 %	4.47 %

참 고 문 헌

1. Thomas, D. L., 1974, "Standing Waves in Rotationally Periodic Structures," J. Sound and Vibration, Vol. 33, pp. 288-290.
2. Thomas, D. L., 1979, "Dynamics of Rotationally Periodic Structures," J. Sound and Vibration, Vol. 14, pp. 81-102.
3. Shen, I. Y., 1994, "Vibration of Rotationally Periodic Structures," J. Sound and Vibration, Vol. 172, No. 4, pp. 459-470.
4. Maurice Petyt, 1990, Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge Univ. Press

Table 1. Natural frequencies of the cooling tower(Hz)

Mode No.	Full Model	Sector Model
1	0.2426	0.2426
2	0.2426	0.2426
3	0.2480	0.2480
4	0.2480	0.2480
5	0.2552	0.2552
6	0.2552	0.2552
7	0.2892	0.2893
8	0.2892	0.2893
9	0.3189	0.3189
10	0.3189	0.3189
11	0.3220	0.3221
12	0.3220	0.3221
13	0.3259	0.3259
14	0.3259	0.3259
15	0.3883	0.3884
16	0.3883	0.3884
17	0.3884	0.3884
18	0.3884	0.3884
19	0.4227	0.4227
20	0.4227	0.4227