

## STEEL BOX 교량의 동적진동감소에 대한 연구

## A Study on the Dynamic Vibration Reduction of Steel Box Bridge

조병완\* · 이인원\*\*

Jo, Byung Wan · Lee, In Won

## Abstract

Steel box bridge was modelled to improve the dynamic characteristics under moving loads (DB-24), which obtained using 3Axis-2DOF system that considers moving mass, and the kinetic equation for the bridge was derived based on the Bernoulli-Euler beam, which ignores the torsional DOF. The effects of Tuned Mass Damper (TMD) lead to the following conclusions that there is little efficiency of the maximum deflection, and more efficient to control the dynamic amplitude than the maximum static deflection.

**Keywords** : *tuned mass damper (TMD), moving mass load, dynamic amplitude, maximum deflection*

## 요 지

교량의 동적성능을 개선하기 위하여 차량하중을 차량의 질량효과를 고려한 이동질량하중 2자유도계 3축 시스템으로 모델링하였고, 교량의 경우는 폭에 비하여 시간이 길기 때문에 비틀림 자유도를 무시한 Bernoulli-Euler보를 사용하여 운동방정식을 정립하였다. 동조질량감쇠장치를 사용한 결과 최대처짐감소효과는 별로 없었으나 자유진동은 빠르게 감소하며, 최대정적처짐을 제어하기보다는 동적진폭을 제어하는데 큰 효과가 있음을 입증하였다.

**핵심용어** : 동조질량감쇠장치, 이동질량하중, 동적진폭, 최대처짐

## 1. 서 론

과학기술의 눈부신 발달로 인해 새로운 고강도·신소재의 개발이 가능해짐으로써 토목구조재료는 더욱더 경량화 및 고강도화되어가고 있으나 이들 재료의 강성의 증가는 강도의 증가에 비해 부족하므로 구

조물은 더 강해졌지만 진동에 약해 더 잘 휘는 경향이 있다. 교량의 최대시간이 길어질수록 그에 따른 많은 문제점들이 나타나기 시작하였다. 지진, 태풍, 일시적인 과도한 활하중과 불규칙한 노면조도와 같은 복잡한 하중의 극한상태는 구조물에 과도한 처짐이나 가속도를 일으킬 수 있다. 따라서 구조물의 과도한 변형을 제한하려는 시도에서 하중과 환경의 변화에 따라 구조응답특성, 위치, 그리고 형상까지도

\*정회원 · 한양대학교 공과대학 토목공학과 부교수

\*\*정회원 · KAIST 토목공학과 교수

적절히 변화시킬 수 있는 구조제어에 관심을 가지게 되었다. 구조물설계에 제어이론을 응용하면 예기치 못한 극한하중 아래에서 생기는 특정한계를 넘는 진동으로 인한 구조물의 파괴를 막을 수 있고, 여러가지 요인을 고려한 진동범위내의 구조응답을 가능케 한다. 최근에는 설계 및 시공기술의 발달로 유연하고 경량화된 교량구조물의 건설을 가능케 하고 있다. 그러나 대형차량과 고속철도차량 등의 운행으로 발생하는 과도한 처짐 및 진동현상은 교량의 안전성과 사용성에 심각한 영향을 미친다. 운송수단의 대형화·고속화 경향과 장경간 교량의 가설 중대로 더욱 심각해진 차량하중에 의한 동적효과는 정적하중에 비해 충격으로 인한 교량내부의 최대응력을 과도하게 증가시키고 또한 교량의 진동으로 발생한 처짐은 피로의 효과를 증대시켜 구조물의 사용성을 저하시킨다. 차량하중으로 발생한 동적진동을 감소시키기 위한 방법으로 진동제어장치를 이용한 방법을 고려할 수 있다. 참고문헌<sup>(1)</sup>의 수치해법을 이용하여 수동형 진동제어장치인 동조질량 감쇠장치를 설치한 교량의 응답을 구한 후, 이를 제어전의 교량응답과 비교함으로써 진동제어의 효과를 증명하고자 한다.

## 2. 교량의 자유진동<sup>(1,6)</sup>

### 2.1 고유치해석

전단 뒤틀림과 회전관성 그리고 축력의 효과를 무시한 기본적인 경우에 대한 균질보(Prismatic Beam)의 자유진동해석을 위한 미분 운동방정식은 아래와 같다.

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

여기서, W=보의 변위, EI=강성, m=보의 단위길이당 질량이다. 이 방정식해의 한 형태가 다음과 같은 변수분리에 의해 구해질 수 있다면

$$W(x, t) = \phi(x) Y(t) \quad (2)$$

다시말해서 자유진동은 Y(t)에 따라 시간과 함께 변하는 일정한 형상  $\phi(x)$ 의 진폭으로 구성되어 있다.

$$\phi(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x \quad (3)$$

적분상수 A, B, C, D와 고유치  $\lambda (= \beta l)$ (무차원:  $l =$

경간길이))는 보요소 끝단의 경계조건에 의하여 결정된다. 기울기  $\theta(x)$ , 휨모멘트  $M(x)$ , 그리고 전단력  $Q(x)$ 는 아래와 같은 공식으로 주어진다.

$$\theta(x) = \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (4)$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} \quad (5)$$

$$Q(x) = -EI \frac{d^3\phi(x)}{dx^3} \quad (6)$$

따라서 양단에서의 경계조건을 식 (4)~(6)에 도입하면 다음과 같은 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ M_1 \\ S_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ \text{symc} & & & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (7a)$$

위식을 생략형으로 쓰면

$$F = KU \quad (7b)$$

여기서 F=단부힘벡터, U=단부변위벡터이고 매트릭스의 그밖의 항은 아래와 같다.

$$k_{11} = G(\sin \lambda \cosh \lambda + \cos \lambda \sinh \lambda)$$

$$k_{12} = \frac{-G(\sin \lambda \sinh \lambda)}{\beta}$$

$$k_{13} = -G(\sin \lambda + \sinh \lambda)$$

$$k_{14} = \frac{G(\cos \lambda - \cosh \lambda)}{\beta}$$

$$k_{22} = \frac{G(\sin \lambda \cos \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda)}{\beta^2}$$

$$k_{23} = -k_{14}$$

$$k_{24} = \frac{-G(\sin \lambda - \sinh \lambda)}{\beta^2}$$

$$k_{33} = k_{11}, \quad k_{34} = -k_{12}, \quad k_{44} = k_{22}$$

$$G = \frac{EI \beta^3}{(1 - \cos \lambda \cosh \lambda)} \quad (7c)$$

식 (7b)의 고유강성매트릭스는 개개 요소와 관련해서 나타낼 수 있다. 그러므로 연속보의 일반 평형방정식은 중첩의 원리로 얻어질 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_\alpha \\ \dots \\ F_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & \dots & K_{\alpha\beta} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{\beta\alpha} & \dots & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_\alpha \\ \dots \\ U_\beta \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서,  $U_\alpha$ : 미지의 절점변위

$(F_\alpha)(U_\alpha$ 에 대응하는 절점력)

$U_\beta$ : 기지의 구속된 절점변위

$(F_\beta)(U_\beta$ 에 대응하는 절점력)

식 (8)에서  $U_\beta=0$ 과  $F_\alpha=0$ 이므로  $K_{\alpha\alpha}$ 도 0 이어야 한다.

$$\det | K_{\alpha\alpha} | = 0 \quad (9)$$

식 (9)에서 연속보의 진동방정식이 생기는데, 식 (9)의 평방근이 고유치로서 컴퓨터를 사용한 수식해로서 얻어진다. 계산된 고유치와 식 (8)을 이용하여 각 요소의 단부변위와 단부력을 계산할 수 있으므로, 이 값들을 단부의 경계조건을 고려한 식 (11a)에 대입하여 적분상수를 결정할 수 있고, 이에 따라 다음 절에서 고유함수(eigenfunction)를 구할 수 있다.

## 2.2 고유함수

각 고유치  $\lambda$ 와 대응하는 고유함수는 식 (3)에 의해 정의된다. 이 고유함수는 각각의 고유치에서의 보의 진동을 곡선의 형상으로 나타낸다. 연속보의 고유함수는(그림 1과 같이 주어지는) 식 (3)에 의해 아래와 같은 형태로 주어진다.

$$X_{nr}(x_r) = A_{nr} \cos \beta_{nr} x_r + B_{nr} \sin \beta_{nr} x_r + C_{nr} \cosh \beta_{nr} x_r + D_{nr} \sinh \beta_{nr} x_r \quad (10)$$

여기서,  $X_{nr}(x_r) = n$ 차 모드에서의  $r$ 번째 경간의 고유함수

$$\beta_{nr} = \frac{\lambda_{nr}}{l_r}$$

$A_{nr}, B_{nr}, C_{nr}, D_{nr} = \beta_{nr}$ 값의 향으로 표현되는 적분상수들

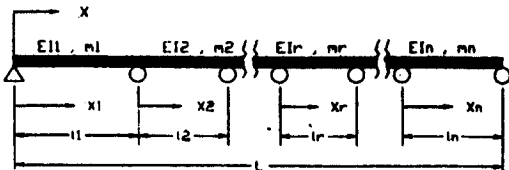


그림 1. N경간의 연속보.

좌표의 원점은 각 경간의 왼쪽 끝이다. 경계조건으로 부터 적분상수(A, B, C, D)는 양단부의 변위( $V_1, \theta_1, V_2, \theta_2$ )의 향으로 표현되어질 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (11a)$$

생략형으로 쓰면

$$C = RU \quad (11b)$$

여기서,

$$r_{11} = -H(1 + \sin \lambda \sinh \lambda - \cos \lambda \cosh \lambda)$$

$$r_{12} = \frac{H(\sin \lambda \cosh \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda)}{\beta}$$

$$r_{13} = -H(\cos \lambda - \cosh \lambda)$$

$$r_{14} = \frac{-H(\sin \lambda - \sinh \lambda)}{\beta}$$

$$r_{21} = H(\sin \lambda \cosh \lambda + \cos \lambda \sinh \lambda)$$

$$r_{22} = \frac{H(1 - \sin \lambda \sinh \lambda - \cosh \lambda \cosh \lambda)}{\beta}$$

$$r_{23} = -H(\sin \lambda + \sinh \lambda)$$

$$r_{24} = \frac{-r_{13}}{\beta}, \quad r_{31} = -r_{22}\beta, \quad r_{32} = -r_{12}$$

$$r_{33} = -r_{13}, \quad r_{34} = -r_{14}, \quad r_{41} = -r_{21}$$

$$r_{42} = \frac{-r_{11}}{\beta}, \quad r_{43} = -r_{23}, \quad r_{44} = \frac{r_{13}}{\beta}$$

$$H = \frac{1}{2(1 - \cos \lambda \cosh \lambda)} \quad (11c)$$

식 (11b)의 정방향 매트릭스 R를 적분상수 매트릭스라고 하자. 적분상수  $A_{nr}, B_{nr}, C_{nr}, D_{nr}$ 의 상대값들은 식 (11)의 각각 요소의 단부변위를 대입함으로써 구해진다. 다경간 교량의 경우 각 경간에서의 모드별로 적분상수를 결정해야 한다.

## 3. 차량하중하의 교량의 거동

### 3.1 운동방정식과 동적응답<sup>(2)</sup>

본연구에서 이용된 모델인 2자유도를 가진 1차원 3축 차량모델(강제로서 고려된 차량)이 그림 2에 보

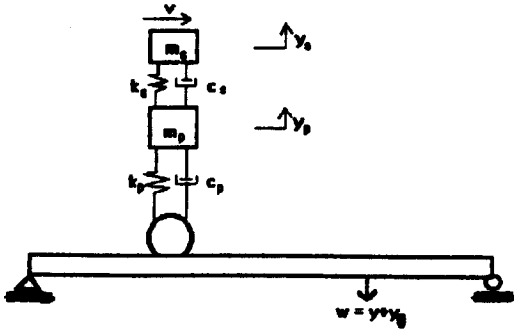


그림 2. 차량모델.

인 바와 같이 단순지지된 교량위를 지나가고 있다.

차량모델은 2개의 집중질량  $m_p$ 와  $m_s$ , 2개의 선형 스프링  $k_p$ 와  $k_s$ , 그리고 2개의 점성감쇠  $c_p$ 와  $c_s$ 로 구성되는데, 여기서 첨자 p는 바퀴를 나타내고 s는 차체를 나타낸다. 교량은 등가단면의 Bernoulli-Euler보로 구성되었다. 보의 변위  $w(x, t)$ 는 초기의 불규칙변위인  $y_0(x)$ (노면조도와 같은)와 차량에 의해 발생하는 변위인  $y(x, t)$ (아래쪽으로 처질때를 양(+))로 구성된다.

$$W(x, t) = y_0(x) + y(x, t) \quad (12)$$

질량  $m_p$ 와  $m_s$ 의 변위는  $y_p$ 와  $y_s$ 로 위로 향할 때 양(+)으로 본다. 그러면 차량의 운동방정식은

$$m_p \ddot{y}_p + m_s \ddot{y}_s + c_p (\dot{y}_p + \dot{w}) + k_p (y_p + w) = 0 \quad (13)$$

$$m_s \ddot{y}_s + c_s (\dot{y}_s - \dot{y}_p) + k_s (y_s - y_p) = 0 \quad (14)$$

여기서,  $t$ 는 시간이고  $g$ 는 중력가속도이다. 차량이 일정속도  $v$ 로 이동할때 차량에 의해 보에 작용하는 힘  $F(x, t)$ 는 아래와 같이 표현된다.

$$F(x, t) = f(t) \cdot \delta(x - vt) \quad (15)$$

여기서,  $f(t) = (m_p + m_s)g + (m_p \ddot{y}_p + m_s \ddot{y}_s)$  (16)

$$\delta = \begin{cases} 1; & 0 \leq x(=vt) \leq L \\ 0; & x(=vt) \geq L \end{cases} \quad (17)$$

그러면, 보의 운동방정식은

$$EI \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + c \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) + m \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = F(x, t) \quad (18)$$

여기서  $x$ 는 보의 교축방향좌표이고,  $EI$ 는 보의 휨강성,  $c$ 는 감쇠계수, 그리고  $m$ 은 단위길이당 보의 질량이다.

$$\phi_n(x) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (19)$$

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \quad (20)$$

식 (18)에 식 (20)를 대입하면 아래식 (21)을 얻는다.  $q_n(t)$ 는 아래방정식에서 구할 수 있다.

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{1}{mM_n^2} \int_0^L F(x, t) \phi_n(x) dx \quad (21)$$

여기서,  $z_n = \frac{c}{2m\omega_n}$  (교량의 각모우드별 감쇠계수)

$$\omega_n = \left(\frac{\lambda_n^2}{L^2}\right) \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (\text{교량의 원고유진동수})$$

$L$  = 교량의 전체길이

$\phi_n(x)$  = 교량의 고유함수

$$M_n^2 = \int_0^L \phi_n^2 dx$$

그러므로, 중앙경간의 변위  $y_m$ 은

$$y_m = q_1 \cdot \phi_1\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{C(m_p + m_s)g}{mL\omega_1^2} \quad (22)$$

차체와 바퀴 및 교량의 연직변위는 차량이 중앙점에 위치하였을 때의 정적변위와의 비로 나타내었다. 식 (22)은 이러한 정적변위를 의미하며  $C$ 값은 3경간 교량의 경우( $11\pi^4/960$ )의 값을 갖는다.<sup>(22)</sup> 비연성된 고유진동수와 모드감쇠율은 아래와 같다.

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}}, \quad \zeta_s = \frac{c_s}{2m_s \omega_s} \quad (23)$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{k_p}{(m_p + m_s)}}, \quad \zeta_p = \frac{c_p}{2(m_p + m_s) \omega_p}$$

다음과 같은 무차원 매개변수들이 아래와 같이 도입되었다.

$$\varepsilon = \frac{(m_p + m_s)}{mL}, \quad \varepsilon_p = \frac{m_p}{mL}, \quad \varepsilon_s = \frac{m_s}{mL},$$

$$\gamma_m = \frac{m_p}{m_s}, \quad \Omega = \frac{\omega_1}{\omega_p}, \quad \gamma = \frac{\omega_s}{\omega_p},$$

$$\xi_v = \frac{vt}{L} = \frac{v\tau}{L\omega_1} = \frac{v_r \tau}{\pi}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \alpha_n = \frac{q_n}{y_m}, \quad (24)$$

$$\tau = \omega_1 t, \quad u = \frac{\pi v}{L\omega_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{v}{u_c}, \quad u_c = 2f_1 L,$$

$$Y_p = \frac{y_p}{y_m}, \quad y_s = \frac{y_s}{y_m}, \quad Y_0 = \frac{y_0}{y_m}, \quad Y = \frac{y}{y_m}$$

각 변수들은 차량하중에 관련된 기발표된 자료에 근거한 것이다. 식 (12), (23)과 (24)를 사용해서, 우리는 식 (13), (14)와 (21)을 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \Omega^2 \ddot{Y}_p + \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}\right) \Omega^2 \ddot{Y}_s + 2\zeta_p \Omega \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right) (\dot{Y}_p + \dot{Y}) \\ & + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right) (Y_p + Y) \end{aligned} \quad (25)$$

$$= -\frac{\Omega^2}{2\varepsilon_p} - 2\zeta_p \Omega \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right) \dot{Y}_0(\xi_v) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right) \cdot Y_0(\xi_v)$$

$$\Omega^2 \ddot{Y}_s + 2\zeta_s \Omega \gamma_f (\dot{Y}_s - \dot{Y}_p) + \gamma_f^2 (Y_s - Y_p) = -\frac{\Omega^2}{2\varepsilon} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\alpha}_n + 2\zeta_n \left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right) \dot{\alpha}_n + \alpha_n \left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right)^2 \\ & = \Delta \left(\frac{1}{C_{static}} + \varepsilon_s \dot{Y}_s + \varepsilon_p \dot{Y}_p\right) \phi_n(\xi_v) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{여기서, } \Delta = \begin{cases} 1; & 0 \leq \xi_v \leq 1 \\ 0; & \xi_v > 1 \end{cases} \quad (28)$$

$$Y(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\tau) \phi_n(\xi) \quad (29)$$

식 (25)과 (26)은 적분상수를 가지는 2차 상미분방정식이다. 보 방정식에서 좌표의 수는 무한하나 실질적으로 중요한 것은 몇개의 모드에서 나오므로 이 수를 n이라고 한다. 식 (29)를 식 (25)~(27)에 대입하면 아래식 (30)과 같은 N(=2+n)차수의 매트릭스 형태로 아래와 같이 표현되어질 수 있다.

$$M\ddot{P} + C\dot{P} + KP = Q \quad (30)$$

여기서 M, C, K는 각각 전체시스템의 질량, 감쇠, 강성 행렬을 의미하며, Q는 하중벡터를 의미하고, P는 전체시스템의 자유도를 나타낸다. 만약 교량의 자유도를 n개 고려한다면 식 (30)은 행렬의 크기가 (n+2)인 운동방정식이 된다. 운동방정식 (30)은 t+Δt에서의 평형운동방정식으로 부터 거동을 구하는 Newmark-β method를 이용하여 해석을 각각 수행하여 비교한다.

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} \Omega^2 & \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}\right)\Omega^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \Omega^2 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{-\Delta\varepsilon_p l \phi_1(\xi_v)}{M_1^2} & \frac{-\Delta\varepsilon_s l \phi_1(\xi_v)}{M_1^2} & 1 & 0 & \dots \\ \frac{-\Delta\varepsilon_p l \phi_2(\xi_v)}{M_2^2} & \frac{-\Delta\varepsilon_s l \phi_2(\xi_v)}{M_2^2} & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 2\zeta_p \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)\Omega & 0 & 2\zeta_p \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)\Omega \phi_1(\xi_v) \\ -2\zeta_s \Omega \gamma_f & 2\zeta_s \Omega \gamma_f & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta_n \left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\zeta_p \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)\Omega \phi_2(\xi_v) & \dots \\ 0 & \dots \\ 0 & \dots \\ 2\zeta_n \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) & \dots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} & 0 & \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)\phi_1(\xi_v) & \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)\phi_2(\xi_v) & \dots \\ -\gamma_f^2 & \gamma_f^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\ Q &= \begin{bmatrix} -2\zeta_p \Omega \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right) \dot{Y}_0(\xi_v) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right) Y_0(\xi_v) \\ 0 \\ \frac{\Delta l \phi_1(\xi_v)}{C_{static} M_1^2} \\ \frac{\Delta l \phi_2(\xi_v)}{C_{static} M_2^2} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ P &= \begin{bmatrix} Y_p \\ Y_s \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

본 논문에서는, 모드의 수  $n$ 이 비교를 위해서 다르게 사용되었다. 그러므로, 식 (30)은 수치적해법으로 풀려질 수 있다.

#### 4. TMD가 설치된 교량의 거동

##### 4.1 운동방정식과 동적응답<sup>(9)</sup>

TMD의 설치위치는 구조물의 응답이 최대가 되는 교량의 중앙점이며, 아래의 그림 3은 교량의 중앙점에 설치된 TMD를 나타낸다.

아래의 식 (32)는 교량과 TMD 사이의 거동을 나타내는 운동방정식이다.

$$m_z \ddot{z} + c_z (\dot{z} - \dot{w}) + k_z (z - w) = 0 \quad (32)$$

여기서,  $m_z$ ,  $c_z$ ,  $k_z$ 는 각각 TMD의 질량과 감쇠값 및 스프링상수를 나타낸다. TMD를 고려하여 교량의 운동방정식의 하중항에 반영하면 아래의 식 (33)과 같다.

$$F(x, t) = \{ (m_p + m_s)g + m_p \ddot{y}_p + m_s \ddot{y}_s \} \delta(x - vt) + (m_z g - m_z \ddot{z}) \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) \quad (33)$$

무차원 운동방정을 얻기 위하여 식 (34)와 같은 무차원 변수를 정의한다.

$$Z = \frac{z}{y_m}, \quad \varepsilon_z = \frac{m_z}{m_l}, \quad \gamma_z = \frac{\omega_z}{\omega_p} \quad (34)$$

여기서  $Z$ 는 TMD의 연직변위를 나타내는 무차원 변수이고,  $\varepsilon_z$ 는 교량이 총질량에 대한 TMD의 질량비를 나타내며,  $\gamma_z$ 는 TMD의 진동수를 나타내는 무차원 계수로 바퀴와의 진동수비로 표시하였다. 아래의 식 (35)는 무차원 변수를 도입하여 구성한 TMD의 무차원 운동방정식이다.

$$\Omega^2 \ddot{Z} + 2\zeta_z \Omega \gamma_z (\dot{Z} - \dot{Y}) + \gamma_z^2 (Z - Y) = 2\zeta_z \gamma_z \Omega \dot{Y}_0 \left(\frac{L}{2}\right) + \gamma_z^2 Y_0 \left(\frac{L}{2}\right) \quad (35)$$

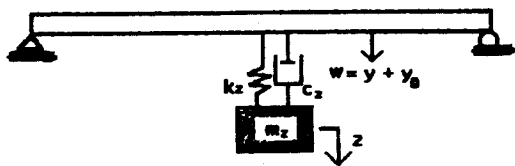


그림 3. 교량의 중앙점에 설치된 TMD.

무차원 운동방정식 (35)를 3장에서 구한 차량과 교량의 운동방정식에 추가하고, 식 (33)에 주어진 TMD에 의해 교량에 가해지는 힘을 고려하면 아래의 식 (36)과 같이 차량과 교량, TMD의 운동방정식을 행렬 형태로 표현할 수 있다. 교량의 자유도를  $n$ 개 고려한다면 운동방정식은  $(n+3)$ 의 크기를 갖는다. 전체시스템의 운동방정식은 식 (37)과 같다.

$$M\ddot{P} + C\dot{P} + KP = Q \quad (36)$$

여기서,

$$M = \begin{bmatrix} \Omega^2 & (\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_p})\Omega^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \Omega^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \Omega^2 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\Delta\varepsilon_p l \phi_1(\xi_v)}{M_1^2} & \frac{\Delta\varepsilon_l \phi_1(\xi_v)}{M_1^2} & \frac{\varepsilon_z l \phi_1(L/2)}{M_1^2} & 1 & 0 & \dots \\ \frac{\Delta\varepsilon_p l \phi_1(\xi_v)}{M_2^2} & \frac{\Delta\varepsilon_l \phi_2(\xi_v)}{M_2^2} & \frac{\varepsilon_z l \phi_2(L/2)}{M_2^2} & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2\zeta_p (\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p})\Omega & 0 & 0 & 2\zeta_p (\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p})\Omega\phi_1(\xi_v) & & \\ -2\zeta_{sp}\Omega\gamma_l & 2\zeta_{sp}\Omega\gamma_l & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 2\zeta_z\Omega\gamma_l & -2\zeta_z\Omega^2\phi_1(\frac{L}{2}) & & \\ 0 & 0 & 0 & 2\zeta_m(\frac{\omega_1}{\omega_l}) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 2\zeta_{sp}(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p})\Omega\phi_2(\xi_v) & \dots & & & & \\ 0 & \dots & & & & \\ -2\zeta_{sp}\Omega^2\phi_2(\frac{L}{2}) & \dots & & & & \\ 0 & \dots & & & & \\ 2\zeta_m(\frac{\omega_2}{\omega_l}) & \dots & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} & 0 & 0 & (\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p})\phi_1(\xi_v) & (\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p})\phi_2(\xi_v) & \dots \\ -\gamma_l^2 & \gamma_l^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \gamma_z^2 & -\gamma_z^2\phi_1(\frac{L}{2}) & -\gamma_z^2\phi_2(\frac{L}{2}) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{\omega_1}{\omega_2})^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{\omega_2}{\omega_1})^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -2\zeta_p \Omega \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \dot{Y}_0(\xi) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} Y_0(\xi) \\ 0 \\ 2\zeta_z \Omega \gamma_z \dot{Y}_0(\frac{L}{2}) + \gamma_z^2 Y_0(\frac{L}{2}) \\ \frac{1}{C_{static} M_1^2} (\Delta\phi_1(\xi) + \frac{\varepsilon_z \phi_1(L/2)}{\varepsilon}) \\ \frac{1}{C_{static} M_2^2} (\Delta\phi_2(\xi) + \frac{\varepsilon_z \phi_2(L/2)}{\varepsilon}) \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} Y_p \\ Y_s \\ Z \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

## 5. 수치해석

### 5.1 DB-24톤하중의 제원<sup>(10)</sup>

해석에 사용한 주행차량은 현재 도로교에서 1등급

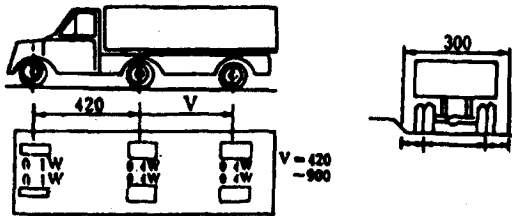


그림 4. DB-24톤 차량(단위: m).

표 1. DB-24톤 차량의 물성치

전륜축 부분			
	질량(kg)	스프링상수(N/m)	감쇠값(N/m)
바퀴	800	$2.40 \times 10^6$	$3.0 \times 10^4$
차체	4,000	$0.785 \times 10^6$	$6.0 \times 10^4$
중륜축 부분			
	질량(kg)	스프링상수(N/m)	감쇠값(N/m)
바퀴	3,200	$9.60 \times 10^6$	$6.0 \times 10^4$
차체	16,320	$5.10 \times 10^6$	$6.0 \times 10^4$
후륜축 부분			
	질량(kg)	스프링상수(N/m)	감쇠값(N/m)
바퀴	2,560	$9.60 \times 10^6$	$6.0 \times 10^4$
차체	16,320	$5.10 \times 10^6$	$6.0 \times 10^4$

교량의 설계기준하중인 DB-24톤 하중이다. DB-24톤 하중은 3축으로 구성되어 있으며, 아래의 그림 4는 DB-24톤 차량의 제원을 나타내었다.

차량의 자유도는 연직방향 성분만을 고려하였고 횡방향과 횡방향 자유도는 고려하지 않았으며, 차량의 동특성에 영향을 미치는 차체와 바퀴의 질량과 스프링 상수 및 감쇠값은 아래의 표 1과 같다. 표 1은 차체와 바퀴의 물성치를 제시하고 있다.

### 5.2 TMD의 제원<sup>(3,4)</sup>

주구조물과 TMD의 진동수를 동조시키는 방법은 여러가지가 있으나, Den Hartog가 제안한 최적기준을 가장 많이 사용하고 있다. Den Hartog가 제안한 최적의 진동수비와 감쇠비는 다음과 같다.

$$\varepsilon_z = \frac{m_z}{m_l}, \quad \omega_z = \frac{\omega_n}{1 + \varepsilon_z} \quad (38)$$

$$\left(\frac{c_z}{c_c}\right)^2 = \frac{3\varepsilon_z}{8(1 + \varepsilon_z)^3}, \quad c_c = 2m_z \omega_n \quad (39)$$

여기서,  $\varepsilon_z$ 는 TMD 질량과 교량의 질량비이고,  $\omega_z$ ,  $m_z$ 는 각각 TMD의 진동수와 질량을 나타내고,  $\omega_n$ 은 교량의 고유진동수,  $c_z$ 는 TMD의 감쇠값,  $c_c$ 는 임계 감쇠값을 나타낸다.

주구조물의 응답이 최소가 되도록 하는 최적의 임계감쇠값(critical damper damping)을 Tsai는 다음과 같은 식으로 제안하였다.

$$\zeta_z = \zeta_n + \sqrt{\varepsilon_z} \quad (40)$$

여기서,  $\zeta_z$ ,  $\zeta_n$ 은 각각 TMD와 구조물의 감쇠계수비를 의미한다.

### 5.3 수치해석 결과

해석대상교량은 근래에 도로교에서 많이 채택되고 있으나 진동이 다소 심한 3경간 Steel Box 형교를 선택하였는데 각 경간이 50m인 총연장 150m의 교량이다. 실제 해석시 본 교량은 박스 형태의 단면을 가지나 본문에서는 등가의 강성을 갖는 환산단면적을 사용하여 Bernoulli-Euler보로서 모델링하여 해석하였다. 이에 해당되는 교량의 물성치는 아래의 표 2와 같다.

수치해석에 사용한 Newmark  $\beta$ 방법의 무조건적인 안전성을 확보할 목적으로 평균가속도법을 채택

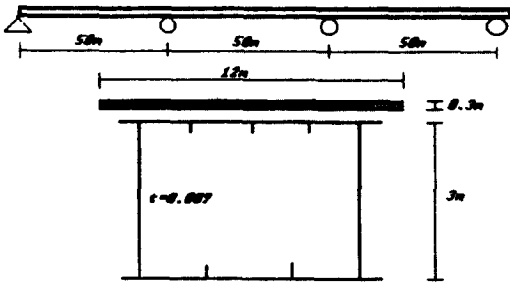


그림 5. 3경간 교량의 제원 및 단면형상.

표 2. 교량의 물성치

탄성계수	$2.06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	단면적	$0.5478 \text{ m}^2$
밀도	$4300 \text{ kg/m}^3$	관성모멘트	$0.149 \text{ m}^4$
감쇠계수비	1.17%		

하였으며, 사용한 매개변수와 시간간격  $\Delta t$ 는 다음과 같다.

$$\delta = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{4}, \quad \Delta t = \frac{T}{10} \quad (41)$$

여기서 T는 고려하는 구조물의 진동수 중에서 가장 작은 주기를 나타낸다. 실제 가능한 차량속도범위 내에서는 100 km/h로 주행할때 최대처짐을 얻으므로 준입계속도 100 km/h를 정하여 각각의 응답들을 구하기로 한다. 3경간 교량의 경우 두번째 모우드만을 고려해도 충분하나 보다 정확한 결과를 얻기 위해 총 3개의 연속 모우드를 고려하여 해석하였다. 그림 7은 그림 4에서 차량의 중륵과 후륵의 간격인 V값 ( $V=4.2 \sim 9 \text{ m}$ )의 변화에 따른 교량중양점에서의 최대처짐값을 나타낸 것이다.  $V=6.6 \text{ m}$  일때가 최대 처짐값을 얻으므로 이 값을 사용하기로 한다.

### 5.3.1 동조질량 감쇠장치 설치전의 응답

그림 8은 차량하중이 100 km/h 속도로 통과할 경우의 3경간 교량 중앙점의 연직변위를 나타낸 것으로, 강제진동이 자유진동에 비하여 크게 나타났고 위의 결과를 FFT(Fast Fourier Transform)한 결과 첫번째 모우드에 의한 응답이 지배적이었으므로 교량의 응답을 감소시키기 위해서는 교량의 첫번째 모우드에 동조된 TMD를 사용하는 것이 바람직하다.

### 5.3.2 동조질량 감쇠장치 설치후의 응답

TMD는 3경간 교량의 응답이 최대인 중앙점에 설치하였으며, 질량비( $\epsilon_2$ )는 일반적으로 0.01~0.04의

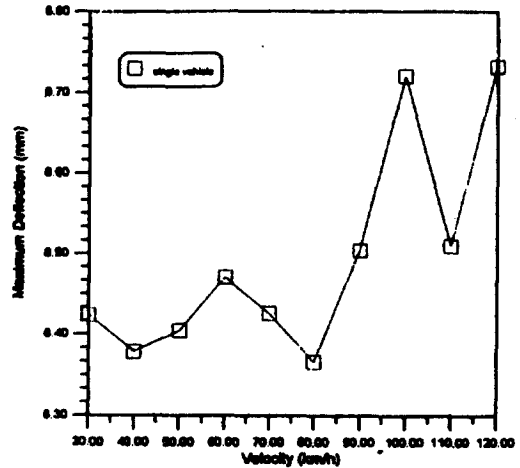


그림 6. 차량속도와 최대처짐과의 관계.

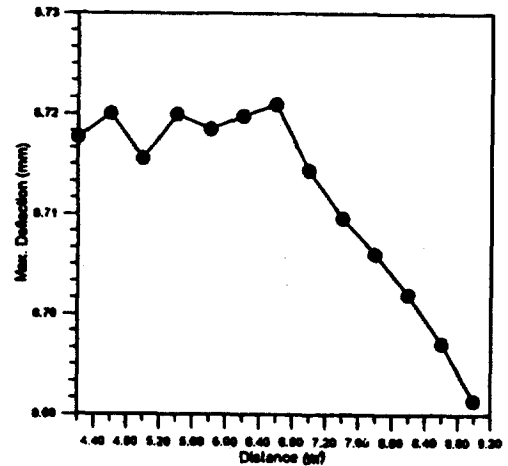


그림 7. 중륵과 후륵간의 간격과 최대처짐과의 관계.

값을 사용하고 있으나 본 연구에서는 0.01을 채택하였다. 3경간 교량의 경우 첫번째 모우드에 의한 응답이 지배적이므로 교량의 첫번째 모우드에 동조시킨 TMD를 사용하였다. 그림 8a에서 TMD 설치전의 교량의 최대변위는 8.72 mm이고, 그림 9a에 나타난 설치후의 최대변위는 8.49 mm로 초기의 강제진동 감소효과는 약 2.6%이나, 자유진동 부분은 빠르게 감소하였다. FFT 분석결과 자유진동의 첫번째 모우드 진폭이 작아지면서 여러개로 분해되므로 TMD를 사용하여 진동제어시 초기의 강제진동은 제어하기 어려우나 자유진동이 빠르게 감소하는 특징을 보이고 있다.

### 5.3.3 TMD의 응답



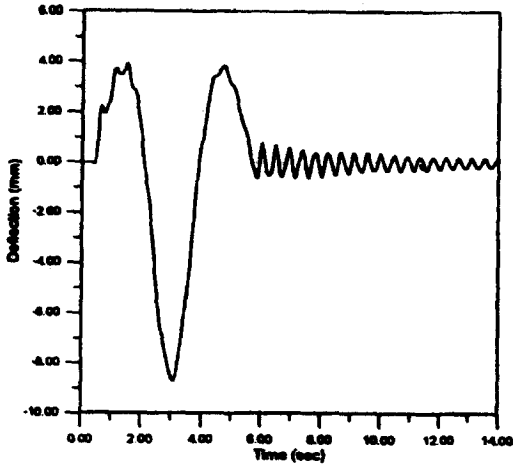


그림 8a. TMD 설치전 3경간 교량 중앙점의 처짐.

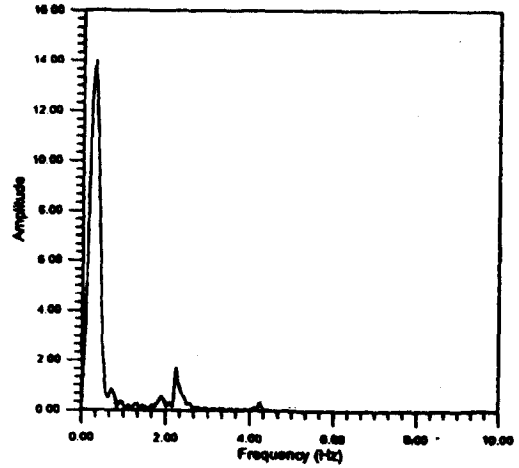


그림 8b. TMD 설치전 FFT 결과.

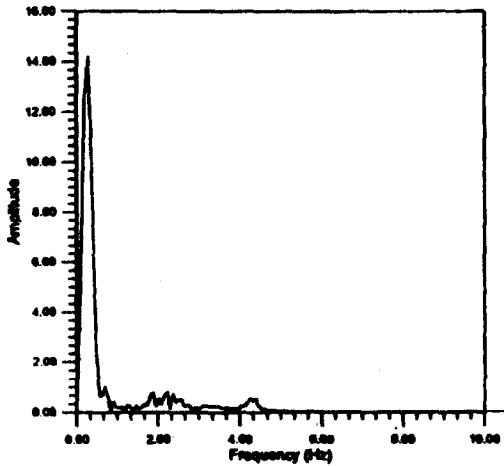


그림 9a. TMD 설치후 3경간 교량 중앙점의 처짐.

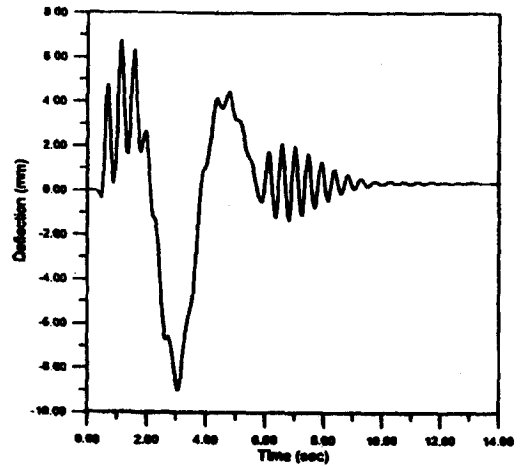


그림 9b. TMD 설치후 FFT 결과.

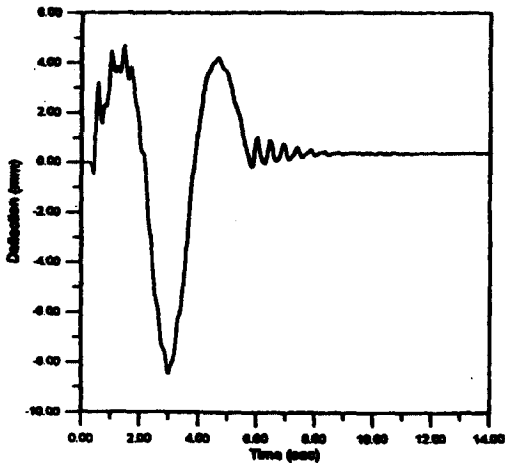


그림 10a. TMD의 연직변위.

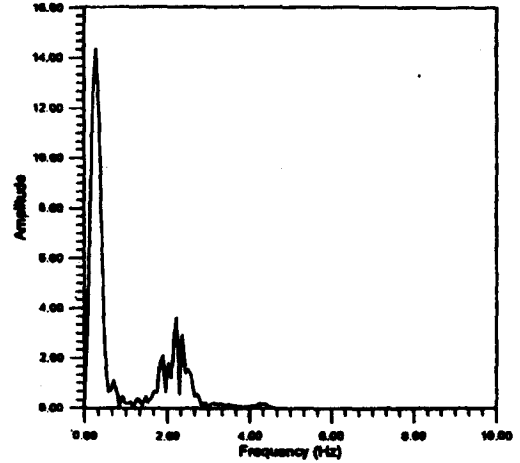


그림 10b. TMD의 FFT 결과.

TMD는 주구조물 대신 진동을 함으로써 진동에너지를 감소시켜 제어효과를 얻는 장치이다. 따라서 TMD의 응답은 주구조물의 응답에 비해 상당히 크다. 이러한 현상은 실제 시공을 불가능하게 할 수 있는 중요한 문제로서, 최근 주구조물의 응답과 함께 TMD의 응답을 동시에 감소시키는 연구가 진행되고 있다. 아래의 그림 10a는 3경간교량의 중앙점에 설치된 TMD의 변위를 나타낸 그림으로써, 교량 자체의 응답에 비해 약 6% 정도 더 큰 응답을 얻어 TMD의 시공이 가능하다. 또 그림 10b는 이것을 FFT 변환한 것이다.

## 6. 결 론

Steel Box교량에서 DB-24톤 차량하중을 2자유도계 3축시스템으로 모델링하여 3경간 교량의 응답을 구하였고, 이러한 동적응답을 감소시키기 위해 설치된 동조질량 감쇠장치의 효율성을 입증하였다. 수치해석 결과에서 살펴본 바 다음과 같은 특징을 가지고 있다.

1. 현재 1등급 교량의 설계하중인 DB-24톤 차량하중을 질량과 감쇠장치 및 스프링으로 구성된 2자유도계 3축시스템으로 모델링하여 실제 도로형 교량의 동적거동을 파악하였다.

2. 단일하중에 대한 동조질량감쇠장치의 최대처짐 감소효과는 별로 없었으나 자유진동은 빠르게 감소하였다.

3. 차량의 운동방정식 구성시 교량의 노면조도의 영향을 고려하여 보다 실제상황에 가깝게 접근하였다.

4. 위의 수치해석 결과를 보면 TMD의 역할은 최대정적처짐을 제어하기 보다는 동적진폭을 제어하는데 있다.

중차량이 통과하는 도로형교량의 응답 특성을 규명한 후, 동조질량 감쇠장치가 설치된 교량의 거동특성을 해석적·수치적 방법을 통하여 해석함으로써 동조질량 감쇠장치의 효율성을 입증하였다. 앞으로

차량의 제동하중과 연행하중 그리고 교량의 단차, 범프 등의 영향을 고려한 보다 광범위한 진동감소연구가 필요하다.

## 참고문헌

1. T. Hayashikawa and N. Watanabe. (1981). "Dynamic Behavior of Continuous Beams with Moving Loads," *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 107, No. EM1, pp. 229-246.
2. Y. Cai, S.S. Chen, D.M. Rote and H.T. Coffey. (1994). "Vehicle/Guideway Interaction for High Speed Vehicles on a Flexible Guideway," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 175, No. 5, pp. 625-646.
3. D. Hartog. (1985). *Mechanical Vibration*, Dover Publications, Inc.
4. H.C. Tsai. (1993). "Green's Function of Support-Excited Structures with Tuned Mass Dampers Derived by a Perturbation Method," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 22, pp. 975-990.
5. L. Fryba. (1972). *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Noordhoff International Publishing, Groningen, The Netherlands.
6. Ray W. Clough, Joseph Penzien. (1993) *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, Inc.
7. 전준창 (1991) "교량구조물의 동특성 추정 및 충격계수의 통계적 분석" 한양대학교 석사논문.
8. 홍성국 (1993) "구조물의 제어 메카니즘에 관한 연구" 중앙대학교 박사논문.
9. 권호철 (1996) "이동하중을 받는 교량의 진동제어" 한국과학기술원 석사논문.
10. 김규춘 (1994) "차량통과 및 제동으로 인한 도로교의 동적거동 해석" 고려대학교 박사논문.
11. 이인원 외 4명, "이동하중을 받는 교량의 진동제어," *대한토목학회논문집 제 16권 제 1-3호*, pp. 271-281, 1996.

(接受 : 1996. 11. 26)