

<논 문>

Winkler형 지반위에 놓인 수평 곡선보의 자유진동

Free Vibrations of Horizontally Curved Beams Resting on Winkler-Type Foundations

오 상 진* · 이 병 구** · 이 인 원***
Sang Jin Oh, Byoung Koo Lee and In Won Lee

(1998년 2월 5일 접수 ; 1998년 3월 26일 심사완료)

Key Words : Horizontally Curved Beam(수평 곡선보), Winkler-Type Foundation(Winkler형 지반), Bernoulli-Euler Beam Theory(Bernoulli-Euler보이론), Natural Frequency(고유진동수)

ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate the free vibrations of horizontally curved beams resting on Winkler-type foundations. Based on the classical Bernoulli-Euler beam theory, the governing differential equations for circular curved beams are derived and solved numerically. Hinged-hinged, hinged-clamped and clamped-clamped end constraints are considered in numerical examples. The free vibration frequencies calculated using the present analysis have been compared with the finite element's results computed by the software ADINA. Numerical results are presented to show the effects on the natural frequencies of curved beams of the horizontal rise to span length ratio, the foundation parameter, and the width ratio of contact area between the beam and foundation.

1. 서 론

지반위에 놓인 구조물의 거동특성 규명은 구조공학, 기초공학 및 진동제어분야에서 중요한 연구 대상으로 취급되고 있다. Pavlovic과 Wylie⁽¹⁾, Valsangkar와 Pradhangang⁽²⁾, Williams와 Kennedy⁽³⁾, Kukla⁽⁴⁾, 이⁽⁵⁾, Yokoyama⁽⁶⁾는 보를 대상으로, Salari 등⁽⁷⁾, Kennedy와 Williams⁽⁸⁾, Gupta 등⁽⁹⁾, Laura 등⁽¹⁰⁾은 평판을 대상으로 탄

성지반효과가 대상구조의 정, 동적특성에 미치는 영향을 고찰하였다.

곡선보는 구조물의 기초(foundation)로서 이용되고 있어 탄성지반위에 놓인 곡선보의 여러가지 제변수 변화에 따른 정, 동적특성이 규명되어야 한다. 이에 대한 연구로서 Volterra⁽¹¹⁻¹³⁾, Panayotounakos와 Theocaris⁽¹⁴⁾는 면외하중을 받는 탄성지반위에 놓인 곡선부재의 정적특성에 관한 연구를 수행하였다. 특히 참고문헌(13)에는 탄성지반위에 놓인 곡선보의 정적거동에 관한 많은 유용한 자료가 수록되어 있다.

그러나 Laura와 Maurizi⁽¹⁵⁾가 고찰한 바와 같이 지반위에 놓인 곡선부재의 동적특성에 대한 유용한 연구자료는 부족한 실정이다. 탄성지반위에

* 원광대학교 공업기술개발연구소, 연구원

** 정희원, 원광대학교 토목환경공학과, 교수

*** 정희원, 한국과학기술원 토목공학과, 교수

여기서 ($'$) = $d/d\theta$ 이며, I 와 J 는 각각 곡선보 단면의 단면 2차 모멘트 및 Saint-Venant 비틀림 상수, E 와 G 는 각각 곡선보 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수이다. 한편 전단변형을 무시하는 경우 단면회전각 Ψ 는 다음 식과 같다.

$$\Psi = \frac{dv}{ds} = a^{-1}v' \quad (6)$$

Fig. 2(a)는 Winkler지반위에 놓인 곡선보의 단면형상과 비틀림각으로 인한 단면회전을 나타낸 것으로 b 는 지반과 접하는 단면폭, t 는 단면높이, k 는 Winkler지반계수, r 은 단면도심을 원점으로 하는 곡률중심방향의 좌표이다.

곡선보와 지반이 접하는 면에서의 압력과 처짐의 관계는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$p(r, \theta) = kz(r, \theta) \quad (7)$$

윗 식에서 $p(r, \theta)$ 는 곡선보축상 임의점(θ)의 단면에서 곡률중심방향의 압력변화이고, $z(r, \theta)$ 는 곡선보 단면을 따라 변화하는 면외방향 수직변위이다.

곡선보축상 임의점의 중심축에서 수직방향변위는 v 이므로 압력은 kv 이며, ϕ 는 미소각이므로 $z(r, \theta)$ 는 다음 식 (8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$z(r, \theta) = v - r\phi \quad (8)$$

식 (7)과 (8)로부터 단면 양쪽끝에서의 압력을 구하면 다음 식 (9)와 같다.

$$p\left(-\frac{b}{2}, \theta\right) = k\left(v + \frac{b\phi}{2}\right) \quad (9a)$$

$$p\left(\frac{b}{2}, \theta\right) = k\left(v - \frac{b\phi}{2}\right) \quad (9b)$$

Fig. 2(b)는 이상의 결과를 이용하여 곡선보 단면에 작용하는 압력분포를 나타낸 것으로 이는 Fig. 2(c)에 보여진 바와 같이 곡선보 중심축에 대한 단위길이당 수직반력 R_f 와 회전반력 R_t 로 나타낼 수 있으며 그 결과는 다음 식들과 같다.

$$R_f = kbv \quad (10)$$

$$R_t = \frac{kb^3\phi}{12} \quad (11)$$

곡선보가 조화진동을 한다고 가정하면 단위길이당 수직방향 관성력 F_v 는 다음 식 (12)와 같다.

$$F_v = -m\omega^2v \quad (12)$$

윗 식에서 m 은 보재료의 단위길이당 질량, ω 는 고유각진동수(rad/sec)이다.

식 (4)와 (5)를 θ 에 대하여 한번 미분하면 각각 다음 식 (13) 및 (14)와 같다.

$$M' = EIa^{-1}(\phi' - \Psi'') \quad (13)$$

$$T' = GJa^{-1}(\Psi' + \phi'') \quad (14)$$

식 (13)과 (5)를 식 (2)에 대입하고 전단력 Q 에 대하여 정리하면 다음 식과 같다.

$$Q = EIa^{-2}(\phi' - \Psi'') + GJa^{-2}(\Psi + \phi') \quad (15)$$

지배 미분방정식을 무차원 형태로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \delta = y/l, \eta = v/l \quad (16\sim 18)$$

$$f = h/l, \rho = a/l, \epsilon = GJ/EI \quad (19\sim 21)$$

$$\lambda = kl^5/(\pi^4 EI), \beta = b/l \quad (22, 23)$$

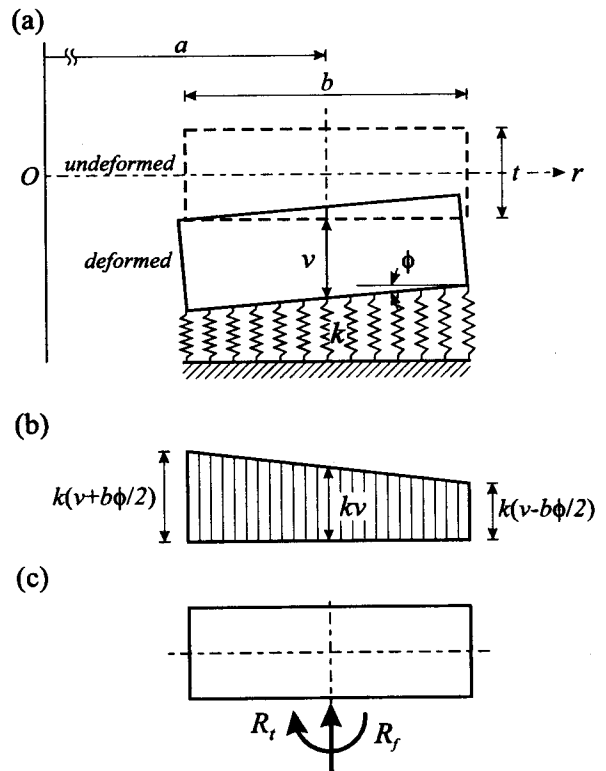


Fig. 2 (a) Rotation of the cross-section of the beam on Winkler-type foundation: (b) Vertical pressure under a unit length of the curved beam: (c) Vertical and rotational reaction

놓인 곡선부재의 진동특성에 관한 연구로서 Panayotounakos와 Theocaris⁽¹⁶⁾는 참고문헌(14)의 연구결과를 확장하여 탄성지반위에 놓인 원호형 곡선보의 고유진동수에 대한 엄밀해를 산출하였다. 그러나 이 논문에서는 자유-자유의 단부조건만을 고려하였으며, 여러가지 제변수 변화에 따른 해석결과가 제시되지 않았다. 또한 Issa⁽¹⁷⁾는 원호형 곡선부재의 동적강성행렬을 유도하여 Winkler형 지반위에 놓인 연속곡선보의 고유진동수를 산출하였다.

자연계의 지반이나 기타 구조물과 접하는 면은 성질이 다양하고 복잡하여 수학적으로 모형화하기 어려워 지반과 구조물의 상호거동을 정확하게 규명하는 것은 어려운 문제이다. 이러한 문제를 해결하기 위한 시도로서 Winkler, Hentenyi, Pasternak, Filonenko-Borodich, Valsov, Kerr 등은 여러가지 수학적 모형을 제시하였으나, 이들 모형 중 공학에서 가장 일반적으로 사용되는 것은 Winkler가 제안한 지반모형이다⁽¹⁸⁾. Winkler모형은 무한개의 독립적인 스프링으로 지반을 표현한 가장 간단한 지반모형이지만, 비교적 이론전개가 용이하기 때문에 많은 연구에 이용되고 있다.

본 연구에서는 Winkler형 지반위에 놓인 수평 곡선보의 자유진동 특성을 규명하는데 연구목적이 있다. 이를 위하여 진동시 곡선보 미소요소에 작용하는 합응력, 관성력 및 지반반력의 동적평형방정식을 이용하여 Winkler형 지반위에 놓인 원호형 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 해석예에서는 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정의 단부조건을 택하여 유도된 지배방정식을 수치해석하였으며, 곡선보의 수평높이, 지반계수 및 접촉면의 폭비 변화에 따른 고유진동수 변화를 고찰하였다.

2. 수학적 모형

Fig. 1(a)는 탄성지반위에 놓인 지간길이 l 인 원호형 수평 곡선보의 기하학적 형상과 진동형의 예를 나타낸 것이다. 이 그림에서 (x, y) 는 곡률중심이 O 인 곡선보가 정의되는 직교좌표계, h , a 및 α 는 각각 곡선보의 수평높이, 곡률반경과 중심각이며, θ 와 θ_L 은 각각 곡선보축상 임의점 및 좌단에서 x 축과 곡률중심방향이 이루는 각도이다. 그리고 v , Ψ 및 ϕ 는 각각 곡선보축상 임

의점에서의 수직방향변위, 단면회전각 및 비틀림 각이며, R_f 와 R_t 는 지반반력 성분으로서 각각 단위길이당 수직반력과 회전반력이다.

Fig. 1(b)는 진동시 곡선보 미소요소에 작용하는 힘들을 나타낸 것으로 M , T 및 Q 는 각각 휨모멘트, 비틀림모멘트와 전단력이고, F_v 는 단위 길이당 수직방향 관성력이다. 곡선보 미소요소에 작용하는 이들 합응력과 관성력 및 반력들의 동적평형방정식을 세우면 다음 식 (1)~(3)을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{a} \frac{dQ}{d\theta} - F_v - R_f = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{a} \frac{dM}{d\theta} - Q + \frac{T}{a} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{M}{a} - \frac{1}{a} \frac{dT}{d\theta} + R_t = 0 \tag{3}$$

휨모멘트와 비틀림모멘트를 단면회전각 Ψ 와 비틀림각 ϕ 의 항으로 나타내면 다음 식 (4) 및 (5)와 같다⁽¹³⁾.

$$M = EIa^{-1}(\phi - \Psi) \tag{4}$$

$$T = GJa^{-1}(\Psi + \phi') \tag{5}$$

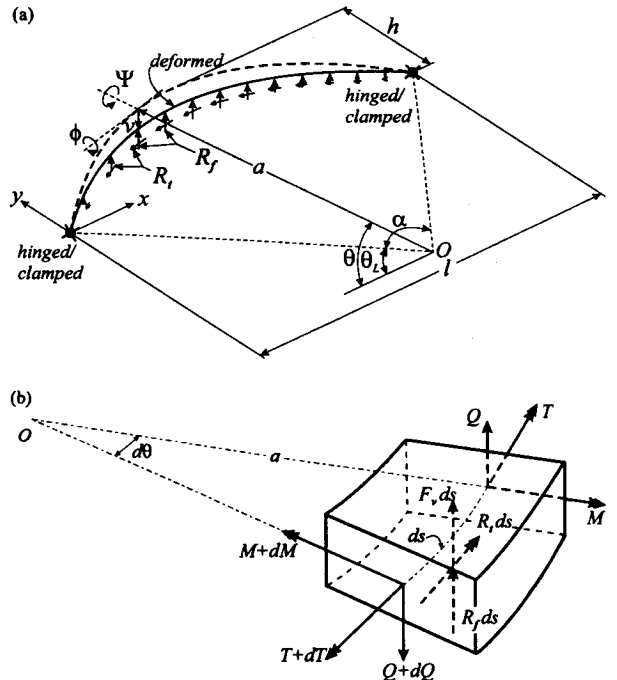


Fig. 1 (a) Geometry and mode shape of horizontally curved beam on an elastic foundation; (b) Loads on a beam element

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{m/EI}, \quad i=1,2,3, \dots \quad (24)$$

식 (19)의 f 는 수평높이 지간길이비(horizontal rise to span length ratio), 식 (21)의 ϵ 은 강성 계수(stiffness parameter), 식 (22)와 (23)의 λ 와 β 는 각각 지반계수(foundation parameter)와 접촉면의 폭비(width ratio of contact area), 식 (24)의 C_i 는 무차원 고유진동수(frequency parameter)이다.

Fig. 1(a)에 보인 바와 같이 (x, y) 좌표계 위에 좌단을 원점으로 하는 원호형 곡선보가 정의된 경우 이의 무차원 선형식은 다음 식 (25)와 같다. 그리고 부재축상 임의점의 위치를 나타내는 θ , 무차원 곡률반경 ρ 및 곡선보의 중심각 α 는 식 (26)~(28)과 같다⁽¹⁹⁾.

$$\delta = \rho \sin \theta + f - \rho, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (25)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{1-2\xi}{2\rho} \right) \quad (26)$$

$$\rho = \frac{4f^2+1}{8f} \quad (27)$$

$$\alpha = 2 \tan^{-1} \left(\frac{4f}{1-4f^2} \right) \quad (28)$$

식 (15), (12) 및 (10)을 식 (1)에 대입하여 무차원 변수들로 정리하고, 식 (27)의 무차원 곡률반경을 대입하면 다음 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\Psi''' = \epsilon \Psi' + (1+\epsilon) \phi'' + \frac{(4f^2+1)^3}{512f^3} (C_i^2 - \pi^4 \lambda \beta) \eta \quad (29)$$

식 (4), (14), (11)을 식 (3)에 대입하여 무차원 변수들을 이용하여 정리하고, 식 (27)의 무차원 곡률반경을 대입하면 다음 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\phi'' = \left[1 + \frac{\pi^4 \lambda b^3 (4f^2+1)^2}{768f^2} \right] \times \epsilon^{-1} \phi - (1+\epsilon^{-1}) \Psi' \quad (30)$$

마지막으로 식 (6)으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\eta' = \frac{4f^2+1}{8f} \Psi \quad (31)$$

이상에서 식 (29)~(31)은 Winkler형 지반위에 놓인 원호형 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는

미분방정식이며, 이 식에 $\lambda=0$ 을 대입하면 참고 문헌(20)의 지배방정식으로 변환된다.

곡선보 양단의 단부조건에 대한 경계조건식은 다음과 같다. 먼저 회전단($\theta=\theta_L$ 또는 $\theta=\alpha+\theta_L$)에서는 수직방향변위, 식 (4)의 휨모멘트 및 비틀림각이 "0"이므로 경계조건식은 다음과 같다.

$$\eta=0, \quad \Psi'=0, \quad \phi=0 \quad (32\sim34)$$

고정단($\theta=\theta_L$ 또는 $\theta=\alpha+\theta_L$)에서는 수직방향변위, 단면회전각 및 비틀림각이 "0"이므로 경계조건식은 다음과 같다.

$$\eta=0, \quad \Psi=0, \quad \phi=0 \quad (35\sim37)$$

3. 해석방법 및 결과 고찰

본 연구에서는 참고문헌(19)에서와 동일한 수치해석방법을 이용하여 식 (29)~(31)의 지배미분방정식을 해석하였으며, 이를 개략적으로 설명하면 다음과 같다. 지배미분방정식에 포함된 미지의 고유치 C_i 값을 가정하여 대입하고, 좌단의 경계조건을 이용하여 수치적분을 시행한다. 수치적분결과 곡선보축상 모든 점에서 Ψ , Ψ' , Ψ'' , ϕ , ϕ' , η 가 결정된다. 본 연구에서 미분방정식의 수치적분은 정도가 매우 높아 공학문제 등에서 많이 사용되는 Runge-Kutta method⁽²¹⁾를 이용하였다. 앞서 가정한 C_i 값이 대상구조에 대한 고유치인지는 수치적분결과 얻어진 우단에서의 결과들이 식 (32)~(34) 또는 식 (35)~(37)의 경계조건을 만족하는지 여부로서 판단하였다. 이 과정에서 행렬값탐사법을 이용하였으며, 행렬값탐사법을 적용하는 과정에서 참고유치 C_i 값을 찾기 위해서는 Regula-Falsi method(21)를 이용하였다.

본 연구에서 얻어진 해석결과를 검증하기 위하여 유한요소법을 적용하여 작성된 범용프로그램 ADINA의 결과와 Table 1에 비교하였다. 여기서 본 연구결과와 ADINA의 결과는 매우 우수하게 근접함을 알 수 있어 본 연구결과의 타당성을 검증할 수 있다.

곡선보의 수평높이 지간길이비 $f \rightarrow 0$ 인 경우 해석결과는 대응되는 단부조건과 제원을 갖는 직선보에 대한 결과로 수렴해야만 한다. Table 2는 이러한 직선보로의 수렴과정을 나타낸 것으로 $f \rightarrow 0$

인 경우 본 연구결과는 참고문헌(5)의 직선보에 대한 무차원 고유진동수로 정확히 수렴함을 알 수 있다.

Figs. 3~5는 곡선보의 수평높이 지간길이비 f 와 C_i/C_{bi} 의 관계를 나타낸 것이다. 여기서 C_i 는 곡선보의 무차원 고유진동수이며, C_{bi} 는 대응되는 제원을 갖는 직선보의 무차원 고유진동수로서 다음과 같다.

Table 1 Comparison of results between this study and finite element method (ADINA)

Geometry*	i	Frequency parameter, C_i	
		This study	ADINA
Hinged-hinged, $f=0.1$, $\lambda=5, \beta=0.02$	1	9.096	9.094
	2	36.76	36.69
	3	83.52	83.63
Hinged-clamped, $f=0.3$, $\lambda=2, \beta=0.04$	1	8.263	8.260
	2	29.86	29.91
	3	65.62	65.69
Clamped-clamped, $f=0.15$, $\lambda=7, \beta=0.06$	1	20.13	20.11
	2	54.11	54.21
	3	106.6	107.0

* $\epsilon = 1.146$

Table 2 Convergence to the frequencies C_i for lateral vibration of beams ($\epsilon = 1.146$)

Geometry	f	Frequency parameter, C_i		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
Hinged-hinged, $\lambda=5$, $\beta=0.1$	0.100	11.03	37.29	83.75
	0.050	11.80	39.36	87.71
	0.010	12.08	40.06	89.04
	0.005	12.08	40.08	89.09
	0.000*	12.09	40.09	89.10
Hinged-clamped, $\lambda=10$, $\beta=0.05$	0.100	15.67	47.22	98.43
	0.050	16.59	49.61	102.9
	0.010	16.91	50.42	104.4
	0.005	16.92	50.44	104.5
	0.000*	16.92	50.45	104.5
Clamped-clamped, $\lambda=25$, $\beta=0.02$	0.100	21.93	58.33	114.3
	0.050	23.04	61.09	119.3
	0.010	23.42	62.01	121.0
	0.005	23.43	62.06	121.1
	0.000*	23.44	62.07	121.1

* Results obtained in Ref. (5).

$\lambda=0$ 인 경우

회전-회전 : $C_{bi} = 9.870, 39.48, 88.83$

회전-고정 : $C_{bi} = 15.41, 49.96, 104.2$

고정-고정 : $C_{bi} = 22.37, 61.67, 120.9$

$\lambda=2$ 인 경우

회전-회전 : $C_{bi} = 10.35, 39.60, 88.88$

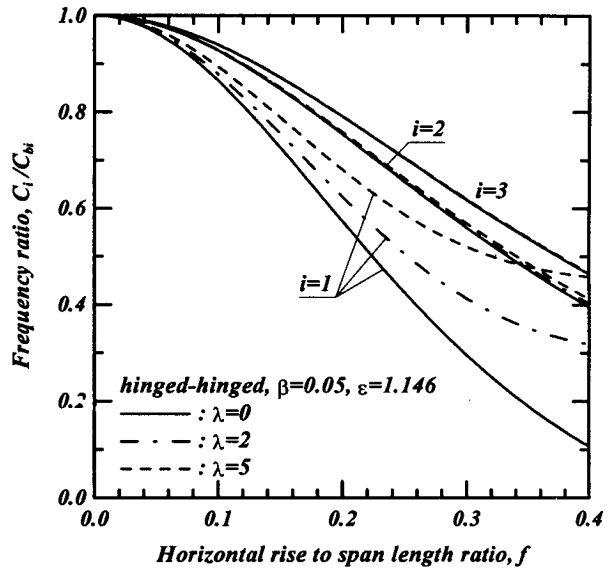


Fig. 3 Variation of C_i/C_{bi} with f (hinged-hinged)

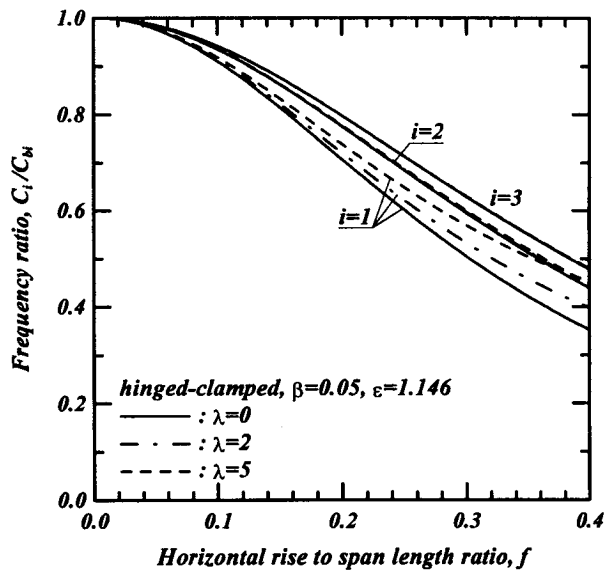


Fig. 4 Variation of C_i/C_{bi} with f (hinged-clamped)

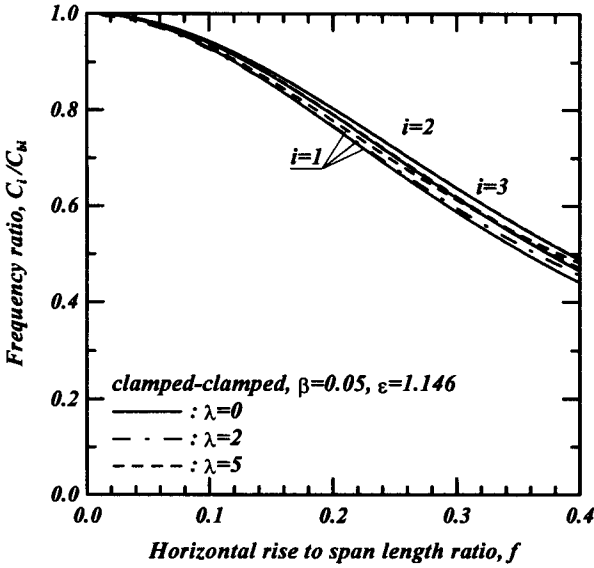


Fig. 5 Variation of C_i/C_{bi} with f (clamped-clamped)

회전-고정 : $C_{bi} = 15.72, 50.05, 104.3$

고정-고정 : $C_{bi} = 22.66, 61.69, 120.9$

$\lambda=5$ 인 경우

회전-회전 : $C_{bi} = 11.03, 39.78, 88.96$

회전-고정 : $C_{bi} = 16.18, 50.19, 104.3$

고정-고정 : $C_{bi} = 22.89, 61.82, 120.9$

이 그림들에서 f 가 "0"보다 큰 경우 C_i/C_{bi} 는 항상 "1"보다 작고, f 가 증가함에 따라 C_i/C_{bi} 는 감소하여 곡선보의 무차원 고유진동수는 동일한 제원을 갖는 직선보보다 작음을 알 수 있다. 그리고 저차모드일수록 C_i/C_{bi} 가 작아 수평높이 지간 길이비 f 는 저차모드에 더 큰 영향을 미침을 알 수 있다. 또한 지반계수 λ 가 클수록 C_i/C_{bi} 가 크을 알 수 있다.

Figs. 6~8은 지반계수 λ 와 C_i/C_{oi} 의 관계를 나타낸 것이다. 여기서 C_{oi} 는 $\lambda=0$ 즉 탄성지반의 영향을 무시한 경우 대응되는 제원을 갖는 곡선보의 무차원 고유진동수로서 다음과 같다.

$f=0.1$ 인 경우

회전-회전 : $C_{oi} = 8.543, 36.63, 83.46$

회전-고정 : $C_{oi} = 14.03, 46.70, 98.18$

고정-고정 : $C_{oi} = 20.79, 57.91, 114.1$

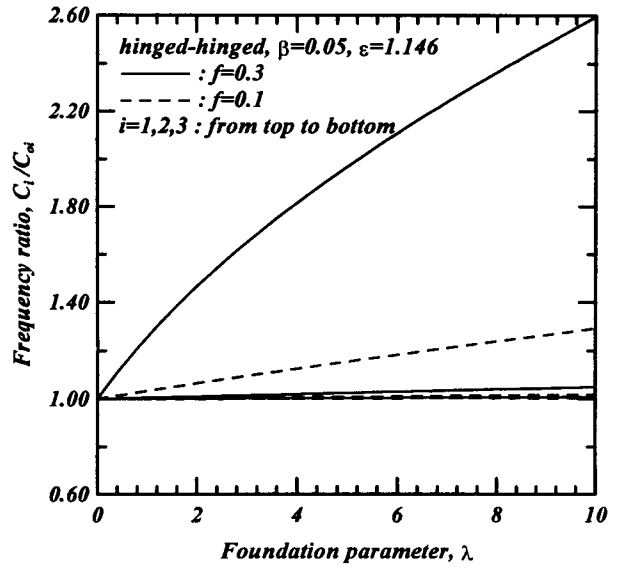


Fig. 6 Variation of C_i/C_{oi} with λ (hinged-hinged)

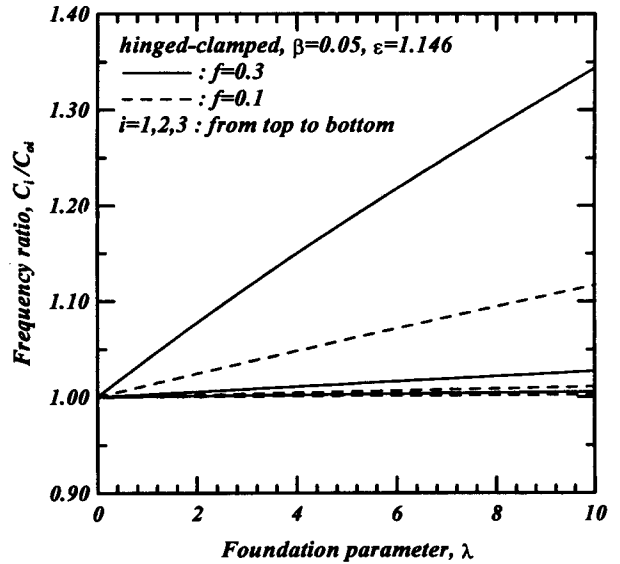


Fig. 7 Variation of C_i/C_{oi} with λ (hinged-clamped)

$f=0.3$ 인 경우

회전-회전 : $C_{oi} = 2.913, 22.08, 54.84$

회전-고정 : $C_{oi} = 7.777, 29.73, 65.56$

고정-고정 : $C_{oi} = 13.14, 38.01, 77.04$

이 그림들에서 지반계수 λ 가 증가하는 경우 C_i/C_{oi} 는 항상 증가하여 λ 는 고유진동수를 증가시키는 요인임을 알 수 있으며, 고차모드보다는

저차모드에서 영향이 큼을 알 수 있다. 또한 수평 높이가 지간길이비 f 가 클수록 λ 가 고유진동수에 미치는 영향이 두드러짐을 알 수 있다.

Figs. 9~11은 곡선보와 지반 접촉면의 폭비 β 의 변화에 따른 고유진동수비 C_i/C_{oi} 의 변화를 나타낸 것이다. 여기서 C_{oi} 는 $\beta=0$ 즉 탄성지반의 영향을 무시한 경우 대응되는 제원을 갖는 곡선보의 무차원 고유진동수로서 앞서 Figs. 6~8의

설명에 수록한 결과와 같다.

이 그림들에서 접촉면의 폭비 β 가 증가하는 경우 C_i/C_{oi} 는 항상 증가함을 알 수 있다. 또한 저차모드일수록 접촉면의 폭비 β 가 고유진동수에 미치는 영향이 크고, 무차원 수평높이가 f 가 클수록 접촉면의 폭비 β 가 고유진동수에 미치는 영향이 큼을 알 수 있다.

이상의 Figs. 3~11에서 단부조건에 따른 곡선

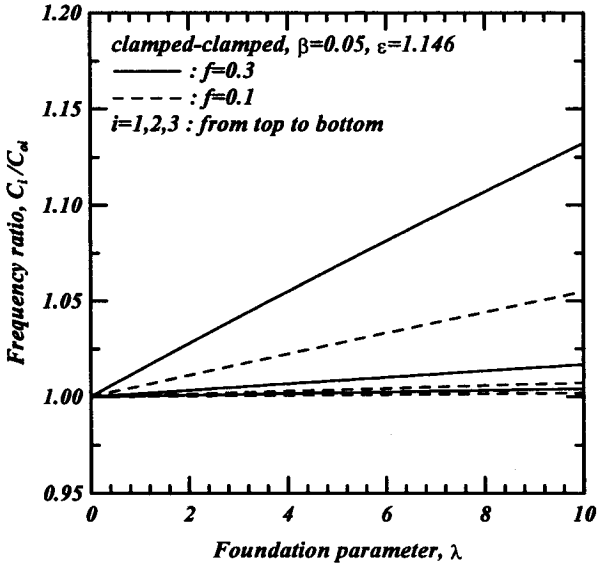


Fig. 8 Variation of C_i/C_{oi} with λ (clamped-clamped)

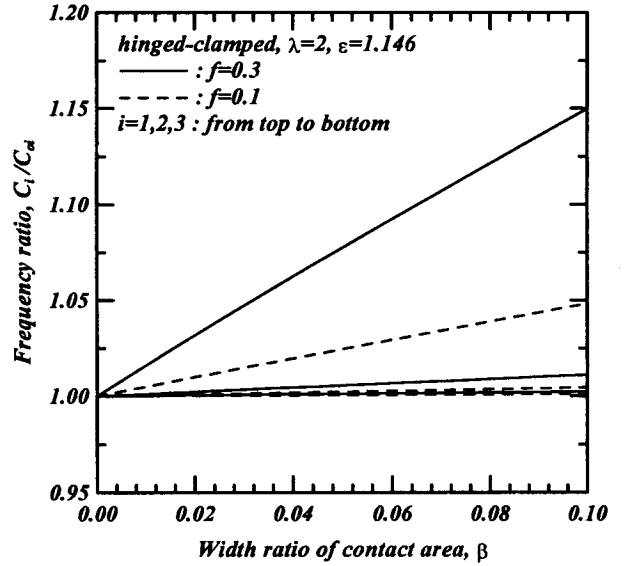


Fig. 10 Variation of C_i/C_{oi} with β (hinged-clamped)

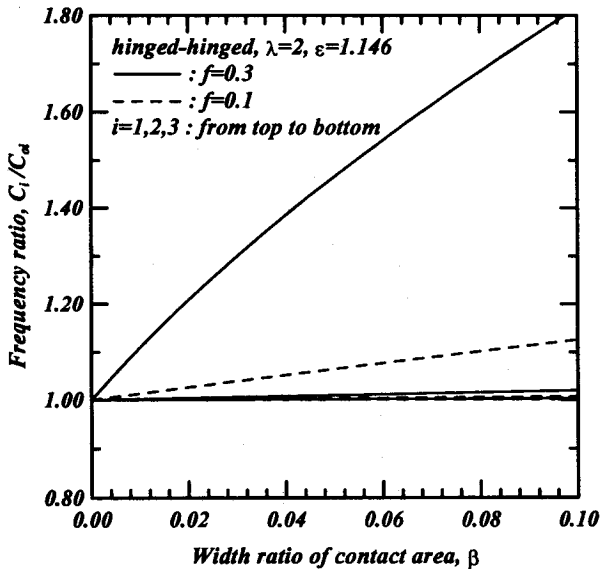


Fig. 9 Variation of C_i/C_{oi} with β (hinged-hinged)

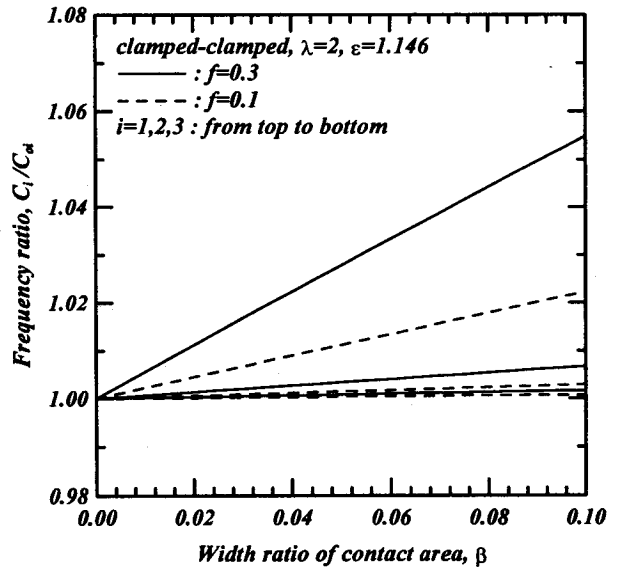


Fig. 11 Variation of C_i/C_{oi} with β (clamped-clamped)

보의 수평높이 지간길이비 f , 지반계수 λ 및 접촉면의 폭비 β 의 영향은 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정의 단부조건순으로 영향이 큼을 알 수 있다.

4. 요약 및 결론

이 논문에서는 Bernoulli-Euler 보이론을 적용하여 Winkler형 지반위에 놓인 원호형 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 유도된 방정식을 수치해석하여 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정 보의 고유진동수를 산출하였다. 수치해석결과로서 곡선보의 수평높이 지간길이비, 지반계수 및 접촉면의 폭비에 따른 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

해석결과로부터 수평높이 지간길이비가 증가할수록 고유진동수는 감소하고, 지반계수와 접촉면의 폭비가 증가할수록 고유진동수는 증가함을 알 수 있었으며, 이들 효과는 저차모드일수록 두드러짐을 알 수 있었다.

후 기

이 논문은 한국과학재단 지원 국내 박사후 연수과정 중(1997년)에 수행된 연구결과의 일부로서 제 1 저자는 연수비를 지원해 준 재단당국에 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Pavlovic, M.V. and Wylie, G.B., 1983, "Vibration of Beams on Non-Homogeneous Elastic Foundations," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, pp. 797~808.
- (2) Valsangkar, A.J. and Pradhanang, R.B., 1987, "Free Vibration of Partially Supported Piles," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 113, pp. 1244~1247.
- (3) Williams, F.W. and Kennedy, D., 1987, "Exact Dynamic Member Stiffnesses for a Beam on an Elastic Foundation," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 15, pp. 133~136.
- (4) Kukla, S., 1991, "Free Vibration of a Beam Support on a Stepped Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 149, pp. 259~265.
- (5) 이병구, 1994, "진단층을 갖는 탄성지반위에 놓인 보의 자유진동 해석," *한국강구조학회 논문집*, 제 6 권 제 3 호, pp. 107~115.
- (6) Yokoyama, T., 1996, "Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations," *Computers & Structures*, Vol. 61, pp. 995~1007.
- (7) Salari, M., Bert, C.W. and Striz, A.G., 1987, "Free Vibrations of a Solid Circular Plate Free at its Edge and Attached to a Winkler Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 118, pp. 188~191.
- (8) Kennedy, D. and Williams, F.W., 1990, "Vibration and Buckling of Anisotropic Plate Assemblies with Winkler Foundations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 138, pp. 501~510.
- (9) Gupta, U.S., Lal, R. and Jain, S.K., 1991, "Buckling and Vibrations of Polar Orthotropic Circular Plates of Linearly Varying Thickness Resting on an Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 147, pp. 423~434.
- (10) Laura, P.A.A., Gutierrez, R.H., Carnicer, R. and Sanzi, H.C., 1991, "Free Vibrations of a Solid Circular Plate of Linearly Varying Thickness and Attached to a Winkler Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 144, pp. 149~161.
- (11) Volterra, E., 1952, "Bending of Circular Beam Resting on an Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 19, pp. 1~4.
- (12) Volterra, E., 1953, "Deflection of Circular Beams Resting on an Elastic Foundation obtained by the Method of Harmonic Analysis," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 20, pp. 227~237.
- (13) Volterra, E. and Gains, J.H., 1971, *Advanced Strength of Materials*, Prentice-Hall.

- (14) Panayotounakos, D.E. and Theocaris, P.S., 1979, "Circular Beam on Elastic Foundation," *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 105, pp. 839~853.
- (15) Laura, P.A.A. and Maurizi, M.J., 1987, "Recent Research on Vibrations of Arch-Type Structures," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 19, pp. 6~9.
- (16) Panayotounakos, D.E. and Theocaris, P.S., 1980, "The Dynamically Loaded Circular Beam on an Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 47, pp. 139~144.
- (17) Issa, M.S., 1988, "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 127, pp. 291~301.
- (18) Selvadurai, A.P.S., 1979, *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier.
- (19) 이병구, 오상진, 모정만, 김현상, 1993, "불연속 변화단면 아치의 자유진동 해석," *한국소음진동 공학회 논문집*, 제 3 권 제 4 호, pp. 331~339.
- (20) Wang, T.M., Nettleton, R.H. and Keita, B., 1980, "Natural Frequencies for Out-of-Plane Vibrations of Continuous Curved Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 68, pp. 427~436.
- (21) Mathews, J.H., 1987, *Numerical Methods*, Prentice-Hall.