

## 비비례 감쇠 시스템의 고유치 해석을 위한 Lanczos 방법의 개선

### Improvement of Lanczos Method for Solution of Eigenproblems of Non-Proportional Damping Systems

김만철\* · 정형조\* · 박선규\*\* · 이인원\*\*\*

Kim, Man Cheol · Jung Hyung Jo · Park, Sun Kyu · Lee, In Won

---

#### Abstract

A solution method is presented to solve the eigenproblem arising in the dynamic analysis of non-proportional damping systems with symmetric matrices. The method is based on the use of Lanczos method to generate a Krylov subspace of trial vectors, which is then used to reduce a large eigenvalue problem to a much smaller one. The method retains the  $n$  order quadratic eigenproblem, without the need to use the method of matrix augmentation traditionally used to cast the problem as a linear eigenproblem of order  $2n$ . In the process, the method preserves the sparseness and symmetry of the system matrices and does not invoke complex arithmetics, therefore, making it very economical for use in solving large problems. Numerical results are presented to demonstrate the efficiency and accuracy of the method.

**Keywords** : *eigenanalysis, non-proportional damping system, krylov sequence, Lanczos recursion*

---

#### 요 지

본 논문에서는 시스템 행렬이 대칭인 비비례 감쇠 시스템의 고유치 문제를 효율적으로 해석하는 방법을 제안하였다. 제안방법은 Krylov 부분공간에서 벡터들을 생성하고 이들 벡터들을 이용하여 차수가 큰 고유치 문제를 보다 작은 차수를 갖는 고유치 문제로 변환하는 Lanczos 방법을 기초로

---

\* 정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 박사과정  
\*\* 정회원 · 성균관대학교 토목공학과 조교수  
\*\*\* 정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 교수

하고 있다. 제안방법은 차수를  $2n$ 으로 선형 증분하는 일반적인 기존 고유치 해법과는 달리 차수  $n$ 인 상태를 그대로 유지한다. 또한 제안방법은 해석과정에서 시스템 행렬들의 분산성과 대칭성을 유지하며, 복소연산을 필요로 하지 않기 때문에 구조물이 대형화 될 수록 효율적이다. 제안방법의 효율성과 정확성을 증명하기 위하여 수치해석을 수행하였다.

**핵심용어** : 고유치해석, 비비례 감쇠 시스템, Krylov sequence, Lanczos 순환

## 1. 서 론

구조물의 동적 거동을 모드중첩법으로 해석하거나, 동조 진동수를 구하기 위해서는 고유치 문제의 해석을 선행해야 한다. 지금까지 대부분의 구조 모델에서는 감쇠 효과를 구조물의 지배방정식에 정확히 묘사할 수 없었기 때문에 비례 감쇠 (proportional damping) 또는 모드 감쇠 (modal damping)로 이의 효과를 고려하였다. 이것은 구조물의 감쇠를 감쇠 시스템의 진동 모드와 비감쇠 시스템의 진동 모드가 같은 것으로 고려하는 것이다. 구조물이 비례 감쇠인 경우 구조물의 지배방정식을 독립된 모드 방정식의 집합으로 변환하기 위해 사용하는 실수의 진동 모드와 진동수는 직접적이고 간단한 방법(Bathe, 1982; Hughes, 1987)으로 구할 수 있다.

그러나 대부분의 실제 구조계들은 모드 방정식이 결합(coupling)을 이루는 비비례 감쇠 (non-proportional damping) 시스템이다 (Caughey 등, 1965). 지반-구조물 상호작용 시스템(soil-structure interaction system)이나 여러가지 재료로 이루어진 구조물, 감쇠기에 의한 제진시스템들이 그 대표적 예이다. 이들 구조물들은 일반적으로 비례 감쇠를 갖는 부분구조로 모델링하고 이를 전체 시스템으로 조합하여 해석하는데 전체 구조계로 조합된 감쇠 행렬은 결합의 효과가 큰 비모드 행렬이 된다. 따라서 위의 구조물들의 정확한 동적 해석을 위해서는 비비례 감쇠의 영향을 고려하는 2차 고유치 문제(quadratic eigen problem)를 해석해야 한다. 이러한 비비례 감쇠 시스템에 대한 고유치와

고유벡터는 감쇠의 정도에 따라 일반적으로 공액 복소수 짝(complex conjugate pair) 또는 실수 짝(real pair)으로 존재한다. 즉, 비례 감쇠 시스템과는 달리 복소영역에서 해석해야 하기 때문에 2차 고유치 문제에 대한 효율적인 해법의 개발은 매우 중요하다.

본 논문에서는 Rajakumar(1993)가 제안한 비대칭 행렬에 대한 two-sided Lanczos 방법을 변형하여 대칭 행렬을 갖는 비비례 감쇠 시스템의 2차 고유치 문제를 차수  $n$ 에서 직접 해석할 수 있는 one-sided Lanczos 방법을 제안하였다. 본 논문에서 제안한 Lanczos 알고리즘은 실수 영역(real domain)에서 모든 Lanczos 벡터를 구할 수 있다. 제안방법의 기본개념을 2장에서 서술하였고, 3장에서는 제안방법의 효율성을 여러가지 예제 구조물에 대해 검증하였다.

## 2. One-sided Lanczos 알고리즘

### 2.1 Problem Definition

동하중을 받는 시스템의 동적 거동이나 동특성을 해석하기 위한 비비례 감쇠 시스템의 2차 고유치 문제는 다음과 같다.

$$\lambda_j^2 M \phi_j + \lambda_j C \phi_j + K \phi_j = 0 \quad (1)$$

여기서  $M$ ,  $C$ 와  $K$ 는 차수가  $n$ 이고 대칭인 질량, 감쇠 및 강성 행렬이다. 일반적으로  $M$ 은 양에 반한정 행렬(positive semi-definite

matrix)이고  $K$ 은 양에 한정 행렬(positive definite matrix)이다.  $C$ 는 다음과 같은 조건을 만족하는 비비례 감쇠 행렬이다.

$$CM^{-1}K \neq KM^{-1}C \quad (2)$$

식(1)에서  $\lambda_j$ 는 시스템의  $j$ 번째 고유치(eigenvalue)이고  $\phi_j$ 는 이에 대응하는 고유벡터(eigenvector)이다. 이들  $\lambda_j$ 와  $\phi_j$ 는 감쇠의 정도에 따라 복소값 또는 실수값을 갖는다.  $\phi_j$ 는 다음과 같은 직교성(orthogonality)을 만족한다.

$$\phi_j^T M \phi_i + \tilde{\phi}_j^T M \phi_i + \phi_j^T C \phi_i = \delta_{ij} \quad (3)$$

$$\text{여기서 } \tilde{\phi}_j = \lambda_j \phi_j \quad (4)$$

이다.  $\phi_j$ 와  $\tilde{\phi}_j$ 는 각각 독립(independent)·종속(dependent) 고유벡터이다.  $\delta_{ij}$ 는  $i \neq j$ 면 0이고  $i = j$ 면 1의 값을 갖는다. 식(3)을 행렬식으로 쓰면 다음과 같다.

$$\Phi^T M \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^T M \Phi + \Phi^T C \Phi = I_n \quad (5)$$

## 2.2 Proposed Lanczos Algorithm

초기 벡터부터  $m$ 개의 독립 Lanczos 벡터들  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 과 종속 Lanczos 벡터들  $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ 을 구하였고,  $m+1$ 번째의 독립·종속 Lanczos 벡터를 구한다고 가정하자. 이들 Lanczos 벡터들은 식(6)과 같은 직교성을 만족한다.

$$\begin{aligned} v_i^T M p_j + p_i^T M v_j + v_i^T C v_j &= 0 \\ \text{for } i \neq j, \quad i, j &= 1, \dots, m+1 \end{aligned} \quad (6-a)$$

$$v_i^T M p_j + p_i^T M v_j + v_i^T C v_j = \delta_i$$

$$\text{for } i = j, \quad i, j = 1, \dots, m+1 \quad (6-b)$$

여기서  $\delta_i$ 는  $i$ 번째 독립·종속 Lanczos 벡터의 의사 길이(pseudo length)로 1 또는 -1의 값을 갖는다. 실수 영역에서 Lanczos 벡터들을 구하기 위해 1 또는 -1로 정규화하였다.  $\delta_i$ 에 대한 자세한 정의는 식(24)에서 살펴볼 수 있다. 독립 Lanczos 벡터  $v_{m+1}$ 과 종속 Lanczos 벡터  $p_{m+1}$ 를 얻기 위해서 다음과 같이  $\hat{v}_{m+1}$ 와  $\hat{p}_{m+1}$ 를 계산한다.

$$\hat{v}_{m+1} = -K^{-1}(Cv_m + Mp_m) \quad (7)$$

$$\hat{p}_{m+1} = v_m \quad (8)$$

일반적으로 이들 벡터들은 기존 모든 Lanczos 벡터들과  $m+1$ 번째 독립·종속 Lanczos 벡터의 성분만을 가지고 있는 벡터의 선형조합으로 표현할 수 있다.

$$\hat{v}_{m+1} = \bar{v}_{m+1} + \alpha_m v_m + \beta_m v_{m-1} + \epsilon_m v_{m-2} + \dots \quad (9)$$

$$\hat{p}_{m+1} = \bar{p}_{m+1} + \alpha_m p_m + \beta_m p_{m-1} + \epsilon_m p_{m-2} + \dots \quad (10)$$

$$\text{여기서 } \bar{v}_{m+1} = \gamma_{m+1} v_{m+1} \quad (11)$$

$$\bar{p}_{m+1} = \gamma_{m+1} p_{m+1} \quad (12)$$

즉,  $\bar{v}_{m+1}$ 와  $\bar{p}_{m+1}$ 는 각각  $m+1$ 번째 독립·종속 Lanczos 벡터의 성분만을 가지고 있는 벡터들이고 계수  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$ 와  $\epsilon_m$  등은  $\hat{v}_{m+1}$ 와  $\hat{p}_{m+1}$ 의 기존 Lanczos 벡터 방향에 대한 성분의 크기를 의미한다. 계수  $\gamma_{m+1}$ 은

식(6-b)와 같이  $\bar{v}_{m+1}$  와  $\bar{p}_{m+1}$  을 1 또는 -1로 정규화 하기 위한 계수이다. 이들 계수들은 독립·중속 Lanczos 벡터사이의 직교성을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

### 2.2.1 Coefficient $\alpha_m$

계수  $\alpha_m$ 를 구하기 위해서 식(9)과 (10)에 각각  $(p_m^T M + v_m^T C)$ 과  $v_m^T M$ 를 전-곱을 하고 두 결과식을 더한다. 그리고 독립·중속 Lanczos 벡터들 사이의 직교성에 관한 식(6)을 이용하면 다음과 같은 결과식을 얻을 수 있다.

$$\alpha_m = (v_m^T M \hat{p}_{m+1} + p_m^T M \hat{v}_{m+1} + v_m^T C \hat{v}_{m+1}) \delta_m \quad (13)$$

$$\delta_m = (v_m^T M p_m + p_m^T M v_m + v_m^T C v_m) \quad (14)$$

여기서  $\delta_m$ 는 1 또는 -1의 값을 갖는다. 식(13)의  $\hat{v}_{m+1}$  과  $\hat{p}_{m+1}$  에 대해 식(7)과 (8)를 대입하고 정리하면  $\alpha_m$ 에 관한 식은 다음과 같다.

$$\alpha_m = [- (p_m^T M + v_m^T C) K^{-1} (C v_m + M p_m) + v_m^T M v_m] \delta_m \quad (15)$$

### 2.2.2 Coefficient $\beta_m$ and $\gamma_{m+1}$

계수  $\beta_m$ 를 계산하기 위해서 식(9)과 (10)에 각각  $(p_{m-1}^T M + v_{m-1}^T C)$ 와  $v_{m-1}^T M$ 를 전-곱을 하고 두 결과식을 더한다. 결과식에 직교조건 식(6)을 적용하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\beta_m = (v_{m-1}^T M \hat{p}_{m+1} + p_{m-1}^T M \hat{v}_{m+1} + v_{m-1}^T C \hat{v}_{m+1}) \delta_{m-1} \quad (16)$$

식(16)의  $\hat{v}_{m+1}$  과  $\hat{p}_{m+1}$  에 대해 식(7)과 (8)

를 대입하면  $\beta_m$ 은 다음과 같다.

$$\beta_m = [- (p_{m-1}^T M + v_{m-1}^T C) K^{-1} (C v_m + M p_m) + v_{m-1}^T M v_m] \delta_{m-1} \quad (17)$$

$-K^{-1}(C v_{m-1} + M p_{m-1})$  과  $v_{m-1}$  에 대한 식(7)과 (8)를 식(17)에 적용하면 식(18)를 얻을 수 있다.

$$\beta_m = [ \hat{v}_m^T M p_m + \hat{p}_m^T M v_m + \hat{v}_m^T C v_m ] \delta_{m-1} \quad (18)$$

$\hat{v}_m$  과  $\hat{p}_m$  에 관한 식(9)과 (10)을 식(18)에 대입하고, Lanczos 벡터들의 직교성을 이용하면 식(18)는 식(19)와 같이 간략화 된다.

$$\beta_m = [ \bar{v}_m^T M p_m + \bar{p}_m^T M v_m + \bar{v}_m^T C v_m ] \delta_{m-1} \quad (19)$$

식(19)를  $(m+1)$  번째 벡터에 대해서 정리하면 다음과 같다.

$$\beta_{m+1} = [ \bar{v}_{m+1}^T M p_{m+1} + \bar{p}_{m+1}^T M v_{m+1} + \bar{v}_{m+1}^T C v_{m+1} ] \delta_m \quad (20)$$

$\bar{v}_{m+1}$  과  $\bar{p}_{m+1}$  은 Lanczos 벡터들의 직교성에 관한 식(6-b)를 만족하도록 식(11)와 (12)과 같이 정규화(normalizing)되므로 이들 식들을 역-치환(back substitution)한다.

$$\Delta_{m+1} = [ \bar{v}_{m+1}^T M \bar{p}_{m+1} + \bar{p}_{m+1}^T M \bar{v}_{m+1} + \bar{v}_{m+1}^T C \bar{v}_{m+1} ] \delta_m \quad (21)$$

$$\text{여기서 } \Delta_{m+1} = \beta_{m+1} \gamma_{m+1} \quad (22)$$

이다.  $\gamma_{m+1}$  과  $\beta_{m+1}$  을 다음과 같이 설정하면 이들 계수들은 실수이고, 또한 독립·중속



차수가 감소된 고유치 문제는 QR 방법 (Moler 등, 1973)에 의하여 효율적으로 해석할 수 있다. QR 방법에 의해서 구해진 결과들은 식 (32), (33)와 (38)의 관계를 이용하여 2차 고유치 문제의 고유치와 이에 대응하는 독립·종속 고유벡터를 얻을 수 있다. 이들 독립·종속 고유벡터들은 식(3)의 직교성 조건을 만족하도록 정규화 되어야 한다. 이들 값들은 Rayleigh-Ritz 개념을 기초로 구해졌기 때문에 Ritz 치(value)와 Ritz 벡터라 하며, 실제 고유치와 고유벡터에 대한 근사값이다.  $m=2n$  ( $n$ : 시스템의 차수)이면 이들 Ritz 짝(pair)들은 실제 고유치와 고유벡터가 된다.

## 2.4 Residual vectors

$m$ 개의 독립·종속 Lanczos 벡터에 의해서 구해진 Ritz 짝들을 각각  $\lambda_j^{(m)}$ 과  $\phi_j^{(m)}$ ,  $\tilde{\phi}_j^{(m)}$ 라 하자. 이들 값들의 오차를 측정하기 위하여 다음과 같이 잉여 벡터( $r_j$ : residual vector)를 정의하자.

$$r_j = K^{-1}M\tilde{\phi}_j^{(m)} + K^{-1}C\phi_j^{(m)} + \frac{1}{\lambda_j^{(m)}}\phi_j^{(m)} \quad (39)$$

$r_j$ 은 세개의 항을 갖는 순환 방정식을 이용하여 쉽게 구할 수 있다. 식(28)의 행렬식은 식(40)과 같다.

$$\gamma_{m+1}V_{m+1}e_m^T = -K^{-1}(CV+MP) - V^T T \quad (40)$$

식(40)에서  $e_m^T = \langle 0, 0, \dots, 0, 1 \rangle$ 으로  $m$ 번째 요소만 1의 값을 갖는 열(row) 벡터이다.

식(40)에  $\phi_j$ 을 후-곱하고  $T\phi_j = \frac{1}{\lambda_j}\phi_j$ 을 이용하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$K^{-1}M\tilde{\phi}_j^{(m)} + K^{-1}C\phi_j^{(m)} + \frac{1}{\lambda_j^{(m)}}\phi_j^{(m)} = -\gamma_{m+1}v_{m+1}\phi_j^{(m)} \quad (41)$$

여기서  $\phi_j^{(m)}$ 은 벡터  $\phi_j$ 의  $m$ 번째 요소이다. 식(39)와 (41)로 부터  $r_j$ 는 다음과 같이 간단한 식으로 표현할 수 있다.

$$r_j = -\gamma_{m+1}v_{m+1}\phi_j^{(m)} \quad (42)$$

$r_j=0$ 이면 Ritz 짝들은 시스템의 고유치와 고유벡터가 되기 때문에  $r_j$ 의 요소(component)의 크기를 평가하므로써 Ritz 짝들의 오차를 측정할 수 있다. 그러나 Bathe 등(1980)은 고유치 해석을 통해서 구해진 고유치와 고유벡터를 이용하여 동적해석을 안정적으로 수행하기 위한 필요 조건으로 식(43)과 같은 오차 정규(error norm)를 제안하였고, 이 값이  $10^{-6}$  이하가 되는 고유치와 고유벡터를 정확한 고유짝이라 하였다.

$$e_j = \frac{\|(\lambda_j^{(m)2}M + \lambda_j^{(m)}C + K)\phi_j^{(m)}\|_2}{\|K\phi_j^{(m)}\|_2} < 10^{-6} \quad (43)$$

그러므로 Ritz 짝들의 오차를 측정하기 위해서는  $r_j^T r_j$  뿐만 아니라  $e_j$ 도 계산해야 한다. 본 논문의 수치해석에서는 오차에 대한 예비조사로  $r_j^T r_j$ 를, 최종적으로  $e_j$ 를 사용하여 Ritz 짝의 오차를 측정하였다.

## 2.5 Loss of orthogonality

각각 반복 단계에서 단지 2개의 기존 벡터에 대해서만 직교화 과정을 수행하는 Lanczos 알고리즘 식(28)와 (29)는 round-off에 의해서 기존 벡터들에 대해 직교성을 상실하게 된다. 즉, 이것들이 어느 정도 수준으로 교정되지 않으면 Lanczos 알고리즘에 의해 계산된 벡터들은 선형 독립관계를 유지하지 못하게 되고, 결과적으로 위의 해석으로부터 얻어진 값들은 실제 고유 값에 대해 의사 근사(spurious approximations)



eigenvalue)는 아래와 같은 관계식을 이용하여 쉽게 구할 수 있기 때문에 제안방법의 프로그램으로 부터 얻어진 해석 결과를 정확한 고유치와 비교하기 위하여 감쇠행렬을 비례감쇠(Rayleigh damping)로 가정하였다.

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{(1 - \xi_j^2)} \quad (47)$$

$$\xi_j = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_j} + \beta \omega_j \right) \quad (48)$$

$$\omega_j = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{2j-1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (49)$$

여기서  $\omega_j$ 와  $\xi_j$ 는 비감쇠 자유 진동수(natural frequency)와 모드 감쇠 비(modal damping ratio)이다.

차수가 50,  $k$ 와  $m$ 이 1이고 Rayleigh 감쇠 계수  $\alpha$ ,  $\beta$ 가 각각 0.01인 시스템을 해석에 사용하였다. 감쇠 시스템의 10, 20, ..., 100개의 독립·종속 Lanczos 벡터를 계산하기 위하여 본 논문에서 개발한 프로그램을 10번 수행하였다. 즉, 차수가 10, 20, ..., 100인 10개의 감소 고유치 문제를 구성하였고 IMSL Library의 QR 방법(Moler 등, 1973)을 이용하여 이를 해석하였다. 사용된 Lanczos 벡터의 수에 대한 오차정규  $10^{-6}$  이하를 만족하는 Ritz 짝의 수를 그림 1에 정리하였다. 그림 1에서 초기 부분의 기울기는 약 1/3이다. 즉 6개의 Lanczos 벡터를 이용하면 한쌍의 정확한 공액 복소 고유치와 고유벡터를 구할 수 있다. 이것은 저차 고유치들은 다른 고유짝에 비해 적은 노력으로도 쉽게 구할 수 있다는 것을 의미한다. 시스템 차수의 2배인 100개의 Lanczos 벡터를 사용하여 구한 결과는 위의 관계식에 의해 계산된 고유치들과 비교하였을 때 누락이나 의사 근사치 없이 모두 오차정규  $10^{-6}$ 을 만족하였다. 이는 제안

방법이 효율적이며 직교성 상실에 대해 강인성(robustness)을 가지고 있다는 것을 의미한다. 그림 2는 Lanczos 벡터의 수를 증가시켰을 때 저차 10개의 Ritz 짝의 오차정규의 변화를 나타낸 그래프이다. Lanczos 벡터가 증가함에 따라 저차 고유짝의 오차가 급격히 감소하였다. 표 1에 3가지 해법에 대한 해석시간을 비교하였다. Chen의 방법은 차수  $2n$ 으로 선형 증분해서 해석하고 Rajakumar 방법은 비록 차수  $n$ 에서 해석하지만 two-sided Lanczos 벡터를 계산하기 때문에 3가지 방법 중 제안방법의 해석시간이 가장 적게 소요되었다.

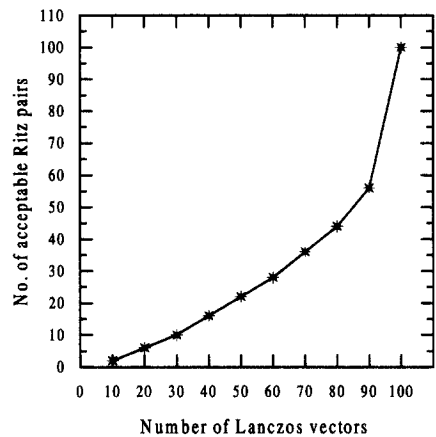


그림 1. Number of good Ritz pairs of simple system

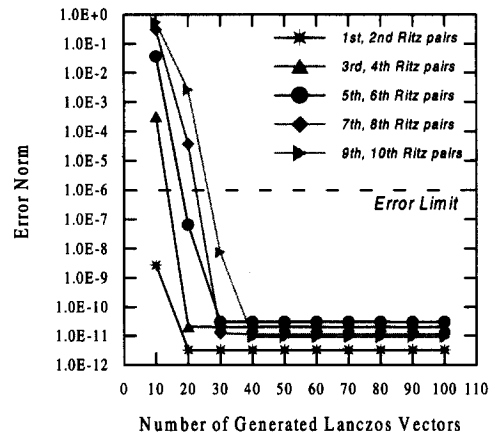


그림 2. Vibration of error norms of first ten Ritz pairs of simple system

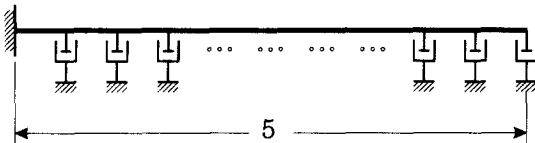


**표 2. CPU time spent in solution of simple system(in seconds)**

No. of generated Lanczos vectors	Proposed method	Chen's method	Rajakumar's method
10	0.17	1.81	0.20
20	0.44	2.44	0.60
30	0.90	3.42	1.14
40	1.52	4.42	1.91
50	2.27	5.75	2.88
60	3.16	7.41	4.01
70	4.19	9.31	5.39
80	5.73	12.23	7.40
90	6.78	13.93	8.74
100	8.31	17.11	10.65

### 3.2 Cantilever beam with lumped dampers

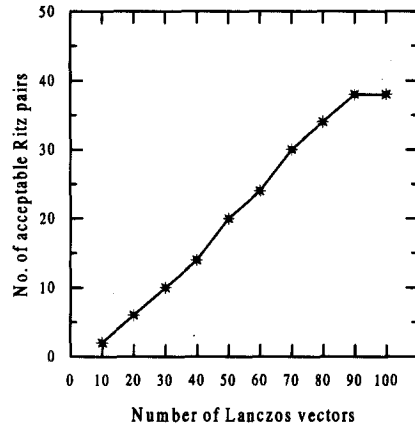
수직 방향으로 작용하는 점성 감쇠기를 가지고 있는 내민 보는 지반-구조물 상호 작용 시스템의 대표적인 예이다. 본 예제 구조물의 기하학적인 형상은 그림 3에 표시하였다. 감쇠기를 가지고 있는 내민 보는 100개의 보 요소와 200개의 자유도를 가지고 있는 시스템으로 모델링 되었다. 탄성계수  $E$ 는 1,000 이고 단위중량  $\rho$ 와 면적  $A$ , 단면 이차 모멘트  $I$ 는 각각 1의 값을 갖는다. 질량 행렬은 일관 질량 행렬(consistent mass matrix)을 사용하였다. 비비례 감쇠 행렬을 구성하기 위하여 식(46)와 같은 Rayleigh 감쇠와 0.3의 감쇠 값을 갖는 점성 감쇠기를 고려하였다. Rayleigh의 계수  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 각각 0.001 이다.



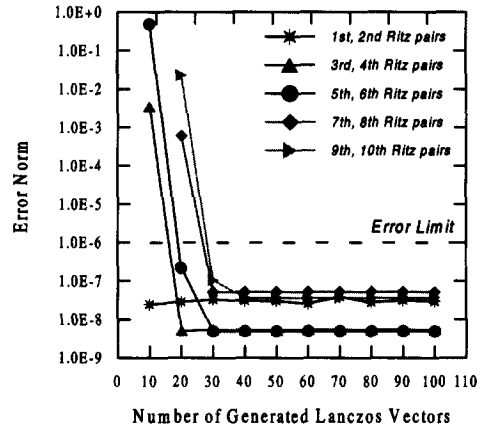
**그림 3. Cantilever beam with lumped dampers**

내민 보에 대해 독립·중속 Lanczos 벡터를 10, 20, ..., 100개 구하고, 이를 이용하여 감

소된 10개의 표준 고유치문제를 해석하였다. 그림 4는 오차정규  $10^{-6}$ 을 만족하는 Ritz 짝의 수를 정리한 것이다. 그림 5는 저차 10개 Ritz 짝의 오차정규의 변화를 Lanczos 벡터를 증가시키면서 살펴본 것이다. 10개의 Ritz 짝들의 오차정규는 30개의 Lanczos 벡터를 사용할 때 까지는 급격히 감소하지만 일정 수준 이하로는 감소하지 않는다.



**그림 4. Number of good Ritz pairs of cantilever beam**



**그림 5. Variation of error norms of first ten Ritz pairs of cantilever beam**

Table 3. CPU time spent in solution of cantilever beam(in seconds)

No. of generated Lanczos vectors	Proposed method	Chen's method	Rajakumar's method
10	0.75	7.22	1.02
20	1.98	13.25	2.71
30	3.58	20.86	4.93
40	5.83	29.26	7.79
50	8.26	37.38	11.26
60	11.36	47.87	15.82
70	14.88	56.24	20.65
80	19.41	69.43	26.84
90	23.53	49.52	33.25
100	28.59	93.49	41.16

#### 4. 결 론

시스템 행렬들이 대칭인 비비례 감쇠 시스템의 2차 고유치 문제를 해석할 수 있는 Lanczos 방법을 제안하였다. 제안방법은 2차 고유치 문제를 차수  $2n$ 으로 선형 증분하지 않고 차수  $n$ 에서 해석할 수 있는 방법이기 때문에 대형 구조물의 고유치 문제를 보다 쉽게 해석할 수 있다. 또한 알고리즘은 시스템 행렬들의 대칭성과 분산성의 장점을 취할 수 있고, 독립·중속 Lanczos 벡터를 구성하여 2차 고유치 문제를 삼대각 행렬을 갖는 표준 고유치 문제로 감소시킬 때까지 복소 연산을 필요로 하지 않는다. 이것은 제안 방법이 다른 방법에 비해 경제적이고 효율적임을 의미한다. 제안방법의 효율성을 예제 구조물의 해석을 통해 증명하였다. 제안방법은 구하고자 하는 고유값의 약 3배의 독립·중속 Lanczos 벡터를 이용하면 오차정규  $10^{-6}$ 을 만족하는 결과들을 얻을 수 있다.

#### 감사의 글

본 연구는 한국과학재단 '96 핵심전문연구 과제(961-1203-014-2) 연구비로 수행되었으며 이에 심심한 사의를 표합니다.

#### 참 고 문 헌

1. Bathe, K.J. (1982). *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N.J.
2. Bathe, K.J. and Ramaswamy, S. (1980). "An accelerated subspace iteration method." *Comput. Struct.*, Vol. 23, pp. 313-331.
3. Caughey, T.K. and O'Kelly, M.E.J. (1965). "Classical normal modes in damped linear dynamic systems." *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 32, pp. 583-588.
4. Chen, H.C. and Taylor, R.L. (1988). "Solution of eigenproblems for damped structural systems by Lanczos algorithm." *Comput. Struct.*, Vol. 30, No. 1/2, pp. 151-161.
5. Hughes, T.J.R. (1987). *The finite element method*, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N.J.
6. Matthies, H. (1985). "A subspace Lanczos method for the generalized symmetric eigenproblem." *Comput. Meth. appl. Mech. Engng.*, Vol. 21, pp. 319-325.
7. Moler, C.B. and Stewart, G.W. (1973). "An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems." *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 10, pp. 241-256.
8. Paige, C.C. (1971). "The computation of eigenvalues and eigenvectors of very large sparse matrices." Ph. D. Thesis, Univ. of London.
9. Parlett, B.N. and Scott, D. S. (1979). "The Lanczos algorithm with selective orthogonalization." *Math. Comput.*, Vol. 33, pp. 217-238.
10. Rajakumar, C. (1993). "Lanczos algorithm for the quadratic eigenvalue problem in engineering applications." *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 105, pp. 1-22.
11. Simon, H.D. (1984). "The Lanczos algorithm with partial reorthogonalization." *Math. Comput.*, Vol. 42, pp. 115-142.

(接受 : 1997. 12. 22)