

비비례 감쇠 시스템의 고유치 해석을 위한 반복법의 개선

Improvement of Iteration Method for Solution of Eigenproblems of Non-Proportional Damping Systems

김만철* · 정형조** · 박선규*** · 이인원****

Kim, Man Cheol · Jung, Hyung Jo · Park, Sun Kyu · Lee, In Won

Abstract

A solution method is presented to solve the eigenproblem arising in the dynamic analysis of non-proportional damping systems with close or multiple eigenvalues. The proposed method is obtained by applying the modified Newton-Raphson technique and the orthonormal condition of the eigenvectors to the quadratic eigenproblem. Therefore, the proposed method retains the n order quadratic eigenproblem, without employing the method of matrix augmentation traditionally used to cast the problem as a linear eigenproblem of order $2n$. Even though the starting value is close to the exact eigenvalue, the proposed method is numerically stable and converges fast; thus making it very economical for use in solving large problems. The proposed method preserves the sparseness and symmetry of the system matrices.

Keywords : Eigenanalysis, Non-proportional damping, Modified Newton-Raphson Technique

요 지

본 논문에서는 근접 또는 중복 고유치를 갖는 비비례 감쇠 시스템의 효율적인 고유치 해법을 제안하였다. 2차 고유치 문제에 수정된 Newton-Raphson 기법과 고유벡터의 직교성을 적용하여 제안방법의 알고리즘을 유도하였다. 제안방법은 차수를 $2n$ 으로 선형 증분하는 일반적인 기존 고유치 해법과는 달리 차수 n 인 상태를 그대로 유지하여 해석한다. 제안방법은 초기 값이 정확한 고유치에 근접할지라도 수치적으로 안정하고, 수렴성이 좋다. 따라서 제안방법은 구조물이 대형화될수록 효율적으로 구조물의 동특성을 구할 수 있다. 제안방법은 해석과정에서 시스템 행렬들의 분산성과 대칭성을 유지한다.

핵심용어 : 고유치해석, 비비례 감쇠, 수정된 Newton-Raphson 기법

*정회원 · 한국철도기술연구원 선임위촉연구원

**정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

***정회원 · 성균관대학교 토목공학과 조교수

****정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 교수

1. 서 론

대형 구조물의 동적 해석에서 해석 시간은 매우 중요한 인자이다. 풍하중, 파랑하중 또는 지진하중과 같은 다양한 형태의 하중을 받는 선형 시스템에 대해서는 단지 저차 모드들만이 구조물의 동적 거동에 큰 의미를 갖는다. 이러한 구조물의 동적 해석에는 모드중첩법이 직접적분법에 비해 경제적이다. 동적 해석을 모드중첩법으로 수행하기 위해서는 고유치 해석을 선행해야 한다. 지금까지는 구조물의 운동방정식에 감쇠의 효과를 정확히 묘사할 수 없었기 때문에 비례감쇠 또는 모드감쇠로 이의 효과를 고려하였다. 이것은 구조물의 감쇠를 감쇠 시스템의 진동모드와 비감쇠 시스템의 진동모드가 같은 것으로 고려하는 것이다. 즉 모드 방정식에서 감쇠행렬의 연립 효과가 아주 적다는 것은 여러 분야에서 다양한 구조물에 대해 증명되어 왔다. 그러나 핵발전소와 같은 지반-구조물 상호작용 시스템이나, 냉각 파이핑 시스템, 항공기와 같은 구조물-설비 상호작용 시스템 또는 제진 시스템인 경우에는 감쇠행렬의 연립 효과를 무시할 수 없다. 이러한 감쇠행렬을 비비례 감쇠(Caughey 등, 1965)라 한다. 따라서 감쇠행렬을 좀 더 실질적으로 구성할 수 있는 시스템에 대해 모드중첩법을 이용하여 동적 해석을 수행하기 위해서는 이의 효과를 포함한 다음과 같은 2차 고유치 문제를 해석해야 한다.

$$\lambda^2 M\phi + \lambda C\phi + K\phi = 0 \quad (1)$$

여기서 M , C 와 K 는 차수가 n 이고 대칭인 질량, 감쇠와 강성행렬이다. λ 와 ϕ 는 고유치와 고유벡터이다. 일반적으로 차수가 n 인 시스템에 대해서 $2n$ 개의 고유치가 있고, 이는 과감쇠 또는 저감쇠의 정도에 따라 복소쌍 또는 실수쌍으로 존재한다.

지난 20여년간 감쇠를 고려한 고유치 문제를 효율적으로 해석하기 위해 많은 방법들이 개발되었다. 이들 대부분의 방법들은 식 (2)와 같이 2차 고유치 문제를 시스템의 차수를 2배로 증분함으로써 선형 고유치 문제로 변형하여 해석한다.

$$\begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \lambda\phi \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \lambda\phi \end{Bmatrix} \quad (2)$$

식 (2)를 기초로한 기존 방법 중 널리 사용되고 있는 방법은 Subspace Iteration 방법(Leung, 1995; Olson 등,

1989; Rodrigues 등, 1989)과 Lanczos 방법(Bauchau, 1980; Bori 등, 1977; Chen 등, 1988; Gupta 등, 1988; 1992; Kim 등, 1988; Nour-Omid 등, 1989; Rajakumar, 1993)이다. Subspace Iteration 방법은 동시에 여러 개의 모드들을 구할 수 있으며 Deflation Process를 도입하여 라운드 오프 에러를 감소시킴으로써 저차 모드에 비해 고차 모드들이 정확하지 않는다는 단점을 해소하였다. 그러나 이 방법은 많은 복소 연산을 필요로 하고, 수렴성을 향상시키기 위해 도입한 Shift 값이 정확한 고유치에 근접할 경우 행렬분해 과정에서 수치적 불안정성이 유발된다. Lanczos 방법은 Lanczos 벡터들을 실수 영역에서 해석함으로써 해석 시간이 매우 적게 소요되지만 해석 결과의 정확도가 낮다.

최근에 본 논문의 저자는 감쇠를 고려한 고유치 문제를 해석할 수 있는 두가지 해법을 제안하였다. 첫 번째 방법은 식 (2)와 같이 증분하지 않고 시스템의 차수 n 에서 해석할 수 있는 Lanczos 방법(Kim 등, 1998)이다. 이 방법은 시스템을 삼대각 행렬로 감소시키기 위해 사용하는 Lanczos 벡터를 실수영역에서 계산함으로써 해석 시간이 매우 적게 소요되는 장점이 있지만, Lanczos 벡터수를 증가하더라도 오차가 어느 값 이하로는 감소하지 않는 단점을 가지고 있다. 두 번째 방법은 반복법을 이용한 방법(Lee 등, 1998; Kim 등 1998)으로 수렴성은 매우 우수하나, 차수가 $2n$ 인 상태공간으로 변형하여 해석함으로써 많은 복소 연산을 필요로 하는 단점을 가지고 있다.

본 논문에서는 저자가 개발한 Lanczos 방법의 결과를 초기값으로 하여 시스템의 차수를 $2n$ 으로 증분하지 않고, 시스템의 차수 n 에서 반복법을 이용하여 해석할 수 있는 고유치 해법을 제안하고자 한다.

2. 해석방법

2.1 제안방법

본 논문에서는 시스템의 고유치 λ 가 근접 또는 중복 고유치인 경우를 고려하고 있다. 수식의 편의를 위해 첫 번째부터 m 번째까지 근접 또는 중복 고유치로 가정하면 식 (1)은 다음과 같다.

$$M\Phi\Lambda^2 + C\Phi\Lambda + K\Phi = 0 \quad (3)$$

$$\text{여기서 } \lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \quad (4)$$

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m] \quad (5)$$

이다. 식 (3)의 근접 또는 중복 고유치와 고유벡터는 다음과 같은 직교조건식을 만족한다.

$$\Lambda \Phi^T M \Phi + \Phi^T M \Phi \Lambda + \Phi^T C \Phi = I_m \quad (6)$$

고유벡터들의 집합 Φ 를 벡터들의 집합 X 와 변환행렬 Z 를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\Phi = XZ \quad (7)$$

여기서 $X=[x_1, x_2, \dots, x_m]$ 이고 변환행렬 Z 은

$$DZ = ZA \quad (8)$$

와 같은 치수가 m 인 표준 고유치 문제를 해석함으로써 정의할 수 있다. 표준 고유치 문제의 직교조건에 따라

$$ZZ^T = I_m, \quad (9)$$

$$D = ZAZ^T \quad (10)$$

이다.

식 (7), (8), (9)와 (10)을 식 (3)과 (6)에 대입하고 정리하면 다음 식들을 얻을 수 있다.

$$MXDZA + CXZA + KXZ = 0 \quad (11)$$

$$(\Lambda Z^T X^T MXZ + Z^T X^T MXZA + Z^T X^T CXZ) = I_m \quad (12)$$

식 (11)과 식 (12)에 Z 를 먼저 곱한 결과식에 각각 Z^T 을 곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$MXD^2 + CXD + KX = 0 \quad (13)$$

$$DX^T MX + X^T MXD + X^T CX = I_m \quad (14)$$

식 (13)와 (14)에서 미지 값은 D 와 X 이다. 본 논문의 기본 개념은 식 (13)과 (14)의 미지 값 D 와 X 를 반복과정을 통해 구하고 이를 식 (7)과 (8)에 적용함으로써 시스템의 근접 또는 중복 고유치 Λ 와 고유벡터 Φ 를 구하는 것이다.

식 (13)의 초기값 $D^{(0)}$ 와 $X^{(0)}$ 을 기지 값으로 가정 하자. k 번 반복 연산 후 D 와 X 의 근사 값을 $D^{(k)}$ 와 $X^{(k)}$ 으로 나타내면 식 (13)과 (14)는 다음과 같다.

$$MX^{(k)}D^{(k)2} + CX^{(k)}D^{(k)} + KX^{(k)} = R^{(k)} \quad (15)$$

$$D^{(k)}X^{(k)T}MX^{(k)} + X^{(k)T}MX^{(k)}D^{(k)} + X^{(k)T}CX^{(k)} = I_m \quad (16)$$

$$\text{여기서 } D^{(k)} = \text{diag}(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_m^{(k)}), \quad (17)$$

$$X^{(k)} = [\phi_1^{(k)}, \phi_2^{(k)}, \dots, \phi_m^{(k)}] \quad (18)$$

이다. 식 (15)의 행렬 $R^{(k)}$ 는 잔류 값으로 일반적으로 정확한 고유치와 고유벡터의 근사 값이 대입되었기 때문에 0이 아니다. 잔류행렬 $R^{(k)}$ 을 0으로 함으로써 정확한 D 와 X 를 구할 수 있다. 이를 위해서 다음과 같은 Newton-Raphson 기법을 도입한다.

$$MX^{(k+1)}D^{(k+1)2} + CX^{(k+1)}D^{(k+1)} + KX^{(k+1)} = 0 \quad (19)$$

$$D^{(k+1)}X^{(k+1)T}MX^{(k+1)} + X^{(k+1)T}MX^{(k+1)}D^{(k+1)} + X^{(k+1)T}CX^{(k+1)} = I_m \quad (20)$$

$$\text{여기서 } D^{(k+1)} = D^{(k)} + \Delta D^{(k)}, \quad (21)$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta X^{(k)} \quad (22)$$

이고 $\Delta D^{(k)}$ 와 $\Delta X^{(k)}$ 는 $D^{(k)}$ 와 $X^{(k)}$ 의 미지의 증분 값이다.

식 (21)과 (22)를 식 (19)와 (20)에 대입하고 정리하면 각각 다음 식들을 얻을 수 있다.

$$M\Delta X^{(k)}D^{(k)2} + C\Delta X^{(k)}D^{(k)} + K\Delta X^{(k)} + 2MX^{(k)}D^{(k)}\Delta D^{(k)} + CX^{(k)}\Delta D^{(k)} = -R^{(k)} \quad (23)$$

$$X^{(k)T}M\Delta X^{(k)}D^{(k)} + D^{(k)}X^{(k)T}M\Delta X^{(k)} + X^{(k)T}C\Delta X^{(k)} + X^{(k)T}MX^{(k)}\Delta D^{(k)} = 0 \quad (24)$$

식 (23)과 (24)에서 $D^{(k)}$ 는 대각행렬이고 고유치들이 근접 또는 중복이기 때문에 매우 근접한 값이거나 또는 같은 값이다. 따라서 $D^{(k)}$ 를 $d_{11}^{(k)}I_m$ 라 하면 각각 다음과 같은 식으로 정리할 수 있다.

$$(d_{11}^{(k)2}M + d_{11}^{(k)}C + K)\Delta X^{(k)} + (2d_{11}^{(k)2}M + K)X^{(k)}\Delta D^{(k)} = -R^{(k)} \quad (25)$$

$$X^{(k)T}(2d_{11}^{(k)}M + C)\Delta X^{(k)} + X^{(k)T}MX^{(k)}\Delta D^{(k)} = 0 \quad (26)$$

식 (25)와 (26)을 하나의 선형 대수 방정식으로 표현하면 식 (27)과 같다.

$$\begin{bmatrix} d_{11}^{(k)2}M + d_{11}^{(k)2}C + K & (2d_{11}^{(k)2}M + K)X^{(k)} \\ X^{(k)T}(2d_{11}^{(k)}M + C) & X^{(k)T}MX^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X^{(k)} \\ \Delta D^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

식 (27)의 차수가 $(n+m)$ 인 계수행렬의 랭크(Rank)는 m 개의 독립 벡터들을 추가하였기 때문에 $(n+m)$ 이다 (Kim 등 1998). 즉 식 (27)의 계수행렬은 대칭이고 수치적으로 안정한 특징을 가지고 있다. 식 (27)을 기본으로 한 알고리즘은 수렴성이 우수하나, 반복 단계마다 계수행렬을 재구성하고 이의 행렬분해를 수행하여야 하기 때문에 매우 많은 복소 연산을 필요로 한다. 이러한 단점을 해소하기 위해 다음과 같은 수정된 Newton-Raphson 기법을 도입하였다.

$$\begin{bmatrix} d_{11}^{(0)2} M + d_{11}^{(0)} C + K & (2d_{11}^{(k)2} M + K)X^{(k)} \\ X^{(k)T} (2d_{11}^{(k)} M + C) & X^{(k)T} M X^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X^{(k)} \\ \Delta D^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

식 (28)의 계수행렬 또한 대칭이며 랭크가 $(n+m)$ 으로 수치적으로 항상 안정하다는 특징을 가지고 있다. 수치적으로 안정하다는 것은 수렴성을 향상시키기 위해 Shift를 도입하는 Inverse Iteration 방법(Gupta, 1974;

1981; Utku 등, 1984)이나 Subspace Iteration 방법 등에서 Shift 값이 정확한 고유치에 근접할 경우 수치적 불안정성이 유발된다는 점에서 매우 큰 의미를 갖는다. 제안방법의 알고리즘을 표 1에 정리하였다.

2.2 제안방법의 초기값

본 논문의 저자가 제안한 Lanczos 방법(Kim 등, 1998)을 이용하여 제안방법의 초기값을 구하였다. 저자가 제안한 Lanczos 방법은 시스템의 차수 n 을 그대로 유지하고 Lanczos 벡터들을 실수영역에서 계산하기 때문에 해석 시간이 매우 적게 소요된다. Lanczos 방법의 수렴특성을 살펴본 결과 고유값 p 개를 구하고자 하는 경우 일반적으로 $4p$ 이상 Lanczos 벡터를 증가시켜도 오차가 감소하지 않았다. 그러나 대부분의 오차는 고유치 보다는 고유벡터에 포함되어 있기 때문에 고유치의 근접 및 중복도를 그 결과만으로도 체크할 수 있을 정도의 좋은 값들을 얻을 수 있었다. 따라서 본 논문에서는 $4p$ 개의 Lanczos 벡터를 이용하여 얻어진 Lanczos 방법의 허용오차를 만족하지 못하는 결과 값들을 그 초기 값으로 하였다.

표 1. 제안방법의 알고리즘

1. Calculate initial values $D^{(0)} = \text{diag}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$ and $X^{(0)} = [\phi_1^{(0)}, \phi_2^{(0)}, \dots, \phi_m^{(0)}]$.

2. Iteration Process

(a) Define $\begin{bmatrix} d_{11}^{(0)2} M + d_{11}^{(0)} C + K & (2d_{11}^{(k)2} M + K)X^{(k)} \\ X^{(k)T} (2d_{11}^{(k)} M + C) & X^{(k)T} M X^{(k)} \end{bmatrix}$.

(b) Compute $-\begin{bmatrix} R^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix}$

where $R^{(k)} = [r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \dots, r_m^{(k)}] = M X^{(k)} D^{(k)(2)} + C X^{(k)} D^{(k)} + K X^{(k)}$.

(c) If the norm of the residual vectors satisfies the predetermined error limit, stop, otherwise go to step (d).

(d) Solve $\begin{bmatrix} d_{11}^{(0)2} M + d_{11}^{(0)} C + K & (2d_{11}^{(k)2} M + K)X^{(k)} \\ X^{(k)T} (2d_{11}^{(k)} M + C) & X^{(k)T} M X^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X^{(k)} \\ \Delta D^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix}$ for $\begin{bmatrix} \Delta X^{(k)} \\ \Delta D^{(k)} \end{bmatrix}$.

(e) Compute $D^{(k+1)} = D^{(k)} + \Delta D^{(k)}$ and $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta X^{(k)}$.

(f) Solve $D^{(k+1)} Z^{(k+1)} = Z^{(k+1)} \Lambda^{(k+1)}$ for $\Lambda^{(k+1)}$ and $Z^{(k+1)}$.

(g) Compute $\Phi^{(k+1)} = X^{(k+1)} Z^{(k+1)}$.

(h) Define $D^{(k+1)} = \text{diag}(\lambda_1^{(k+1)}, \lambda_2^{(k+1)}, \dots, \lambda_m^{(k+1)})$ and $X^{(k+1)} = [\phi_1^{(k+1)}, \phi_2^{(k+1)}, \dots, \phi_m^{(k+1)}]$.

(i) Go to step (a) with $k=k+1$.

3. 수치해석

비비례 감쇠 시스템의 고유치 해법으로 본 논문에서 제안한 방법의 효율성을 검증하기 위해 두가지 예제 구조물에 대해 수치해석을 수행하였다. 저차 p 개의 고유치와 고유벡터를 구하는 데 소요되는 해석 시간과 수렴성을 제안방법과 기존에 널리 사용되고 있는 Subspace Iteration 방법(Leung, 1995)과 비교하였다. Subspace Iteration 방법에서 사용한 벡터는 $2p$ 개이다. 이 값은 Subspace Iteration 방법을 가장 효율적으로 수행하기 위한 값이다. 각 방법에 대해 Bathe에 의해서 고유치와 고유벡터를 이용하여 동적해석을 안정적으로 수행하기 위한 필요조건인 식 (29)에서 정의되는 허용오차 정규(Bathe 등, 1980) 10^{-6} 을 만족할 때까지 해석을 수행하였다.

$$\epsilon_j^{(k)} = \frac{\|r_j^{(k)}\|_2}{\|k\phi_j^{(k)}\|_2} \quad (29)$$

$$\text{여기서 } R^{(k)} = [r_1^{(k)} \ r_1^{(k)} \ \dots \ r_m^{(k)}] \quad (30)$$

$$= MX^{(k)}D^{(k(2))} + CX^{(k)}D^{(k)} + KX^{(k)} \quad (31)$$

이고 $\|\cdot\|_2$ 는 벡터 놈(Vector Norm)을 의미하고 있다.

모든 수치해석을 100 MIPS와 200 MFLPS의 성능을 가지고 있는 CONVEX C3420에서 실행하였다.

3.1 그리드 구조물(Multiple Case)

그리드 구조물을 첫 번째 예제 구조물로 사용하였다. 그리드 구조물의 무차원 기하학적 형상과 물성치들을 그림 1에 나타냈다. 모델은 200개의 보요소로 이루어져 있고 자유도수는 590이다. 일관질량행렬(Consistent Mass Matrix)을 질량행렬로 사용하였다. 비비례 감쇠를 고려하기 위해 비례감쇠인 Rayleigh 감쇠 $C=\alpha M+\beta K$ 와 집중 감쇠기를 고려하였다. 본 예

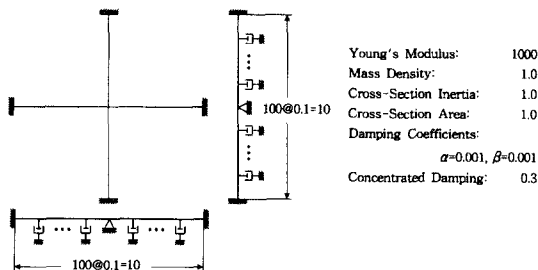


그림 1. 집중감쇠기를 부착한 그리드 구조물.

제는 지반-구조물 상호작용 시스템의 전형적인 예이다.

본 예제의 저차 12개의 복소 고유치들을 표 2에 정리하였다. 표 2를 통해서 알 수 있듯이 본 예제의 고유치는 모두 중복근이다. 그림 2는 Lanczos 벡터의 증가에 따른 Lanczos 방법에 의한 결과의 오차정규의 변화를 나타낸 것이다. 48개 이상의 Lanczos 벡터에 의한 대부분의 고유쌍들의 오차정규는 감소하지 않는다. 따라서 본 예제에서는 Lanczos 벡터 48개에 의한 Lanczos 방법의 결과들 중 허용오차정규 10^{-6} 을 만족하지 못하는 6번째, 10번째와 각각의 복소쌍들을 제안방법의 초기값으로 하였다. 그림 3은 이들을 초기값으로 하였을 경우 반복횟수에 따른 오차정규의 변화이다. 제안방법은 이들을 초기값으로 하였을 경우 한번의 반복과정을 통해서 허용오차정규 10^{-6} 을 만족시켰다. 그림 4는 Subspace Iteration 방법에 대한 각 반복 횟수당 오차정규의 변화이다. 제안방법의 수렴성이 Subspace Iteration 방법 보다 월등함을 알 수 있다. 표 3에는 제안방법과 Subspace Iteration 방법에 대한 해석 시간을 비교하였다. 제안방법은 33.57초를 Subspace Iteration 방법은 3096.62초의 해석 시간을

표 2. 그리드 구조물의 고유치

Mode Number	Eigenvalues
1	-0.095909 + j 8.66792
2	-0.095909 + j 8.66792
3	-0.095909 - j 8.66792
4	-0.095909 - j 8.66792
5	-0.605560 + j 15.5371
6	-0.605560 + j 15.5371
7	-0.605560 - j 15.5371
8	-0.605560 - j 15.5371
9	-0.577254 + j 20.7299
10	-0.577254 + j 20.7299
11	-0.577254 - j 20.7299
12	-0.577254 - j 20.7299

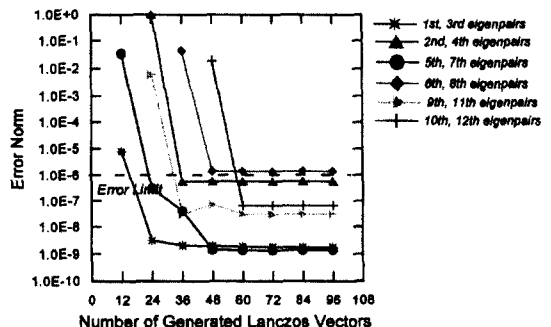


그림 2. 그리드 구조물의 Lanczos 방법의 오차정규 변화.

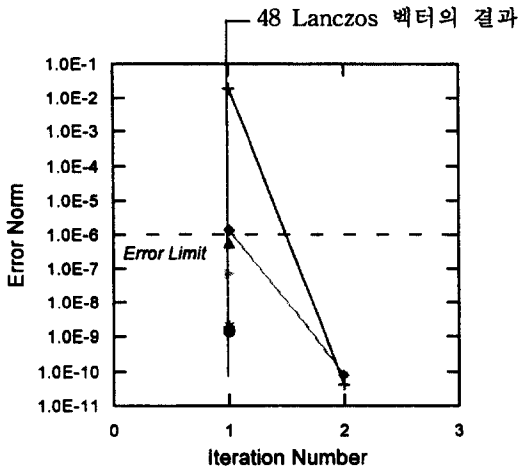


그림 3. 그리드 구조물의 제안방법의 오차정규 변화.

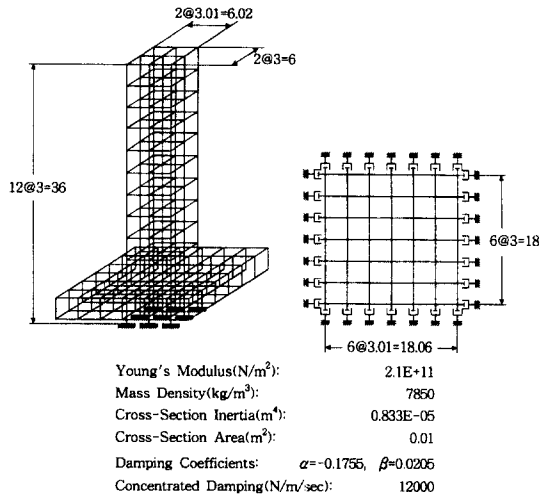


그림 5. 감쇠기를 부착한 3차원 뼈대구조물

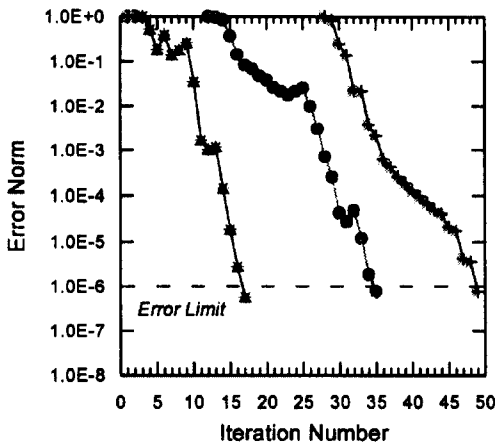


그림 4. 그리드 구조물의 Subspace Iteration 방법의 오차정규 변화.

표 3. 그리드 구조물의 해석 시간 비교

Methods	CPU time in second
Proposed Method (Lanczos Method+Iteration)	33.57 (24.09+9.48)
Subspace Iteration Method	3096.62

필요로 하였다.

3.2 3차원 뼈대구조물(Close Case)

3차원 뼈대구조물의 기하학적인 형상과 물성치를 그림 5에 나타내었다. 본 예제는 436개의 요소와 1128개의 자유도를 갖는다. 질량행렬은 일관질량행렬을 사용하였다. 감쇠행렬은 비비례 감쇠를 고려하기 위해 Rayleigh 감쇠와 집중 감쇠를 사용하였다. 본 예제 구조물은 제진 시스템의 전형적인 예이다.

표 4. 3차원 뼈대 구조물의 고유치

Mode Number	Eigenvalues
1	-0.13762 + j 0.30890
2	-0.13762 - j 0.30890
3	-0.13803 + j 0.30910
4	-0.13803 - j 0.30910
5	-3.52574 + j 2.20649
6	-3.52574 - j 2.20649
7	-0.24235 + j 4.16556
8	-0.24235 - j 4.16556
9	-1.64379 + j 7.02932
10	-1.64379 - j 7.02932
11	-1.65151 + j 7.03571
12	-1.65151 - j 7.03571
13	-0.98708 + j 8.48137
14	-0.98708 - j 8.48137
15	-2.70132 + j 9.96854
16	-2.70132 - j 9.96854
17	-2.70231 + j 9.96941
18	-2.70231 - j 9.96941

본 예제의 저차 18개의 복소 고유치들을 표 4에 정리하였다. 표 4를 통해서 알 수 있듯이 본 예제의 고유치는 단일 또는 근접근이다. 그림 6은 Lanczos 벡터의 증가에 따른 Lanczos 방법에 의한 결과의 오차정규의 변화를 나타낸 것이다. 72개 이상의 Lanczos 벡터에 의한 대부분의 고유값들의 오차정규는 감소하지 않는다. 따라서 본 예제에서는 Lanczos 벡터 72개에 의한 Lanczos 방법의 결과들중 허용오차정규 10⁻⁶을 만족하지 못하는 15번째부터 18번째의 결과들을 제안방법의 초기값으로 하였다. 그림 7은 이들을 초기값으로 하였을 경우 반복횟수에 따른 오차정규의

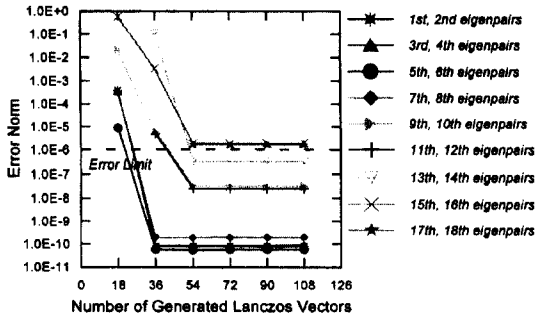


그림 6. 3차원 뼈대 구조물의 Lanczos 방법의 오차정규 변화

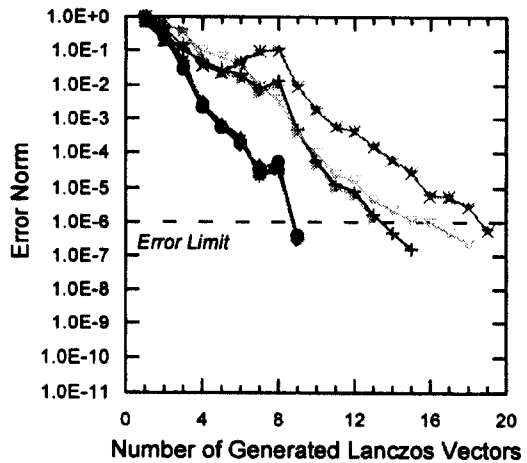


그림 8. 3차원 뼈대 구조물의 Subspace Iteration 방법의 오차정규 변화.

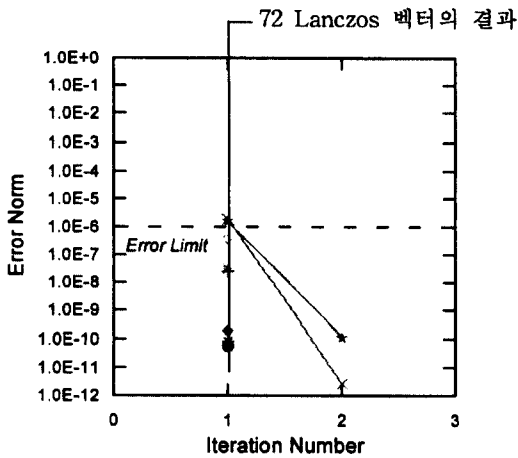


그림 7. 3차원 뼈대 구조물의 제안방법의 오차정규 변화.

변화이다. 제안방법은 이들을 초기값으로 하였을 경우 한번의 반복과정을 통해서 허용오차정규 10^{-6} 을 만족시켰다. 그림 8은 Subspace Iteration 방법에 대한 각 반복 횟수당 오차정규의 변화이다. 제안방법의 수렴성이 Subspace Iteration 방법 보다 월등함을 알 수 있다. 표 5에는 제안방법과 Subspace Iteration 방법에 대한 해석 시간을 비교하였다. 제안방법은 420.29초를 Subspace Iteration 방법은 12724.78초의 해석 시간을 필요로 하였다.

4. 결 론

본 논문에서는 근접 또는 중복 고유치를 갖는 비비례 감쇠 시스템의 효율적인 고유치 해법을 개발하였다. 제안방법의 알고리즘은 수정된 Newton-Raphson 기법을 기본 개념으로 하고 있고, 허용오차 정규를

표 5. 3차원 뼈대 구조물의 해석 시간 비교

Methods	CPU time in second
Proposed Method (Lanczos Method+Iteration)	420.29 (247.74+172.55)
Subspace Iteration Method	12724.78

만족하지 않은 Lanczos 방법의 결과를 초기 값으로 이용하였다. 제안방법은 기존 방법들 처럼 시스템의 차수를 $2n$ 으로 증가하지 않고 n 을 그대로 유지하기 때문에 메모리 및 연산횟수를 감소시킬 수 있다. 또한 제안방법은 수렴성이 매우 좋기 때문에 구조물이 대형화할수록 이의 동특성을 효율적으로 해석할 수 있다. Lanczos 방법의 의한 고유치는 정확한 고유치에 비해 매우 근사한데도 불구하고 제안 방법은 이를 초기값으로 하여 수치적으로 안정하게 정확한 고유치와 고유벡터를 구할 수 있었다. 제안방법은 시스템 행렬들의 대칭성과 분산성을 프로그램에 그대로 적용할 수 있다.

참고문헌

1. Bathe, K.J. and Ramaswamy, S. (1980). "An accelerated subspace iteration method", Comput. Struct., Vol. 23, pp. 313-331.
2. Bauchau, O.A. (1980). "A solution of the eigenproblem for undamped gyroscopic systems with the Lanczos algorithm", Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 23, pp. 1705-1713.
3. Borri, M. and Mantegazza, P. (1977). "Efficient solu-

- tion of quadratic eigenproblems arising in dynamic analysis of structures", *Comput. Meth. appl. Mech. Engng.*, Vol. 12, pp. 19-31.
4. Caughey, T.K. and O'Kelly, M.E.J. (1965). "Classical normal modes in damped linear dynamic systems", *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 32, pp. 583-588.
 5. Chen, H.C. and Taylor, R.L. (1988). "Solution of eigenproblems for damped structural systems by Lanczos algorithm", *Comput. Struct.*, Vol. 30, No. 1/2, pp. 151-161.
 6. Gupta, K.K. (1974). "Eigenproblem solution of damped structural systems", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 8, pp. 877-911.
 7. Gupta, K.K. (1981). "Development of a unified numerical procedure for free vibration analysis of structures", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 17, pp. 187-198.
 8. Gupta, K.K. and Lawson, C.L. (1988). "Development of a block Lanczos algorithm for free vibration analysis of spinning structures", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 26, pp. 1029-1037.
 9. Gupta, K.K., Lawson, C.L. and Ahmadi, A.R. (1992). "On development of a finite dynamic element and solution of associated eigenproblem by a block Lanczos procedure", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 33, pp. 1611-1623.
 10. Lee, I.W., Kim, M.C. & Robinson, A.R. (1998). "Efficient Solution Method of Eigenproblems for Damped Structural Systems Using the Modified Newton-Raphson Technique", *J. Engng. Mech., ASCE*, Vol. 124(5), pp. 576-580.
 11. Leung, A.Y.T. (1995). "Subspace iteration method for complex symmetric eigenproblems", *J. Sound Vibr.*, Vol. 184, No. 4, pp. 627-637.
 12. Kim, H.M. and Craig, Jr, R.R. (1988). "Structural dynamics analysis using an unsymmetric block Lanczos algorithm", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 26, pp. 2305-2318.
 13. Kim, M.C., Jung, H.J. & Lee, I.W. (1999). "Solution of Eigenvalue Problems for Nonclassically Damped Systems with Multiple Frequencies". *J. Sound Vibr.*, Vol. 219(2), pp. 207-222.
 14. Kim, M.C. & Lee, I.W. (1999). "A Computationally Efficient Algorithm for the Solution of Eigenproblems for Large Structures with Non-Proportional Damping Using Lanczos Method ", *Earthquake Engng. Struct. Dyn.* Vol. 28, pp. 157-172.
 15. Nour-Omid, B. and Regelbrugge, M.E. (1989). "Lanczos method for dynamic analysis of damped structural systems", *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, Vol. 18, pp. 1091-1104.
 16. Olson, L. and Vandini, T. (1989). "Eigenproblems from finite element analysis of fluid-structure interactions", *Comput. Struct.*, Vol. 33, No. 3, pp. 679-687.
 17. Rajakumar, C. (1993). "Lanczos algorithm for the quadratic eigenvalue problem in engineering applications", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 105, pp. 1-22.
 18. Rodrigues, J.F.D and Gumer, T.E.C. (1989). "A subspace iteration method for the eienolution of large undamped gyroscopic systems", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 28, pp. 511-522.
 19. Utku, S. and Clemente, L.M. (1984). "Computation of eigenpairs of $Ax=\lambda Bx$ for vibrations of spinning deformable bodies", *Comput. Struct.*, Vol. 19, pp. 843-847.

(接受 : 1998. 11. 21)