

## 비비례감쇠 시스템에 대한 고유치해석의 누락된 고유치 검사 방법

## Technique of Checking Missed Eigenvalues for Nonproportionally Damped System

정형조\* · 이인원\*\*

Jung, Hyung-Jo · Lee, In-Won

## Abstract

The eigenvalue analysis for the nonproportionally damped system should be necessarily performed in case of the soil-structure interaction problem and the structural control problem. However, the most eigenvalue analysis methods such as the subspace iteration method and the Lanczos method may miss some eigenpairs in the required ones. Therefore, the eigenvalue analysis method must include a technique to check the missed eigenpairs for the practical tools. In case of the undamped or proportionally damped structures, the missed eigenpairs can be checked by using the Sturm sequence property, while in case of the nonproportionally damped structures, a checking technique has not been developed yet. In this paper, the mathematical properties such as the extension of the Sturm sequence property, the Routh-Hurwitz criterion and the argument principle have been first reviewed thoroughly, and then the technique that can check the missed eigenpairs in case of the nonproportionally damped structures by applying the argument principle is proposed. To show the effectiveness of the proposed method, a numerical example is considered.

*Keywords* : nonproportionally damped system, missed eigenpairs, Sturm sequence property, argument principle, Routh-Hurwitz criterion

## 요 지

지반-구조물 상호작용 문제, 구조물의 진동 제어 문제와 같은 비비례감쇠 시스템에 대한 동적해석을 모드중첩법으로 수행하는 경우에는, 감쇠를 고려한 고유치문제의 해석이 선행되어야 한다. 고유치해석의 결과가 동적해석에 사용되어 정확한 응답을 얻기 위해서는, 해석 결과에 누락된 고유치가 존재해서는 안된다. 따라서 동적해석을 수행하기 전에 고유치해석 결과를 검토하여 누락된 고유치의 존재 여부를 검사하는 과정은 매우 중요하다. 비감쇠 및 비례감쇠 시스템에 대한 고유치문제(감쇠를 고려하지 않은 고유치문제)에는 Sturm 수열 성질을 이용한 누락된 고유치 검사 방법이 널리 사용되고 있으나, 비비례감쇠 시스템에 대한 고유치문제(감쇠를 고려한 고유치문제)에 적용할 수 있는 누락된 고유치 검사 방법은 아직 개발되어있지 않다. 본 연구에서는 Sturm 수열 성질의 확장, Routh-Hurwitz 기준, 편각의 원리 등과 같은 여러가지 수학적론을 검토하여, 감쇠를 고려한 고유치문제의 누락된 고유치 검사 방법으로 적용이 가능한 이론을 선정하였다. 또한 정밀한 검토를 거쳐서 선정된 편각의 원리를 이용하여 감쇠를 고려한 고유치문제의 누락된 고유치 검사 방법을 개발하였다. 제

\*정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 박사

\*\*정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 교수

안방법을 검증하기 위하여 4자유도 비례 감쇠 구조물의 고유치해석을 수행하고 누락된 고유치의 존재여부를 검사하였다. 제안방법을 실제 대형 시스템에 보다 효율적으로 적용하기 위해서는 추가적인 연구가 필요하다.

**핵심용어** : 비례감쇠 시스템, 누락된 고유값, Sturm 수열 성질, 편각의 원리, Routh-Hurwitz 기준

## 1. 서 론

많은 공학분야에서 구조물의 동적해석은 매우 중요한 부분이다. 동적해석은 크게 직접적분법과 모드중첩법으로 나누어진다. 충격하중과 같은 짧은 재하시간을 갖는 하중에 대해서는 일반적으로 직접적분법이 가장 효율적인 방법이다. 그러나, 지진과 같이 긴 재하시간을 갖는 하중에 대해서는 모드중첩법이 더욱 적절한 수치해석 방법이다. 모드중첩법을 이용하여 구조물에 대한 동적해석을 수행하는 경우에는 고유치해석이 선행되어야만 한다. 고유치해석을 통하여 계산된 고유벡터를 이용하여 모드 변환(modal transformation)을 수행하면, 동적응답(dynamic response)을 쉽게 계산할 수 있다. 모드변환 단계에서 변환행렬은 구조물의 고유벡터 전체를 사용하지 않고 저차 고유벡터 일부만만으로 구성하여도 정확한 동적응답을 얻을 수 있다. 그런 까닭에, 구조물의 고유값 전부를 구하는 Jacobi 방법, Householder-QR-inverse iteration 방법 등이 아니라, 소수의 저차 고유값만을 구하는 부분공간 반복법(subspace iteration method), 행렬식 탐사 방법(determinant search method) 및 Lanczos 방법과 같은 고유치해법이 주로 개발되어져 왔다.

그러나, 소수의 저차 고유값만을 구하는 고유치해법은 전체 고유값 전부를 구하는 고유치해법과는 달리 최종적으로 구해진 고유값에 누락된 고유값이 존재할 수 있다. 만약 누락된 고유벡터를 갖는 저차의 불안정한 고유벡터 집합을 가지고 모드 변환을 수행한다면, 정확한 동적응답을 얻을 수 없다. 정확한 동적응답을 얻기 위해서는, 반드시 저차의 완전한 고유벡터 집합으로 변환행렬을 구성해야 한다. 따라서 수행된 고유치해석에 누락된 고유값의 존재여부를 검사하는 과정이 필요하다. 검사 결과 누락된 고유값이 존재하면 그 고유값들을 구할 수 있는 해석을 다시 수행해야만 한다. 그런 과정을 통하여 저차의 완전한 고유벡터 집합으로 변환행렬을 구성한 후에 모드 변환을 수행하면 정확한 동적응답을 얻을 수 있다. 이와 같

이 어떤 고유치해법이 실제 응용분야에서 유용하게 사용되기 위해서는 반드시 누락된 고유값을 검사하는 기법이 그 해법 내에 포함되어 있어야만 한다.

현재까지는 누락된 고유값을 검사하기 위하여 Sturm 수열 성질(Sturm sequence property)을 이용한 기법을 사용해왔다. 이에 대한 내용은 여러 문헌(Meirovitch, 1980; Hughes, 1987; Petyt 1990; Bathe, 1996)에서 거론하고 있고, ADINA와 같은 범용 프로그램에서도 이 기법을 사용하여 누락된 고유값에 대한 검사를 수행하고 있다. 그런데 이 검사기법은 감쇠를 고려하지 않은 고유치문제에만 적용 가능한 방법이다. 감쇠를 고려하지 않은 고유치문제는 비감쇠구조물(undamped structure)이나 비례감쇠 구조물(proportionally damped structure)의 고유값을 구하는데 사용 가능하다(Newland, 1989).

하지만 대부분의 실제 구조물은 감쇠행렬이 비비례 형태(nonproportional form)를 갖는다. 지반-구조물 상호작용 문제(soil-structure interaction problem)나 복합구조물과 같은 시스템에서는 각 부-시스템(subsystem)을 비례감쇠라고 가정하더라도 전체 구조물에 대한 결과적인 감쇠행렬은 비비례가 된다. 또한 최근에 장대교량이나 초고층 건물 등을 설계시공하면서 중요성이 부각되고 있는 토목구조물의 진동제어 문제도 비비례감쇠 시스템으로 모델링해야만 한다. 이와 같은 비비례감쇠 시스템에 대한 동적해석을 수행하기 위해서는 감쇠를 고려한 고유치문제의 계산이 선행되어야 한다. 이러한 고유치문제는 부분공간 반복법, Lanczos 방법, Arnoldi 방법 그리고 이인원과 김만철(1998; 1999)이 개발한 효율적인 고유치해법 등을 통하여 계산할 수 있다. 그러나, 이렇듯 감쇠를 고려한 고유치해석을 수행했다 하더라도, 이 경우에 사용 가능한 누락된 고유치 검사기법이 아직까지 개발되어 있지 않기 때문에 해석 결과의 정확성을 보장할 수 없는 치명적인 문제점을 안고 있다. 따라서 감쇠를 고려한 고유치문제에 적용할 수 있는 누락된 고유치 검사기법이 개발되어야만, 비로소 비비례감쇠 시스템에

대한 고유치해석 결과가 실제 동적해석 문제에 적용될 수 있다.

감쇠를 고려한 고유치문제의 누락된 고유치 검사기법으로 이용 가능한 수학이론들은 다음과 같다. 먼저 감쇠를 고려하지 않은 고유치문제에 사용했던 Sturm 수열 성질을 확장하여 적용하는 방법이 있다. 또한 Sturm 수열 성질과 마찬가지로 다항식의 영점(zero)의 개수를 파악하는데 사용되는 수학이론인 Routh-Hurwitz 기준(Routh-Hurwitz criterion)이나 편각의 원리(argument principle)를 이용하는 기법도 고려할 수 있다.

본 논문에서는 위와 같이 감쇠를 고려한 고유치문제의 누락된 고유치 검사방법 개발하는데 이용 가능할 것으로 추정되는 수학이론들을 세밀하게 검토하고, 그 중에서 가장 타당한 이론으로 확인된 편각의 원리를 이용하여 고유치개수 검사기법을 개발하였다. 또한 차수가 작은 간단한 수치예제(4자유도 비비례감쇠 구조물)를 통하여 제안방법을 검증하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 다음 장에서는 감쇠시스템의 고유치문제에 대하여 설명하였다. 3장에서는 감쇠를 고려한 고유치문제에서 누락된 고유치를 검사하는데 이용 가능한 수학이론을 소개하고 각 이론의 장, 단점을 분석하는 내용이 기술되어 있다. 4장에서는 3장의 검토 결과를 토대로 선정된 편각의 원리를 이용하여 감쇠를 고려한 고유치문제에 적용할 수 있는 누락된 고유치 검사기법을 개발하고, 제안방법을 검증하기 위한 간단한 수치예제를 해석하였다. 마지막으로 5장에서는 결론과 추후 연구과제에 대하여 기술하였다.

## 2. 감쇠시스템의 고유치문제

감쇠시스템의 동적운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M\ddot{u}(t)+C\dot{u}(t)+Ku(t)=f(t) \quad (1)$$

여기서  $M$ ,  $C$ 와  $K$ 는 각각  $(n \times n)$ 차의 질량, 감쇠 및 강성행렬이고,  $f(t)$ 는  $(n \times 1)$ 차의 외부하중 벡터이다. 또한  $\ddot{u}(t)$ ,  $\dot{u}(t)$ 와  $u(t)$ 는 각각  $(n \times 1)$ 차의 가속도, 속도 및 변위벡터이다.

구조물의 자유진동해를 찾기 위하여 먼저 외부하중 벡터  $f(t)$ 가 0인 경우를 생각해 보자.

$$M\ddot{u}(t)+C\dot{u}(t)+Ku(t)=0 \quad (2)$$

식 (2)의 해는 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$u(t)=\phi e^{\omega t} \quad (3)$$

여기서  $\omega$ 는 구조물의 고유진동수이고,  $\phi$ 는 그 경우의 고유벡터이다.

식 (3)을 식 (2)에 대입하고 정리하면, 다음과 같은 2차고유치문제(quadratic eigenvalue problem)를 얻게 된다.

$$\omega^2 M\phi + \omega C\phi + K\phi = 0 \quad (4)$$

식 (4)와 같은 고유치문제를 갖는 감쇠 시스템은 감쇠행렬의 형태에 따라 비례 감쇠 시스템과 비비례 감쇠 시스템으로 나눌 수 있다. Caughey and O'Kelly (1965)가 제안한 아래와 같은 식을 만족하면 비례 감쇠 시스템이고 그렇지 못하면 비비례 감쇠 시스템이 된다.

$$CM^{-1}K = KM^{-1}C \quad (5)$$

비례감쇠 시스템의 경우에는 다음 식 (6)과 같이 감쇠를 고려하지 않은 고유치문제를 통해 구해진 고유벡터를 이용해서 간단하게 동적해석을 수행할 수 있기 때문에, 식 (4)와 같이 감쇠를 고려한 고유치문제를 계산할 필요가 없다.

$$\omega^2 M\phi + K\phi = 0 \quad (6)$$

또는

$$K\phi = \lambda M\phi \quad (7)$$

여기서 고유치  $\lambda = -\omega^2$ 는 실수값을 갖는다. 따라서, 감쇠를 고려하지 않은 고유치문제는 실수영역에서 모든 계산이 이루어진다.

하지만, Caughey and O'Kelly의 조건식(식 (5))을 만족하지 않는 비비례감쇠 시스템에 대한 동적해석을 수행할 경우에는, 식 (4)와 같이 감쇠를 고려한 고유치문제를 통해 고유벡터를 구해야만 정확한 동적응답을 얻을 수 있다. 일반적으로 식 (4)는 다음 식 (8)과 같이 상태공간 방정식의 형태로 변환되어 계산된다.

$$\begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \omega\phi \end{Bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \omega\phi \end{Bmatrix} \quad (8)$$

최근에 김만철과 이인원(1999)은 식 (4)와 같은 2

차 고유치문제를 상태공간 방정식으로 변환하지 않고 바로 계산하는 고유치해법을 제안하여 해석시간 및 해석에 필요한 저장공간을 감소시켰다.

감쇠를 고려한 고유치문제에서 고유치와 고유벡터는 감쇠의 정도에 따라 일반적으로 공액복소수 짝 (complex conjugate pair) 또는 실수 짝(real pair)으로 존재한다. 따라서 감쇠를 고려하지 않은 고유치문제와는 달리 복소수 영역에서 해석이 수행되어야 한다. 복소수 영역에서 해석하기 때문에 모든 연산이 실수영역에서 수행되는 감쇠를 고려하지 않은 경우보다 해석시간이 훨씬 많이 소요되고 저장공간도 그만큼 많이 요구된다. 또한 실수영역에서는 만족하던 여러가지 특성도 복소수영역에서는 만족하지 않을 수 있다(Wilkinson, 1965). 즉, 감쇠를 고려하지 않은 경우에 사용하던 성질들을 감쇠를 고려한 경우에도 사용하기 위해서는 이에 대한 검토가 필수적이다.

위와 같은 이유로, 비감쇠 및 비례감쇠 시스템에 대한 고유치문제의 누락된 고유치 검사방법으로 사용 해왔던 Sturm 수열 성질이 비비례감쇠 시스템에 대한 고유치문제에 적용 가능하다고 단정할 수는 없다. 그 이전에 Sturm 수열 성질이 복소수영역에서도 성립하는 지를 검토해야 한다. 만약 Sturm 수열 성질이 성립한다면 비교적 간단하게 감쇠를 고려한 고유치문제에 대한 누락된 고유치 검사 방법을 개발할 수 있지만, Sturm 수열 성질이 성립하지 않는다면 복소수영역에서 성립하는 많은 수학이론들을 검토한 후 그 중에서 누락된 고유치 검사방법에 적용 가능한 이론을 선정해야 한다. 이에 대한 내용은 다음 장에 기술하였다.

### 3. 이론적 배경

#### 3.1 개요

이 장에서는 감쇠를 고려한 고유치문제의 누락된 고유치 검사 방법으로 이용할 수 있는 수학이론에 대하여 검토하였다. 여기서 ‘누락된 고유치 검사 방법’이라는 용어는 고유치해석을 통해  $p$ 개의 고유치를 구했을 경우 0부터  $p$ 번째 고유치까지의 영역내에 존재하는 고유치의 총 수가  $p$ 개인지 여부를 검사한다는 의미이므로, ‘고유치 개수 검사 방법’이라는 용어와 같은 의미를 가진다. 이 장에서는 앞으로 검토될 수학이론의 특성에 더 부합하는 용어인 ‘고유치개수 검

사 방법’을 사용하였다.

다자유도(MDOF) 구조물의 고유치문제에 대한 고유치 개수 검사 방법으로 직접 적용할 수 있는 수학적론은 거의 존재하지 않는다. Gershgorin 정리(Meirovitch, 1980; Lancaster and Tismenetsky, 1985)가 수학적론들 중 유일하게 행렬형태의 고유치문제에 적용할 수 있는 방법이지만, 감쇠를 고려한 대형 고유치문제에 사용하기에는 너무 정성적인 방법이어서 검토 대상에서 제외하였다. 이외의 수학적론은 모두 다항식의 근의 개수를 찾는 데 이용되는 방법들이다. 따라서 이러한 수학적론을 행렬형태의 고유치문제에 적용하기 위해서는 적절한 수정이 필요하고, 이러한 수정이 가능한 수학적론을 찾는 것이 이 장의 목적이다.

비비례 감쇠시스템에 대한 고유치문제의 고유치 개수 검사방법에 적용이 가능한 수학적론을 검토하는 과정은 크게 두단계로 이루어졌다. 먼저 감쇠를 고려하지 않은 고유치문제에서 고유치 개수를 파악하는 방법에 적용되고 있는 Sturm 수열 성질을 감쇠를 고려한 경우에도 적용이 가능한지 파악하는 과정을 수행하였다. 그 다음으로 복소수 영역에서의 다항식의 근의 개수를 파악할 수 있는 수학적론들을 검토하여 고유치 개수 검사방법에 적용할 수 있는지 여부를 파악하는 과정을 수행하였다. 이때 기본적인 검토를 거쳐서 감쇠를 고려한 고유치문제의 고유치 개수 파악에 적용될 가능성이 있는 수학적론으로 선정된 것은 Routh-Hurwitz 기준(Routh-Hurwitz criterion)과 편각의 원리(argument principle)이다.

#### 3.2 Sturm 수열 성질(Sturm sequence property)의 확장

##### 3.2.1 Sturm 수열성질

$n$  차의 실계수 다항식을 생각해 보자.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (9)$$

여기서  $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 는 실수이다. 이때, Sturm 수열 성질은 다음과 같이 나타낼 수 있다(Pearson, 1974).

$n$ 차 다항식  $f(x)$ 에 대한 Sturm 수열은  $[a, b]$ 영역에서  $f(x)$ 의 실근의 개수를 다음과 같은 방법으로 표현하는 함수  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)$ 의 수열을 의미한다:  $V(a)$ 를  $a$ 점에서 함수  $f_0(a), f_1(a), \dots, f_m(a)$  수열의 부호변화 횟수라고 하고, 마찬가지로  $b$ 점에서의 부호

변화 횟수를  $V(b)$ 라 하자. 그렇다면  $f(x)$ 는  $[a, b]$  영역에서 정확하게  $|V(a) - V(b)|$  개의 실근을 갖는다. Sturm 수열은  $f_1(x) = f(x)$ ,  $f_2(x) = f'(x)$ 가 되고, 그 이후부터는 다음과 같은 관계를 갖는다.  $(i+1)$ 번째 함수  $f_{i+1}(x)$ 은  $f_i(x)$ 를  $f_{i-1}(x)$ 로 나눈 나머지에  $(-1)$ 을 곱한 다항식이다.

위의 정의에서 알 수 있듯이, 기본적으로 Sturm 수열 성질은 다항식의 실근의 개수를 구할 수 있도록 유도된 성질이다. 따라서 이 성질을 고유치문제에 적용할 수 있도록 수정한다고 하더라도 식 (7)과 같이 고유치가 실근만을 갖는 고유치문제, 즉 감쇠를 고려하지 않은 고유치문제에만 적용 가능한 성질임을 알 수 있다.

다항식의 실근의 개수를 파악하기 위한 Sturm 수열 성질과 행렬형태의 고유치문제(식 (7))와의 연관성을 알아보기 위해서는 다음과 같은 고유치문제의 특성방정식(characteristic equation)을 고려해야 한다.

$$p(\lambda) = \det(K - \lambda M) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (10)$$

위와 같은 특성방정식의 근이 바로 고유치문제에서의 고유치이다. 식 (10)을 이용해서 Sturm 수열을 바로 구할 수도 있지만, 실제 대형구조물의 고유치문제에 있어서는 특성방정식을 직접 구하는 것은 매우 비효율적인 일이므로 보다 효율적인 방법이 필요하다.

Sturm 수열성질을 행렬형태의 고유치문제에 효율적으로 이용하기 위한 방법에 대해서 알아보자. 먼저 미지의 고유치  $\lambda$ 를 어떤 상수  $\lambda_j$ 로 놓으면, 식 (10)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p(\lambda_j) = \det(K - \lambda_j M) = \det L D L^T = \prod_{n=1}^n d_{ii} \quad (11)$$

여기서  $L D L^T$ 는  $K - \lambda_j M$ 를 행렬분해 한 것이다.  $L$ 는 하부 삼각행렬,  $D$ 는 대각행렬이고  $d_{ii}$ 는 대각행렬  $D$ 의  $i$ 번째 요소를 나타낸다.

식 (7)과 같은 고유치문제의  $r$ 번째 상관제약(associated constraint) 문제의 고유치문제는 아래 식과 같다.

$$(K^{(r)} - \lambda^{(r)} M^{(r)}) \phi^{(r)} = 0 \quad (12)$$

여기서 모든 행렬들은  $(n-r)$  차이고  $K^{(r)}$ 과  $M^{(r)}$ 은 행렬  $K$ 와  $M$ 의 마지막  $r$ 개의 열과 행을 삭제함으로써

얻어진 행렬이다. 식 (12)의 특성방정식은 다음 식과 같다.

$$p^{(r)}(\lambda^{(r)}) = \det(K^{(r)} - \lambda^{(r)} M^{(r)}) \quad (13)$$

식 (13)에서는 다음과 같은 고유치 분리 성질(eigenvalue separation property)이 성립한다(Bathe, 1996). 즉,  $r+1$ 번째 제약(constraint) 문제의 고유치들은  $r$ 번째 제약(constraint) 문제의 고유치들을 분리시킨다. 이를 수식으로 표현하면 아래 식과 같다(그림 1참조).

$$\lambda_1^{(r)} \leq \lambda_1^{(r+1)} \leq \lambda_2^{(r)} \leq \lambda_2^{(r+1)} \dots \leq \lambda_{n-r-1}^{(r)} \leq \lambda_{n-r-1}^{(r+1)} \leq \lambda_{n-r}^{(r)} \quad (14)$$

고유치 분리 성질이 성립한다는 것은 상관제약(associated constraint) 문제의 특성방정식이 Sturm 수열을 구성한다는 의미이다. 따라서 고유치 분리 성질이 성립한다는 전제가 있으면, 다항식의 근의 개수를 파악하는 Sturm 수열 성질을 가지고 행렬형태를 갖는 고유치문제의 고유치 개수를 파악할 수 있다.

위와 같이 유도된 관계를 가지고 고유치 개수를 파악하는 방법에 대하여 알아보겠다. 먼저 개의 고유치를 구하는 고유치문제를 수행하였다고 하자. 슈프트  $m$ 를  $p$ 번째 고유치보다 약간 큰 값을 취한 후 다음과 같은 행렬분해식을 구성한다.

$$K - \mu M = L D L^T \quad (15)$$

식 (15)와 같은 행렬  $K - \mu M$ 의 행렬분해에서, 행렬  $D$ 의 0보다 작은 대각요소의 수가 슈프트  $\mu$ 보다

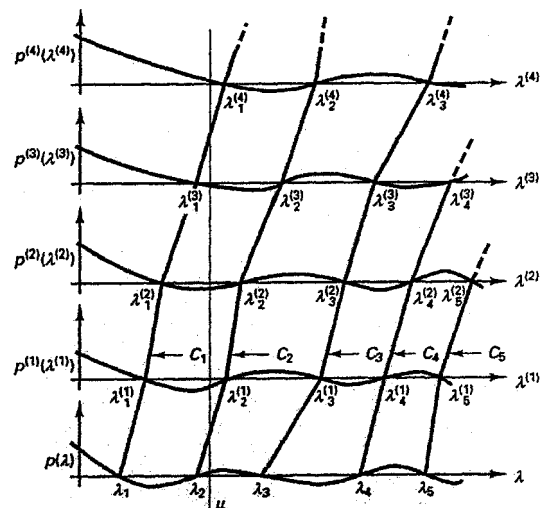


그림 1. 고유치 분리 성질(eigenvalue separation property)

작은 고유치의 개수와 같다. 역으로, 만약  $\lambda_p < \mu < \lambda_{p+1}$  이라면 행렬  $D$ 에는 0보다 작은 값을 갖는 대각 요소가  $p$ 개 존재한다.

### 3.2.2 감쇠를 고려한 고유치문제로의 확장

Sturm 수열 성질은 기본적으로 실근 또는 실수의 고유치를 갖는 문제만 고려하여 유도된 성질이다. 이 성질이 복소수 형태의 고유치를 갖는 비비례 감쇠 시스템의 경우에도 성립하기 위해서는 Sturm 수열 성질과 고유치문제를 연결해주는 가장 중요한 특성인 고유치 분리 성질을 만족해야 한다. 하지만 감쇠의 영향을 고려한 고유치문제에서는 고유치 분리성질이 성립하지 않기 때문에 Sturm 수열 성질을 바로 적용할 수는 없다. 대신 Tsai and Chen(1993)처럼 일정한 선을 정해놓고 그 선 위에 존재하는 고유치의 개수를 구하거나 Yamada *et al.* (1998)처럼 반지름 1인 단위원(unit circle) 내에 존재하는 고유치의 개수를 구할 수 있다. 하지만 이 방법들도 다항식의 근을 구하는 경우에만 사용할 수 있을 뿐, 대형구조물의 고유치문제에는 적용하기 힘든 방법이다. 이상에서 살펴본 바와 같이 Sturm 수열 성질은 감쇠를 고려한 고유치 문제에 확장하여 적용하기는 어려운 이론이다.

### 3.3 Routh-Hurwitz 기준(Routh-Hurwitz criterion)

Routh-Hurwitz 기준의 정의는 다음과 같다(Korn and Korn, 1968).

식 (9)와 같은 다항식  $f(x)$ 의 양의 실수부(real part)를 갖는 근의 개수는 다음과 같은 수열에서의 부호 변화의 개수와 같다.

$$T_n, T_{n-1}, \frac{T_{n-2}}{T_{n-1}}, \frac{T_{n-3}}{T_{n-2}}, \dots, \frac{T_0}{T_1} \quad (16)$$

$$\text{또는 } T_n, T_{n-1}, T_{n-1}T_{n-2}, T_{n-2}T_{n-3}, \dots, T_2T_1, a_0 \quad (17)$$

$$\text{여기서 } T_n = a_n > 0, T_{n-1} = a_{n-1}, T_{n-2} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix},$$

$$T_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-3} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix}, T_4 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} \end{vmatrix} \dots$$

이 방법은 기본적으로 다항식의 근을 구하는데 사용될 목적으로 개발된 것이다. 따라서 고유치문제에

적용하기 위해서는 위의 정의를 행렬형태에 맞게끔 수정할 수 있어야 하는데 그럴 여지가 거의 없다. 그렇다면 역으로 고유치문제를 다항식의 형태로 고쳐서 계산하는 방법이 있지만 그 방법도 대형구조물의 경우에는 매우 비효율적이다. Routh-Hurwitz 기준의 또 다른 문제점은 고유치의 순서가 실수부(real part)의 크기에 따라서 정해지게 되어 있다는 점이다. 일반적으로 복소수 형태의 고유치의 경우에 있어서 고유치의 순서는 실수부의 크기가 아니라 고유치의 절댓값이나 허수부(imaginary part)의 크기에 따라 정해지기 때문에 Routh-Hurwitz 기준으로는 정확한 순서대로 고유치의 개수를 구할 수 없다. 이상에서 검토한 바와 같이 Routh-Hurwitz 기준은 감쇠의 영향을 고려한 고유치문제의 누락된 고유치 검사방법에 이용하기에는 부적절한 이론이다.

### 3.4 편각의 원리(Argument principle)

편각의 원리는 식 (9)와 같은 다항식  $f(z)$ 의 극점(pole)과 영점(zero) 개수의 차이를 규정하는 다음과 같은 식으로부터 유도된다(Pearson, 1974):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P \quad (18)$$

여기서  $z$ 는 복소수,  $C$ 는 단순폐곡선,  $N$ 은 다항식  $f(z)$ 의 영점(zero)의 개수,  $P$ 는  $f(z)$ 의 극점(pole)의 개수이고,  $i = \sqrt{-1}$ 이다.

다항식  $f(z)$ 가 단순폐곡선  $C$ 의 내부와 곡선상에서 해석적이고, 극점(pole)이 존재하지 않는다면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad (19)$$

여기서  $N$ 은 다항식  $f(z)$ 의 영점(zero)의 개수,  $\Delta\theta$ 는  $f(z)$ 의 편각의 변화량을 나타낸다.

위 식의 의미는 다음과 같다. 복소  $z$  평면에서 영역  $C$ 내에 존재하는 함수  $f(z)$ 의 영점(zero)의 개수는  $z$  평면에서 영역  $C$ 상을 이동하는 이동점  $z$ 에 따라  $f(z)$  평면에서 이동하는 이동점  $w = f(z)$ 가  $f(z)$  평면의 원점을 중심으로 회전하는 횟수와 같다(그림 2참조).

이 이론도 앞 절의 Routh-Hurwitz 기준과 마찬가지로 기본적으로 다항식의 근을 파악하는 방법이다. 따라서 이 이론을 감쇠의 영향을 고려한 고유치문제의 누락된 고유치 검사 방법에 이용하기 위해서는 행

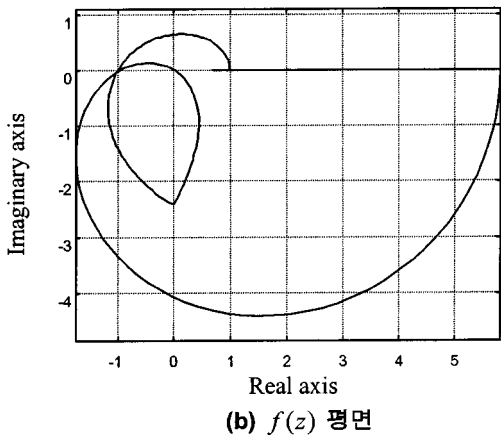
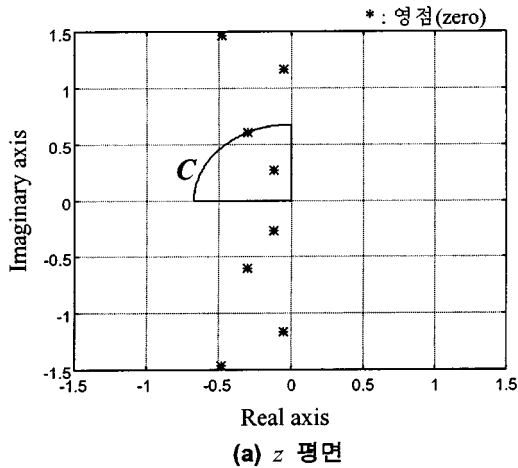


그림 2. 편각의 원리(argument principle)

렬 형태의 고유치문제가 아닌 식 (20)과 같은 다항식 형태의 특성방정식을 이용하여야 한다.

$$f(z) = \det(K + zC + z^2M) \quad (20)$$

그러나 이 방법에서는 Routh-Hurwitz 기준과는 달리 다항식의 계수는 필요 없고, 단지 다항식  $f(z)$ 의 값만 이용하면 되기 때문에 Routh-Hurwitz 기준에 비해서 필요한 연산회수가 현저히 작다. 따라서 편각의 원리는 감쇠를 고려한 고유치문제의 누락된 고유치 검사기법에 실제로 적용이 가능한 이론이다. 보다 자세한 내용은 다음 장에 기술하였다.

#### 4. 제안 방법

4.1 편각의 원리를 이용한 누락된 고유치 검사기법  
3.4 절에서 기술한 바와 같이, 감쇠를 고려한 고유

치문제의 누락된 고유치 검사기법에 실제적으로 적용이 가능한 수학적 이론은 편각의 원리이다. 그러나 편각의 원리도 3장에서 검토된 다른 수학적 이론들과 마찬가지로 다항식의 근의 개수를 파악하기 위해 정의된 이론이기 때문에 행렬형태의 고유치문제에 적용하기 위해서는 적절한 수정이 필요하다.

실제 대형구조물의 고유치문제에서는 3.4절의 그림 2(b)와 같이 고유치문제에 대한 특성방정식을 복소 평면(complex plane)에 나타낸 후 이를 이용해 원점에 대한 회전횟수를 구할 수는 없다. 그 대신에, 그림 2(a)에 있는 단순폐곡선  $C$ 를 여러 검색점(checking point)의 집합으로 고려한 후에, 그 결과를 가지고 단순폐곡선  $C$ 내의 고유치 개수를 추정한다. 즉, 각각의 검색점에 대해  $LDL^T$  행렬분해를 수행한 후, 행렬  $D$ 의 대각요소들을 곱한 결과를 아래 식 (21)와 같이 극좌표 형태(polar form)로 나타내어 편각  $\theta_j$ 를 구한다. 편각  $\theta_j$ 는 0도에서 360도 사이의 값을 갖는다.

$$p(z_j) = \det(K + z_j C + z_j^2 M) = \det LDL^T = \prod_{i=1}^n d_{ii} = r_j \angle \theta_j \quad (21)$$

그림 3을 보면서, 편각의 원리를 이용한 누락된 고유치 검사과정을 살펴보자. 여기서 단순폐곡선  $C$ 를 제2사분면으로 한정된 것은 해석 대상 구조물이 경감쇠(underdamped) 시스템일 경우 고유치는 항상 공액복소수 짝(complex conjugate pair) 형태로 나타나기 때문이다. 따라서 제2사분면만을 고려해서 구해진 고유치 개수에 두배를 취하면 총 고유치의 개수가 된다. 이를 통하여 연산횟수를 반으로 절감할 수 있다. 검사과정

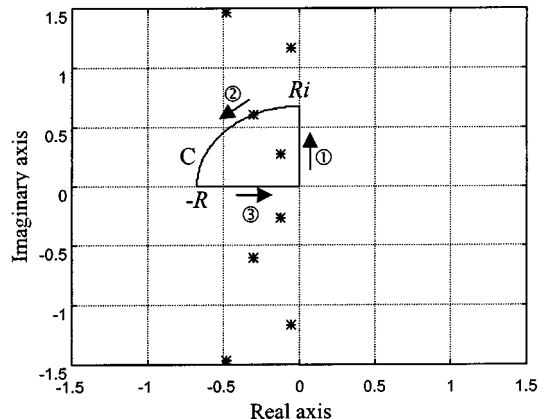


그림 3. 편각의 원리를 이용해 누락된 고유치 검사하는 과정

표 1. 제안방법의 알고리즘

- 1단계: 검색점 최대크기  $R$  선정
  - $p$ 번째 고유치의 크기( $|\lambda_p|$ )보다 1.01배 큰 값을 취한다.
- 2단계: 허수축(원점  $\rightarrow Ri$ ) 검색
  - 대략  $p$ 개의 검색점을 선정한다.
  - 각 경우에 대해  $LDL^T$  행렬분해를 수행한다.
  - 각 경우에 대해 편각  $\theta$ 를 계산한다.
- 3단계: 제2사분면(90도  $\rightarrow$  180도) 검색
  - 대략  $p$ 개의 검색점을 선정한다.
  - 각 경우에 대해  $LDL^T$  행렬분해를 수행한다.
  - 각 경우에 대해 편각  $\theta$ 를 계산한다.
- 4단계: 편각의 변화 검토
  - 각 검색점에서의 편각의 변화를 검토한다.
  - 총 회전횟수를 추정한다.
  - 고유치해석을 통해 구해진 고유치 개수  $p$ 와 비교한다.

이전에 수행된 고유치 해석을 통해 계산된  $p$ 개의 고유치 중에 누락된 고유치 여부를 찾기 위해서는 최소한  $2p$ 개 이상의 검색점이 필요하다. 이는 편각의 변화를 실수 없이 관찰하기 위함이다. 먼저 원점을 시점으로 하여 허수축으로  $p$ 번째 고유치의 크기보다 약간 큰값( $R=1.01|\lambda_p|$ )까지 탐색한다(그림 3의 ①). 이때 대략  $p$ 개 이상의 검색점을 선정하고 각 경우의 편각을 구한다. 그런 후에, 제2사분면에서 반지름  $R$ 의 원을 따라서 시계반대방향으로 탐색한다(그림 3의 ②). 이때에도 대략  $p$ 개 이상의 검색점을 선정하고 각 경우의 편각을 구한다. 마지막으로, 실수축은 편각의 변화를 일으키지 않기 때문에 생략해도 된다(그림 3의 ③). 각 검색점에서의 편각의 값을 검토하여 회전횟수를 추정한다. 마지막으로 계산된 총 회전횟수와 구해진 고유치의 개수( $p$ )를 비교하여 누락된 고유치 여부를 판별한다. 제안방법의 알고리즘은 표 1과 같다.

4.2. 수치예제

제안방법의 효용성을 검증하기 위한 수치해석의 대상 구조물은 그림 4와 같이 3층에 집중감쇠기(concentrated damper)를 설치한 4층 전단벽식 건물(shear building)(Craig, Jr., 1981)이다. 이 구조물은 4 자유도 비비례감쇠 시스템이다.

해석대상 구조물의 고유치는 다음의 표 2와 같다(MATLAB 이용).

고유치에 대응하는 고유벡터를 가지고 모드중첩법을

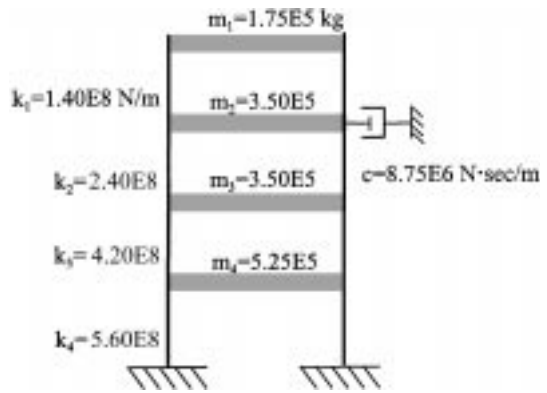


그림 4. 4층 전단벽식 건물

수행하기 위해서는 먼저 누락된 고유치가 있는지를 검사하는 과정을 거쳐야 한다. 고유치해석을 수행하여 저차 6개의 고유치만을 구했다고 가정할 때( $p=6$ ), 제안방법의 알고리즘에 따라 고유치 개수 검사방법을 수행하면 다음과 같다.

1단계: 검색점 최대크기 선정

5번째 고유치의 크기( $|\lambda_5|$ )는 39.5278이다. 최대 검색점의 크기  $R$ 은 이 값의 1.01배인 39.9231이다.

2단계: 허수축(원점  $\rightarrow Ri$ ) 검색

허수축은 5개의 검색점을 선정하였다. 각 검색점의 위치는  $0.2R, 0.4R, 0.6R, 0.8R, 1.0R$ 이다. 각각의 경우에 대하여 행렬분해를 수행하고, 그 때의 편각의 변화는 표 3에 나타낸 바와 같다.

3단계: 제2사분면(90도  $\rightarrow$  180도) 검색

허수축은 9개의 검색점을 선정하였다. 각 검색점의

표 2. 4층 전단벽식 건물의 고유치

모드번호	고유치
1,2	$-5.8291 \pm 12.7071i$
3,4	$-0.1149 \pm 29.6608i$
5,6	$-5.6062 \pm 39.1282i$
7,8	$-0.9499 \pm 55.2108i$

표 3. 허수축에서의 편각의 변화

검색점	편각의 ( $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ )	회전횟수
0.2R	39.09	0
0.4R	116.50	0
0.6R	160.85	0
0.8R	7.85	1
1.0R	77.85	0



표 4. 제2사분면에서의 편각의 변화

검색점	편각의 크기( $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ )	회전횟수
$R < 100^\circ$	290.15	0
$R < 110^\circ$	357.02	0
$R < 120^\circ$	50.74	1
$R < 130^\circ$	103.62	0
$R < 140^\circ$	155.99	0
$R < 150^\circ$	207.74	0
$R < 160^\circ$	258.92	0
$R < 170^\circ$	320.41	0
$R < 180^\circ$	0.0	1

위치는  $R < 100^\circ$ ,  $R < 110^\circ$ ,  $R < 120^\circ$ ,  $R < 130^\circ$ ,  $R < 140^\circ$ ,  $R < 150^\circ$ ,  $R < 160^\circ$ ,  $R < 170^\circ$ ,  $R < 180^\circ$ 이다. 각각의 경우에 대하여  $LDL^T$  행렬분해를 수행하고, 그때의 편각의 변화는 표 4에 나타난 바와 같다.

#### 4단계: 편각의 변화 검토

표 3 및 표 4를 통하여 각 검색점에서의 편각의 변화를 검토한 후, 총 회전횟수를 추정하였다. 허수축에서의 편각의 변화는 437.85도이고 제 2 사분면에서의 편각의 변화는 642.15도이다. 따라서 총 편각의 변화량은 1080도이고, 총 회전횟수는  $1080/360 = 3$ 번이다. 즉 제2사분면의 검사영역 내에 3개의 고유치가 존재한다는 것을 알 수 있었다. 그런데 감쇠를 고려한 고유치문제에서는 고유치가 공액복소수 쌍(complex conjugate pair)으로 존재하므로, 제 3사분면까지 고려한 총 고유치의 개수는 6개가 된다. 이 값은 고유치 해석을 통해 구해진 고유치 개수( $p = 6$ )와 일치한다. 따라서 제안방법은 비비례감쇠 시스템의 고유치해석에서 고유치 개수를 정확하게 검사하였다. 이러한 결과는 제안방법이 비비례감쇠 시스템에 대한 고유치문제의 누락된 고유치 검사 방법으로 사용될 수 있음을 보여주는 것이다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 비비례감쇠 시스템에 대한 고유치해석의 누락된 고유치 검사방법을 제안하였다. 본 연구를 통해 도출된 주요 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 모드중첩법을 이용하여 비비례감쇠 시스템에 대한 동적해석을 정확하게 수행하기 위해서는, 감쇠를

고려한 고유치문제에 대한 누락된 고유치 검사방법이 반드시 필요하다.

(2) 여러 수학이론들을 대상으로 검토를 수행한 결과, 감쇠를 고려한 고유치문제의 누락된 고유치를 검사하는데 이용이 가능한 수학이론은 편각의 원리(argument principle)임을 확인하였다.

(3) 편각의 원리를 이용하여 감쇠를 고려한 고유치 문제에 적용할 수 있는 누락된 고유치 검사방법을 개발하였고, 4자유도를 갖는 간단한 수치예제를 통해서 제안방법을 검증하였다.

제안방법을 실제 대형 비비례감쇠 시스템의 고유치 문제에 효율적으로 적용하기 위해서는 다음과 같은 문제점을 개선해야 한다. 감쇠를 고려하지 않은 고유치문제에 적용되는 Sturm 수열 검사방법이 단 한번의 행렬분해 과정을 통하여 누락된 고유치 검사가 완료되는 것과는 달리, 감쇠를 고려한 고유치문제에 적용되는 제안방법은 누락된 고유치 검사를 위하여 다수의 검색점을 지정한 후 각각에 대해 행렬분해 과정을 수행하기 때문에 과도한 연산횟수가 요구되는 문제점이 발생한다. 이러한 문제점을 개선하기 위한 연구는 현재 수행 중이다.

## 참고문헌

1. Bathe, K.J. (1996) *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, Inc.
2. Caughey, T.K. and O'Kelly, M.E.J. (1965) Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 32, pp. 583-588.
3. Craig, Jr., R.R. (1981) *Structural Dynamics; An Introduction to Computer Methods*. John Wiley & Sons.
4. Hughes, T.J.R. (1987) *The Finite Element Method; Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Inc.
5. Lee, I.W., Kim, M.C. and Robinson, A.R. (1998) Efficient Solution Method of Eigenproblems for Damped Structural Systems Using the Modified Newton-Raphson Technique. *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 124, No. 5, pp. 576-580.
6. Meirovitch, L. (1980) *Computational Methods in Structural Dynamics*. Sijthoff & Noordhoff.
7. Newland, D.E. (1989) *Mechanical Vibration Analysis and Computation*. Longman Scientific & Technical.
8. Kim, M.C. and Lee, I.W. (1999) Solution Eigenproblems for Non-Proportional Damping System by Lanczos Method. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 28, No. 5, pp. 157-172.

9. Korn, G.A. and Korn, T.M. (1968) *Mathematical Handbook* (2<sup>nd</sup> Ed.). McGraw-Hill Book Company.
10. Lancaster, P. and Tismenetsky, M. (1985) *The Theory of Matrices* (2<sup>nd</sup> Ed.). Academic Press.
11. Pearson, C.E. (1974) *Handbook of Applied Mathematics*. Van Nostrand Reinhold Company.
12. Petyt, M. (1990) *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. Cambridge University Press.
13. Tsai, J.S.H. and Chen, S.S. (1993) Root Distribution of a Polynomial in Subregions of the Complex Plane. *IEEE Trans. Automatic Control*. Vol. 38, No. 1, pp. 173-178.
14. Wilkinson, J.H. (1965) *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford University Press.
15. Yamada, I. *et al.* (1998) Algebraic Multidimensional Phase Unwrapping and Zero Distribution of Complex Polynomials - Characterization of Multivariate Stable Polynomials. *IEEE Trans. Signal Processing*. Vol. 46, No. 6, pp. 1639-1664.

(接受 : 1999. 2. 18)