

비비례 감쇠시스템의 해석을 위한 효율적인 모드 중첩법

Efficient Mode Superposition Method for Non-Classically Damped Systems

조상원* · 정형조* · 김동욱** · 이인원***

Cho, Sang Won · Jung, Hyung Jo · Kim, Dong Ok · Lee, In Won

Abstract

The improved mode superposition methods for non-classically damped systems are presented in this paper. Generally, the mode superposition method uses a relatively small subset of the normal modes of structures. The mode acceleration method and the modal truncation augmentation method improve the results of the mode superposition method by considering effects of truncated high modes. For using these methods to analyze non-classically damped systems, the systems are approximated to the classically damped systems and thereby the errors are induced. In this paper, the mode acceleration method and the modal truncation augmentation method are expanded to analyze the non-classically damped systems. The applicability of the expanded methods is verified by closed form solutions and numerical examples. The expanded modal truncation augmentation method is conditionally stable depending on the pattern of the external loading in the non-classically damped systems whereas the expanded mode acceleration method is stable for the all cases of loading. In the stable case, the results are the same with those of the expanded mode acceleration method.

Keywords : mode superposition method, non-proportional damping, mode acceleration method, modal truncation augmentation method

요 지

본 연구에서는 비비례 감쇠시스템을 효율적으로 해석할 수 있도록 모드 가속도법(Mode Acceleration Method)과 모드 절삭 보강법(Modal Truncation Augmentation Method)을 확장하고 그 사용성을 검증하였다. 비례 감쇠시스템의 동응답해석에 널리 사용되는 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법은 누락된 고차모드의 영향을 보정하여 모드 중첩법의 결과를 개선하는 방법이다. 기존의 방법들로 비비례 감쇠시스템을 해석하는 경우, 비비례 감쇠를 비례 감쇠로 근사하는 것이 일반적인 방법이다. 이러한 근사화 과정에서 필연적인 오차가 발생한다. 이에 본 연구에서는 구조물의 비비례 감쇠특성을 무시하지 않으며 정확하고 효율적으로 해석할 수 있도록 모드 가속도법과 모드 절삭보강법을 확장하였다. 비례 감쇠시스템에서는 모드 가속도법보다 모드 절삭 보강법이 더 효율적인 반면에, 비비례 감쇠시스템에서는 대부분의 경우에 있어서 확장된 두 방법의 효율성이 동일하다. 그러나 수치적 안정성은 확장된 모드 가속도법이 모드 절삭 보강법보다 우수하다. 이와 같은 확장된

*정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 박사과정
**한국원지력연구소 박사후 연구과정
***정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 교수

모드 가속도법과 모드 절삭 보강법의 사용성 검증을 위해서 이론적 방법과 수치예제를 수행하였다.

핵심용어 : 모드 중첩법, 비비례 감쇠, 모드 가속도법, 모드 절삭보강법

1. 서 론

동응답해석의 방법에는 이론적 해석법과 수치적 해석법이 있으며, 이론적 해석이 어려운 대형구조물의 경우에는 수치적 해석법이 일반적인 방법이다. 수치적 해석법으로는 직접 적분법과 모드 중첩법이 있다. 직접 적분법은 구조물의 운동방정식을 축약하지 않고 해석하기 때문에 정확하지만 계산량이 많다. 또한 해석의 안정성을 위해 시간 증분을 작게 하면 해석시간이 오래 걸리는 단점이 있다. 이에 반해 모드 중첩법은 구조물의 동적 특성을 잘 나타내는 소수의 저차 모드로써 구조물의 운동방정식을 축약하여 해석하기 때문에 계산량이나 계산시간이 단축되어 경제적이다. 그러나 모드 중첩법은 구조물의 운동방정식을 축약하여 해석하므로 누락되는 고차 모드로 인해 오차가 발생한다. 이에 모드 중첩법의 결과를 개선하기 위하여, 누락되는 고차 모드들의 영향을 보정한 방법들이 많은 연구들에서 제안되었다. 누락되는 고차 모드로 인한 오차를 보정한 방법으로 모드 가속도법(Mode Acceleration Method)과 모드 절삭 보강법(Modal Truncation Augmentation Method)이 있다.

모드 가속도법은 Williams에 의해 처음으로 소개되었으며 Bisplinghoff와 Ashley¹⁾에 의해 감쇠가 없는 시스템에 적용되었다. Hurty와 Rubenstein²⁾은 본격적으로 비례 감쇠시스템에 모드 가속도법을 적용하였으며, Hanstee과 Bell³⁾은 모드 가속도법과 단순한 모드 중첩법(Mode Displacement Method)을 주파수 영역에서 비교하였다. 모드 절삭 보강법은 Wilson과 Itoh⁴⁾에 의해 처음으로 그 개념이 제안된 최근의 이론이다. Guyan⁵⁾은 특정한 하중이 작용하는 구조물에 적용하였으며, Dickens⁶⁾는 보다 일반화된 하중이 작용하는 구조물에 모드 절삭 보강법을 적용하였다.

이러한 일반적인 모드 중첩법과 개선된 모드 중첩법인 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법은 비례 감쇠 시스템의 해석에 적합한 형태를 갖고 있다. 그러나 대부분의 일반적인 구조물은 비비례 감쇠 특성을 갖고 있다. 특히 지반구조 상호작용 시스템, 진동 제어기를 갖춘 대형구조물 그리고 다양한 재료로 구성된

실제 구조물 등은 감쇠력이 매우 큰 비비례 감쇠 거동을 한다. 비비례 감쇠시스템의 해석에 기존의 모드 중첩법을 적용하는 경우 비비례 감쇠를 비례 감쇠로 근사하여 사용하는 것이 일반적인 방법이다. 그러나 이러한 방법은 필연적으로 오차⁷⁾를 포함하게 되어 신뢰할 수 없는 결과를 준다. 그러므로 실제 구조물의 동응답해석을 정확하고 효율적으로 수행하기 위해서는 비비례 감쇠시스템에 적용가능하며 정확한 결과를 주는 해석방법이 필요하다.

이에 본 연구에서는 비례 감쇠시스템의 동응답해석에 널리 사용되는 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법을 비비례 감쇠시스템을 효율적으로 해석할 수 있는 형태로 확장하고 그 사용성을 이론적 방법과 수치예제로써 검증하였다.

2. 비비례 감쇠시스템에서의 모드 중첩법

2.1 비비례 감쇠시스템에서의 모드 중첩법

행렬식으로 표현된 구조물의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{R}_0 r(t) \quad (1)$$

여기서 \mathbf{M} 은 구조물의 질량행렬(mass matrix)이며 \mathbf{C} 는 감쇠행렬(damping matrix), 그리고 \mathbf{K} 는 강성행렬(stiffness matrix)이다. 또한 \mathbf{R}_0 는 하중벡터이고, $r(t)$ 는 하중의 시간함수이다. 비감쇠 시스템(undamped system)의 고유 벡터, ϕ_i 와 고유 진동수, ω_i 는 식(2)와 같은 고유치 문제로부터 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\phi_i \quad (2)$$

고유벡터, ϕ_i 가 식(1)의 감쇠행렬 \mathbf{C} 에 대하여 직교성을 만족할 때, 그 때의 시스템을 비례 감쇠시스템이라 한다. 구조물의 변위는 식(3)과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u}(t) = \Phi q(t) \quad (3)$$

여기서 $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]$ 이다.

위와 같은 변위와 고유모드의 직교성을 이용하여

식 (1)의 운동방정식을 모드 좌표로 변환하면 식 (4)와 같은 n 개의 독립된(uncoupled) 방정식으로 변환할 수 있다.

$$\ddot{q}_i + 2\beta_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i = \phi_i^T \mathbf{R}_0 r(t) \quad (i=1 \cdots n) \quad (4)$$

여기서 ϕ_i 는 구조물의 i 번째 고유모드이고, β_i 는 감쇠비이며, ω_i 는 구조물의 i 번째 고유진동수이다. 이와 같은 방법으로 구해진 모드 좌표에서의 응답은 식 (5)와 같이 실제 좌표로 역 변환할 수 있으며, 이러한 일련의 과정을 모드 중첩법(mode superposition method)^{9, 15, 16}이라 한다.

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^m \phi_i q_i(t) \quad (m \ll n) \quad (5)$$

위 식에서 구조물이 갖는 n 개의 모드 중에 저차의 m 개만을 사용함으로써, 구조물의 동응답 해석에 소요되는 시간을 직접 적분법을 이용하는 경우 보다 월등히 절약할 수 있다.

비비례 감쇠시스템^{9, 12}에서는 고유벡터로써 감쇠행렬 \mathbf{C} 를 대각화 할 수 없으므로, 식 (1)의 운동방정식을 식 (4)와 같은 n 개의 독립된 모드좌표로 변환할 수 없다. 이러한 비비례 감쇠시스템에서는 식 (1)의 운동방정식을 식 (6)의 상태공간 방정식으로 바꾸어 모드 중첩법을 적용하는 것이 일반적인 방법^{11, 12, 14}이다.

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}_0 r(t) \quad (6)$$

여기서 행렬 \mathbf{B} 와 \mathbf{A} 는 식 (7)과 같이 행렬 \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} 로 이루어지는 행렬이며, $\mathbf{y}(t)$ 는 변위와 속도로 이루어진 벡터이고 \mathbf{F}_0 는 입력 하중벡터와 zero벡터로 이루어져 있으며 $r(t)$ 는 입력 하중의 시간함수이다.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

식 (7)에서 행렬 \mathbf{B} 와 \mathbf{A} 는 차수 $2n$ 의 행렬이며, 벡터 $\mathbf{0}$ 는 모든 요소가 zero로 구성된 차수 n 의 벡터이다. 또한 \mathbf{R}_0 는 비례 감쇠시스템에서 정의되었던 차수 n 의 하중 벡터이다. 따라서 $\mathbf{y}(t)$ 와 \mathbf{F}_0 는 차수 $2n$ 의 크기를 갖는 벡터이다. 식 (6)의 상태공간 방정식에 모드 중첩법을 적용하기 위해서는 고유치 문제로부터 고유 벡

터와 고유치를 먼저 구해야 한다. 식 (6)에 대한 고유치 문제는 식 (8)과 같이 정의된다.

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i = s_i \mathbf{B}\boldsymbol{\psi}_i \quad (8)$$

$\boldsymbol{\psi}_i$ 는 고유모드 벡터이며 s_i 는 구조물의 고유치로, 비례 감쇠시스템과는 다르게 식 (9)과 같은 공액 복소쌍(complex conjugate pair)의 형태가 된다.

$$s_i = -\xi_i\omega_i \pm i\omega_{D_i} \quad \boldsymbol{\psi}_i = \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_i \\ s_i \hat{\phi}_i \end{Bmatrix} \quad (9)$$

여기서 $\omega_{D_i} = \omega_i\sqrt{1-\xi_i^2}$ 이며 $\boldsymbol{\psi}_i$ 는 차수 $2n$ 의 벡터로써 차수 n 의 $\hat{\phi}_i$ 벡터와 차수 n 의 $s_i \hat{\phi}_i$ 벡터로 구성된다. 이때 구조물의 변위는 식 (10)과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{z}(t) \quad (10)$$

여기서 $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1 \boldsymbol{\psi}_2 \cdots \boldsymbol{\psi}_{2n}]$ 이다.

상태공간 방정식의 차수가 $2n$ 이므로, 식 (10)과 같이 $2n$ 개의 복소 고유 벡터와 복소 고유치가 존재하며, 이들은 n 개의 공액 복소쌍을 형성한다. $\boldsymbol{\psi}_i$ 는 상태공간 방정식의 복소 고유 벡터이므로 행렬 \mathbf{A} 와 행렬 \mathbf{B} 에 직교한다. $\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{z}(t)$ 의 변환과 $\boldsymbol{\psi}_i$ 의 직교성을 이용하면 식 (6)의 상태공간 방정식을 식 (11)과 같은 독립된(uncoupled) $2n$ 개의 방정식으로 변환할 수 있다.

$$\dot{z}_i - s_i z_i = \boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{F}_0 r(t) \quad (11)$$

식 (11)의 변환된 모드 좌표에서의 응답 z_i 역시 복소수의 형태로 구해진다. 모드 좌표에서의 응답 z_i 는 $\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{z}(t)$ 을 이용하여 다시 실제 공간으로 역 변환할 수 있으며 식 (12)는 이러한 과정을 나타낸다.

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{2q} \boldsymbol{\psi}_i z_i(t) \quad (q \ll n) \quad (12)$$

전체 $2n$ 개 고유모드 중에서 저차의 $2q$ 개만을 이용하므로 비비례 감쇠시스템에서도 효율적인 해석을 할 수 있다.

2.2 비비례 감쇠시스템에서의 모드 가속도법

일반적인 모드 중첩법에서는 식 (12)와 같이 전체 $2n$ 개의 모드 중에서 저차의 $2q$ 개만을 해석에 이용하

기 때문에 고차 모드의 영향이 누락되어 오차를 유발한다. 모드 가속도법과 뒤에서 논의될 모드 절삭 보강법은, 전체 시스템에 대하여 추가적인 모드를 사용하지 않고, 누락되는 고차모드의 영향을 보정하여 일반적인 모드 중첩법의 결과를 개선하는 효율적인 방법이다.

그러나 기존의 모드 가속도법^{9,13)}은 비례 감쇠시스템에 적합한 형태를 가지고 있다. 이러한 기존의 모드 가속도법을 비비례 감쇠시스템에 적용하는 것은 복소 영역으로 확장하는 것을 의미한다. 따라서 차수 n 의 운동방정식을 차수 $2n$ 의 상태공간 방정식으로 변환하여 모드 가속도법을 적용한다.

모드 가속도법에 의한 변위는 해석에 사용된 저차 모드에 의한 변위, y_s 와 누락된 고차 모드의 영향을 보정한 변위, y_{ima} 로 구성되므로 $y_{ma} = y_s + y_{ima}$ 로 나타낼 수 있다. y_s 는 해석에 포함된 저차 모드에 의한 변위로 일반적인 모드 중첩법의 결과와 동일하다. 누락된 고차모드의 보정 변위량, y_{ima} 는 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저 식 (6)의 상태공간 방정식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\dot{y}(t) = A^{-1}B\dot{y}(t) - A^{-1}F(t) \quad (13)$$

식(12)의 상태공간 방정식의 해를 $\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^{2q} \psi_i \dot{z}_i$ 로 변환하여 식(13)의 우변에 대입하면, 비비례 감쇠시스템에서의 모드 가속도법에 의한 변위를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y_{ma}(t) = A^{-1}B \sum_{i=1}^{2q} \psi_i \dot{z}_i - A^{-1}F(t) \quad (q \ll n) \quad (14)$$

식 (14)에서 식 (12)의 저차모드에 의한 변위량을 빼면, 식 (15)의 누락된 고차모드의 보정 변위량, y_{ima} 를 구할 수 있다.

$$y_{ima} = -A^{-1}R_r r(t) \quad (15)$$

여기서 R_r 는 누락 하중 벡터(force truncation vector)로서 $R_r = F_0 - R_s$ 로 정의되며 R_s 는 모드 하중 벡터이다. 모드 하중 벡터 R_s 는 입력 하중 벡터 중에서 해석에 포함된 소수의 저차 모드에 의해 표현되는 부분으로써 식(16)과 같다.

$$R_s = B[\psi_i \bar{\psi}_i][\psi_i \bar{\psi}_i]^T F_0 \quad (16)$$

여기서 ψ_i 는 고유 벡터이며, $\bar{\psi}_i$ 는 공액 복소쌍이다. 위와 같이 해석에 포함되는 저차 모드에 의한 변위, y_s 외에 비비례 감쇠시스템에서의 고차 모드 보정 변위, y_{ima} 가 모드 가속도법에 의해 추가되었으며, 그 보정 방법은 식 (15)와 같이 정적인 방법으로 이루어진다.

2.3 비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법

비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법에 의한 변위는 모드 가속도법에서와 같이 $y_{mi} = y_s + y_{ima}$ 의 두 부분으로 이루어진다. y_s 는 해석에 포함된 저차 모드에 의한 변위로 일반적인 모드 중첩법의 결과와 동일하며, y_{ima} 는 모드 절삭 보강법에 의한 누락된 고차 모드의 보정 변위량이다. 모드 절삭 보강법은 누락되는 고차모드의 영향을 P 벡터를 생성하여 보정한다. 모드 절삭 보강법에서 P 벡터는 누락하중벡터 R_r 를 사용하여 구한 Ritz벡터와 같다. 따라서 P 벡터는 행렬 A 와 행렬 B 에 대해서 기존의 고유 벡터들과 직교하지만 고유치 문제, $AP \neq \omega_p BP$ 를 만족하지 않는다. 이러한 특성 때문에 P 벡터를 '유사 고유벡터'라고도 한다. 비비례 감쇠시스템에 대한 '유사 고유 벡터', P 벡터는 식 (17)과 같이 구한다.

$$AP = R_r, \quad P = \frac{1}{\alpha} \bar{P} \quad (17)$$

여기서 $\alpha = (\bar{P}^T B P)^{-1/2}$ 이고, R_r 는 누락 하중 벡터이다. 생성된 P 벡터는 비례 시스템^{6,10)}과는 달리 차수 $2n$ 의 벡터이다. 이렇게 생성된 P 벡터에 의한 누락 고차 모드의 보정 변위를 $y_{mi} = Pz_p(t)$ 로 놓으면 상태공간 방정식을 식 (18)과 같이 변형시킬 수 있다.

$$P^T B P \dot{z}_p(t) - P^T A P z_p(t) = P^T R_r r(t) \quad (18)$$

또한 식 (18)은 P 벡터의 직교성에 의해 식 (19)와 같은 모드 좌표로 변환할 수 있다.

$$\dot{z}_p(t) - s_p z_p(t) = P^T R_r r(t) \quad (19)$$

여기서 $s_p = P^T A P$ 이다. 식 (19)에 의해 $z_p(t)$ 를 구한 후, $y_{mi} = Pz_p(t)$ 을 이용하여 역변환을 하면, 비비례 감쇠시스템에서 모드 절삭 보강법에 의한 누락되는 고차 모드의 보정 변위, y_{ima} 를 구할 수 있다.

비례 감쇠시스템에서는 일반적으로 누락된 고차 모드의 영향을 정적인 방법으로 보정하는 모드 가속도

법에 비해서 '유사 고유 벡터', \mathbf{P} 벡터를 생성하여 동적인 방법으로 보정하는 모드 절삭 보강법이 더 효율적이고 정확하다.⁸⁾ 그러나 비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법은 비례 감쇠시스템에서와는 다른 특성을 갖는다. 비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법의 특성을 안정성과 안정한 경우에 대하여 수렴특성으로 나누어 살펴 보았다.

3. 비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법의 특성

3.1 비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법의 안정성

비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법의 수치적 안정성을 알아보기 위해서 식 (19)의 일반 해를 구하여 보자. 식 (19)는 변수, $z_p(t)$ 에 관한 1차 미분방정식이다. 미분방정식의 초기 조건을 $z_p(0) = 0$ 으로 놓고 입력하중의 시간 함수를 $r(t) = \sin(\omega t)$ 와 같이 삼각함수로 놓으면, 식 (19)의 해는 식 (20)과 같다.

$$z_p(t) = \frac{\mathbf{P}^T \mathbf{R}_t}{s_p^2 + \omega^2} (\omega e^{s_p t} - s_p \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) \quad (20)$$

지진과 같이 복잡한 입력하중의 시간함수도 삼각함수의 조합으로 나타낼 수 있으므로, 입력 하중의 시간 함수를 삼각함수로 가정한 것은 타당하다.

식 (20)의 해가 물리적으로 안정하기 위해서는 $s_p < 0$ 의 제한조건이 필요하다. $s_p = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ 이므로, $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} < 0$ 를 만족하는 경우에만 비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법이 수치적으로 안정하다. 행렬 \mathbf{A} 는 일반적으로 정칙행렬이 아니므로 모드 절삭 보강법의 수치적 안정성은 \mathbf{P} 벡터와 연관된다. 또한 \mathbf{P} 벡터는 누락하중벡터 \mathbf{R}_t 에 의해 영향을 받으므로 하중벡터의 형태에 따라 모드 절삭보강법의 안정성이 결정된다.

3.2 비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법의 수렴특성

실제 구조물에서 \mathbf{A} 행렬은 질량과 강성행렬로 이루어지는 차수 $2n$ 의 행렬로써, 실제 구조물의 물성치를 행렬의 요소로 갖는다. 또한 ω 는 구조물에 가해지는 입력하중의 주파수로서, 그 값이 수십에서 수백 rad/sec로 제한되어 있다. 즉 실제 구조물에서는 $s_p = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$

가 입력하중의 가진 주파수, ω 에 비해 그 절대값이 훨씬 크다.

$$|s_p| \gg \omega \quad (21)$$

따라서 모드 절삭 보강법이 안정한 경우, 식 (20)을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} z_p(t) &= \frac{\mathbf{P}^T \mathbf{R}_t}{s_p^2 + \omega^2} (\omega e^{s_p t} - s_p \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) \\ &= \frac{-s_p \mathbf{P}^T \mathbf{R}_t}{s_p^2 + \omega^2} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (22)$$

$y_{i_m} = \mathbf{P} z_p(t)$ 의 관계를 이용하여 역변환을 하면, 고차 모드에 대한 보정 변위, y_{i_m} 는 다음과 같다.

$$y_{i_m} = \mathbf{P} z_p(t) = \mathbf{P} \frac{-s_p \mathbf{P}^T \mathbf{R}_t}{s_p^2 + \omega^2} \sin(\omega t) \quad (23)$$

\mathbf{P} 벡터는 식 (17)로 부터 $\mathbf{P} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}_t$ 의 관계가 있으므로 식 (24)와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$y_{i_m} = -\frac{s_p \mathbf{P}^T \mathbf{R}_t}{\alpha(s_p^2 + \omega^2)} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}_t \sin(\omega t) \quad (24)$$

여기서 식 (15)의 모드 가속도법에 의한 고차 모드의 보정량 $y_{i_m}(t)$ 를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$y_{i_m} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}_t r(t) \quad (15)$$

식 (24)는 식 (15)의 모드 가속도법에 의한 결과와 유사하며, 식(24)의 계수 항이 $\frac{s_p \mathbf{P}^T \mathbf{R}_t}{\alpha(s_p^2 + \omega^2)} \approx 1$ 의 조건

을 만족할 경우 모드 가속도법의 결과와 일치 한다. 일반적인 경우에 식 (24)의 계수가 1을 만족하여 식 (15)의 모드 가속도법의 결과와 같음을 증명하면 다음과 같다. 식 (24)의 계수 항의 분자와 분모를 s_p 로 나누어 주고, 3.1절의 조건 $|s_p| \gg \omega$ 을 이용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{s_p \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{R}}_t}{\alpha(s_p^2 + \omega^2)} \approx \frac{\mathbf{P}^T \hat{\mathbf{R}}_t}{\alpha s_p} \quad (25)$$

여기서 $\hat{\mathbf{R}}_t = \alpha \mathbf{A} \mathbf{P}$ 이고, $s_p = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ 이므로 식 (25)는 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{s_p \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{R}}_t}{\alpha(s_p^2 + \omega^2)} \approx \frac{\mathbf{P}^T \hat{\mathbf{R}}_t}{\alpha s_p} = \frac{\alpha \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}}{\alpha \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}} = 1 \quad (26)$$

따라서 $s_p < 0$ 을 만족하는 모드 절삭보강법의 결과는 식 (26)에 의해 식 (27)로 정리되며 이것은 식 (15)에 표기한 모드 가속도법의 결과와 같음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} y_{t_m} &= -\frac{s_p \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{R}}_t}{\alpha(s_p^2 + \omega^2)} \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_t \sin(\omega t) \\ &\approx -\mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_t \sin(\omega t) = y_{t_{ma}} \end{aligned} \quad (27)$$

입력하중의 시간 함수가 *cosien*함수인 경우에도 같은 방법으로 증명할 수 있다.

위의 결과들을 정리하면, 비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭보강법은 $s_p < 0$ 의 조건에 따라 제한적으로 적용가능하며, 적용된 모드 절삭보강법은 모드 가속도법과 같은 결과를 주는 것을 증명하였다. 위식의 유도는 *sine*입력하중과 *cosine*입력하중에 대해 증명하였으나 다양한 입력하중의 시간함수는 *sine*함수와 *cosine*함수의 조합으로 나타낼 수 있으므로 일반적인 증명이다.

비례 감쇠시스템에서는 누락된 고차 모드를 정적으로 보정하는 모드 가속도법에 비해 동적으로 보정하는 모드 절삭 보강법이 일반적으로 더 효율적인 반면에, 비비례 감쇠시스템으로 확장된 모드 가속도법과 모드 절삭보강법은 누락된 고차모드를 보정하지 않는 일반적인 모드 중첩법에 비해 더 효율적이긴 하지만 두 방법사이에는 차이가 없다. 그러나 수렴의 안정성을 고려한다면 확장된 모드 가속도법이 확장된 모드 절삭보강법보다 우수한 방법이라고 할 수 있다. 4장의 수치예제에서는 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법의 수렴성을 일반적인 모드 중첩법과 비교하였다. 또한 비비례 감쇠시스템에서 s_p 의 조건에 따라 모드 절삭 보강법의 결과가 발산하는 경우와 수렴하는 경우를 나타내었고, 수렴하는 경우에는 모드 가속도법과 일치함을 보였다.

4. 수치예제

비비례 감쇠시스템으로 확장된 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법의 적용성을 검증하기 위하여 수치예제를 수행하였다. 첫 번째의 수치예제는 누락된 고차

모드의 영향을 보정한 모드 가속도법과 모드 절삭보강법의 효율성을 일반적인 모드 중첩법과 비교하기 위하여 수행하였다. 입력하중은 El Centro 지진하중을 사용하였으며 결과의 비교는 각 절점에서의 최대 전단력과 최대 휨 모멘트를 비교하였다. 또한 결과의 표시는 각각의 방법에 의한 각 절점에서의 최대 전단력과 최대 휨 모멘트를 1번 절점의 직접 적분법 해석결과 최대값으로써 정규화하여 나타내었다. 두 번째의 수치 예제는 비비례 감쇠시스템에 대한 모드 절삭 보강법의 적용성을 검증하기 위한 것으로서, 모드 절삭 보강법의 해가 수렴하지 않는 경우와 안정적으로 수렴할 때의 결과가 모드 가속도법의 해와 일치하는 경우 두 가지를 나타내었다.

4.1 지진 하중이 작용하는 집중 감쇠가 설치된 외팔보

지진 하중이 가해지는 그림 1과 같은 예제 구조물을 기본적인 모드 중첩법과 누락된 고차 모드의 영향을 보정하는 모드 가속도법과 모드 절삭보강법으로 해석하여 그 결과를 비교하였다. 그림 1의 예제 구조물은 10개의 빔 요소로 구성된 캔탈레버빔으로서, 각각의 절점에 집중감쇠가 설치되어 있는 비비례 감쇠시스템이다. 표 1은 구조물의 각 모드에 대한 고유치로 공액 복소쌍(complex conjugate pair) 형태임을 알 수 있다. 입력하중으로는 El Centro 지진의 N00W성분을 사용하였다. El Centro 지진(0.348 g)은 표준적인 강진으로 지진 에너지가 1~4 Hz에 집중되고 그 최대값은 1.5 Hz 정도에 위치한다.

지진 하중에 대한 각 방법의 응답비교를 그림 2~5

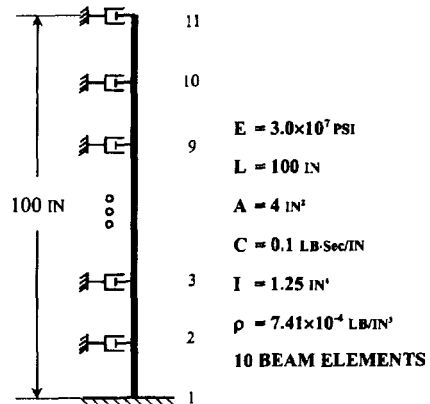


그림 1. 예제 구조물과 물성치

표 1. 예제 구조물의 고유치

| Mode Number | Eigenvalues |
|-------------|----------------------|
| 1 | -4.43482 - 39.29620i |
| 2 | -4.43482 + 39.29620i |
| 3 | -88.4454 - 231.3995i |
| 4 | -88.4454 + 231.3995i |
| 5 | -677.3535 - 147.892i |
| 6 | -677.3535 + 147.892i |

에 나타내었다. 각각의 그림의 Y축은 각 방법에 의한 응답을, 직접 적분법 해석결과 중에서 1번 절점의 최대값으로 정규화 시킨 값이며, X축은 절점 번호를 나타낸다. md1은 한 개의 저차 모드만을 사용한 일반적인 모드 중첩법(mode superposition method: 이하

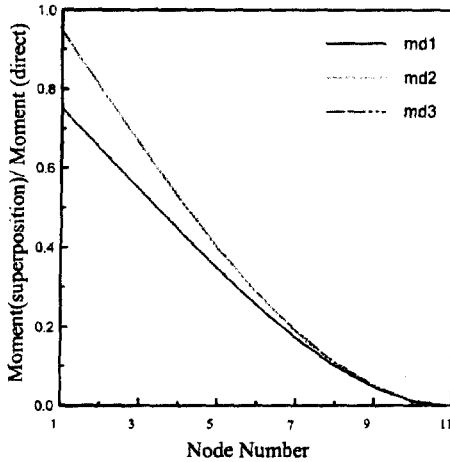


그림 2. MD 방법에 의한 모멘트

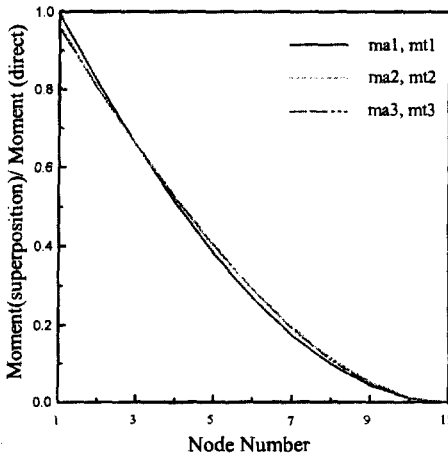


그림 3. MA 방법과 MT 방법에 의한 모멘트

MD 방법에 의한 결과이며, md2는 두 개의 저차모드가 중첩된 결과를, md3는 3개의 저차 모드가 중첩된 결과를 나타낸다. 또한 ma1은 누락된 고차모드를 보정하는 모드 가속도법(mode acceleration method: 이하 MA 방법)에 의한 결과로 한 개의 저차 모드만을 이용하는 경우이고, ma2는 두 개의 저차 모드를, ma3는 3개의 저차 모드를 사용한 결과이다. 동일하게 mt1은 한 개의 저차 모드만을 이용하는 모드 절삭 보강법(modal truncation augmentation method: 이하 MT 방법)에 의한 응답곡선을 나타내며, mt2는 두 개의 저차 모드를, mt3는 세 개의 저차 모드를 이용하는 모드 절삭 보강법을 나타낸다. 그림 3과 그림 5에 나타난 것과 같이, 모드 가속도법(MA 방법)의 결과와 모드 절삭 보강법(MT 방법)의 결과가 일치하는 것을 알 수 있다. 이것은 3.2절에서 모드 절삭 보강법이 $P^T A T < 0$ 의 조건을 만족하는 경우에 모드 가속도법의 결과와 일치하는 것을 나타낸다. 그림 2와 그림 3은 지진 하중에 대한 각각의 방법에 의한 모멘트를 비교한 것이다. 그림 2의 일반적인 모드 중첩(MD방법)에 비해 그림 3의 모드 가속도법과 모드 절삭보강법이 직접 적분법의 값에 더 잘 수렴하는 것을 알 수 있다. 이것은 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법에 의한 응답 곡선이 누락된 고차 모드의 영향을 추가적으로 보정하기 때문이다. 그림 4와 그림 5는 각 방법에 의한 전단력을 비교한 것이다. 그림 4의 일반적인 모드 중첩법에 비해, 누락된 고차 모드의 영향을 보정한 그림 5의 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법이 직접 적분법의 값에 더 잘 수렴하는 것을

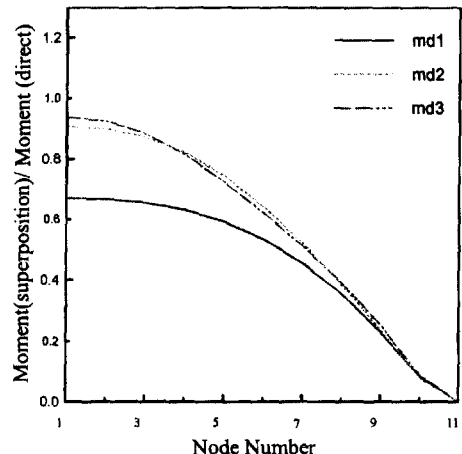


그림 4. MD 방법에 의한 전단력

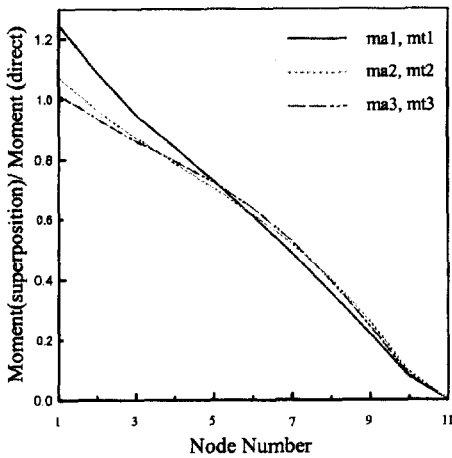


그림 5. MA 방법과 MT 방법에 의한 전단력

알 수 있다.

이상의 결과를 정리하면 비례 감쇠시스템에 적용되던 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법이 비비례 감쇠 시스템에 확장되어 적용되었으며, 누락된 고차 모드를 보정하는 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법이 그림 2와 그림 4의 일반적인 모드 중첩법보다 더 효율적인 것을 알 수 있다. 또한 3.2절의 조건이 만족될 때, 그림 3과 그림 4에서 나타난 것과 같이 확장된 모드 가속도법과 모드 절삭보강법의 결과가 일치하는 것을 알 수 있다.

4.2 10층 Shear Building

비비례 감쇠시스템에서의 모드 절삭 보강법의 적용성을 그림 6과 같은 예제 구조물을 통하여 나타내었다. 그림 6의 예제 구조물은 10개의 자유도를 갖는 Shear Building으로써 7층에 집중 감쇠가 부착되어진 비비례 감쇠시스템이고, 표 2는 구조물의 고유치를 나타낸다.

Load Case1과 Load Case2의 두 경우에 대해서 각각 생성된 P 벡터를 이용하여 모드 절삭 보강법의 안정성을 검토하였으며 안정한 경우에 모드 가속도법의 결과와 비교하였다. 두 경우 하중의 시간함수는 $\sin(32.0t)$ 로 같다. 그림 7과 그림 8은 Load Case1에 대한 구조물의 응답 결과를 그림으로 나타낸 것이다. Load Case1의 경우 $P^T A P = -9.4710 \times 10^3$ 으로써 $P^T A P < 0$ 의 조건을 만족시킨다. 따라서 그림 7의 모드 절삭보강법의 결과와 그림 8의 모드 가속도법의 결과가 일치하는 것을 알 수 있다. 그림 9와 그림 10은

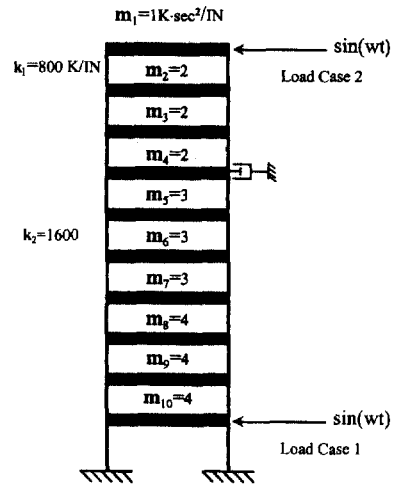


그림 6. 예제 구조물

표 2. 예제 구조물의 고유치

| Mode Number | Eigenvalues |
|-------------|--------------------|
| 1 | -0.0316 - 4.0100i |
| 2 | -0.0316 + 4.0100i |
| 3 | -0.0066 - 10.8381i |
| 4 | -0.0066 + 10.8381i |
| 5 | -0.0058 - 17.421i |
| 6 | -0.0058 + 17.421i |

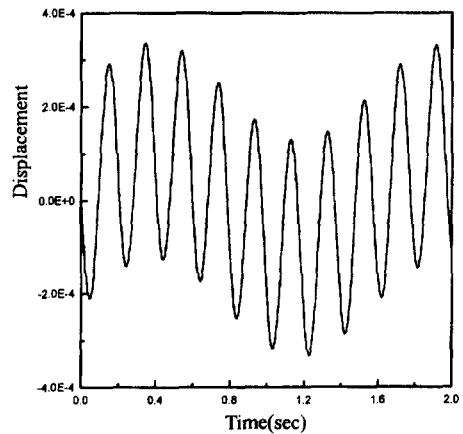


그림 7. Load Case1에 대한 MT 방법의 응답 곡선

Load Case2에 대한 구조물의 응답 결과를 그림으로 나타낸 것이다. Load Case2의 경우 $P^T A P = 6.2443 \times 10^3$ 으로써 $P^T A P < 0$ 의 조건을 만족시키지 못한다. 따라서 Load Case2의 모드 절삭 보강법의 해

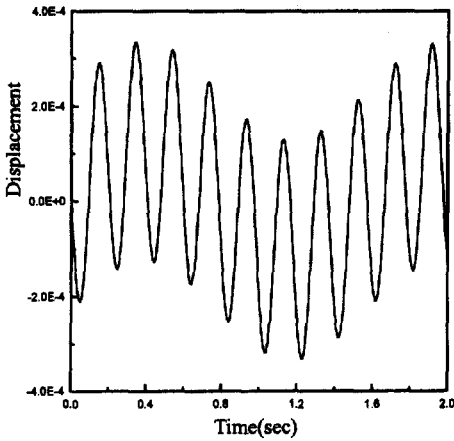


그림 8. Load Case1에 대한 MA 방법의 응답 곡선

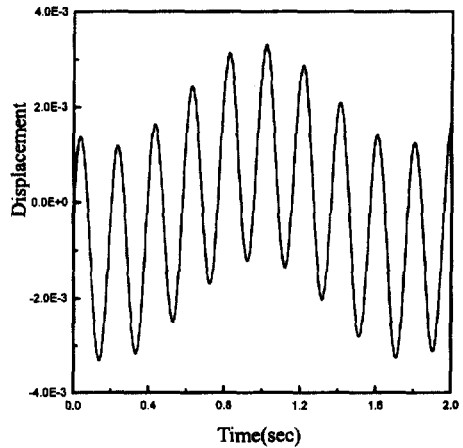


그림 10. Load Case2에 대한 MA 방법의 응답 곡선

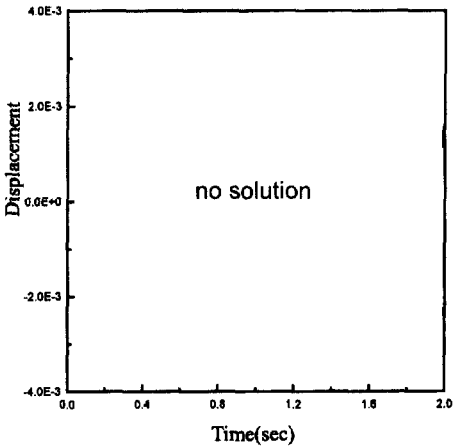


그림 9. Load Case2에 대한 MT 방법의 응답 곡선

는 발산되기 때문에 모드 절삭 보강법을 적용할 수 없다(그림 9). 그러나 모드 가속도법은 Load Case2의 경우에도 적용 가능하며, 그 때의 해는 그림 10과 같다. 따라서 비비례 감쇠시스템에 대한 모드 절삭 보강법의 적용은 제한적이다.

이상의 결과를 정리하면, 비비례 감쇠시스템으로 확장된 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법을 적용함에 있어서, 모드 가속도법은 항상 안정된 결과를 주는 반면에 모드 절삭 보강법은 하중벡터의 형태에 따라 안정된 결과를 주지 못하는 경우가 존재하여 그 사용성이 제한적이다. 또한 확장된 모드 절삭 보강법이 안정된 결과를 주는 경우에 있어서 그 결과는 확장된 모드 가속도법과 일치한다.

5. 결 론

본 연구에서는 비비례 감쇠시스템을 해석할 수 있도록 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법을 비비례 감쇠시스템에 적합한 형태로 확장하였으며, 확장된 각각의 방법에 대해 그 적용성을 이론적 방법과 수치예제로써 검증하였다. 본 연구의 결과는 다음과 같다.

첫째, 비례 감쇠시스템의 해석에만 적용되던 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법을, 비비례 감쇠시스템을 해석할 수 있도록 적합한 형태로 확장하였다.

둘째, 비비례 감쇠시스템에 확장된 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법을 적용함에 있어서, 모드 가속도법은 항상 안정된 결과를 주는 반면에 모드 절삭 보강법은 입력하중의 하중 벡터에 따라 안정된 결과를 주지 못하는 경우가 존재한다.

셋째, 모드 절삭 보강법이 안정된 결과를 주는 경우에 있어서 그 결과는 모드 가속도법과 일치한다.

결론적으로 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법은 누락된 고차 모드를 보정하는 효율적인 방법으로서, 본 연구에 의해 비비례 감쇠시스템을 해석할 수 있는 적합한 형태로 확장되었다. 비례 감쇠시스템에서는 모드 가속도법보다 모드 절삭 보강법이 더 효율적인 반면에, 비비례 감쇠시스템에서는 대부분의 경우에 있어서 두 방법의 효율성이 동일하다. 그러나 수렴의 안정성을 고려한다면 확장된 모드 가속도법이 확장된 모드 절삭 보강법보다 우수한 방법이다. 그러므로 실제 비비례 감쇠시스템의 해석에 적용함에 있어서 확장된

모드 절삭 보강법보다는 확장된 모드 가속도법을 선택하는 것이 해석의 안정성을 확보하고 정확한 결과를 얻는데 바람직하다.

참고문헌

1. Bisplinghoff, R.L. and Ashley, H. (1995) *Aeroelasticity*, Addison-wesley, Reading, Mass.
2. Hurty, W.C. and Rubinstein, M.F. (1964) *Dynamics of Structure*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
3. Hansteen, O.E. and Bell, K. "On the Accuracy of Mode Superposition Analysis in Structural Dynamics," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 7, pp. 405-411.
4. Wilson, E.L. and Itoh, T. (1983) "An Eigensolution Strategy for Large Systems," *Computers and Structures*, Vol. 16, pp. 259-265.
5. Guyan, R.J. (1965) "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," *AIAA Journal*, Vol. 3, p. 380.
6. Dickens, J.M. and Pool, K.V. (1992) "Modal Truncation Vectors and Periodic Time Domain Analysis Applied to a Cyclic Symmetry Structure," *Computers and Structures*, Vol. 45, No. 4, pp. 685-696.
7. Warburton, G.B. and Soni, S.R. (1987) "Errors in Response Calculations for Non-Classically Damped Structures," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 5, pp. 365-376.
8. Dickens, J.M. Nakagawa, J.M. and Wittbrodt, M.J. (1997) "A Critique of Mode Acceleration and Modal Truncation Augmentation Methods for Modal Response Analysis," *Computers and Structures*, Vol. 62, No. 6, pp. 985-998.
9. Roy R. Craig, Jr. (1981) *Structural Dynamics*, John Wiley & Sons.
10. Wilson, E.L. Yuan, M.W. and Dickens, J.M. (1982) "Dynamic Analysis by Superposition of Ritz Vectors", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, pp. 813-823.
11. Takeru Igusa, Armen Der Kiureghian and Jerome L. Sackman (1984) "Modal Decomposition Method for Stationary Response of Non-Classically Damped Systems," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 12, pp. 121-136.
12. Newland, D.E. (1989) *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Scientific & Technical.
13. Cornwell, R.E. Craig, Jr. R.R. and Johnson, C.P. (1983) "On the Application of The Mode-Acceleration Method to Structural Engineering Problems," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, pp. 679-688.
14. 김만철(1998) "비비례 감쇠 시스템의 효율적인 자유 진동 해법," 박사학위 논문, 한국과학기술원.
15. Leonard Meirovitch (1975) *Analytical Methods in Vibrations*, McGraw-Hill.
16. Ray W. Clough and Joseph Penzien (1993) *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill.

(接受 : 1999. 2. 8)