

# 고유모드 계산을 위한 초기 반복벡터의 효율성 연구

## Investigation of Efficiency of Starting Iteration Vectors for Calculating Natural Modes

김병완† · 경조현\* · 홍사영\* · 조석규\* · 이인원\*\*

Byoung-Wan Kim, Jo-Hyun Kyoung, Sa-Young Hong, Seok-Kyu Cho  
and In-Won Lee

(2004년 11월 5일 접수 ; 2004년 12월 3일 심사완료)

**Key Words** : Natural Mode(고유모드), Subspace Iteration Method(부분공간반복법), Starting Iteration Vector (초기 반복벡터)

### ABSTRACT

Two modified versions of subspace iteration method using accelerated starting vectors are proposed to efficiently calculate free vibration modes of structures. Proposed methods employ accelerated Lanczos vectors as starting iteration vectors in order to accelerate the convergence of the subspace iteration method. Proposed methods are divided into two forms according to the number of starting vectors. The first method composes  $2p$  starting vectors when the number of required modes is  $p$  and the second method uses  $1.5p$  starting vectors. To investigate the efficiency of proposed methods, two numerical examples are presented.

### 1. 서 론

구조물의 동응답 평가 및 동적 설계에 있어서 고유진동수 및 모드형상 등의 자유진동모드 해석은 필수적으로 선행되어야 할 중요한 과정이다. 고유모드는 동응답 해석 내지 동적 설계뿐만 아니라 좌굴 해석에도 사용되며 구조물의 강성 평가에도 이용된 사례가 있다.<sup>(1)</sup> 고유진동수와 모드형상은 구조물의 강성과 질량 분포에 따라 수학적으로 구성할 수 있는 고유치문제를 해석함으로써 결정된다. 고유치해법으로는 부분공간반복법과 Lanczos 방법<sup>(2)</sup> 등이 있으며 그 중 부분공간반복법은 구조물의 고유치해법으로 널리

이용되고 있다. 부분공간반복법은 Bathe와 Wilson<sup>(3)</sup>이 최초로 제안한 방법으로서 많은 연구자들에 의해 연구되었으며 개선된 방법들이 다양하게 제시되어 왔다. Akl 등<sup>(4)</sup>은 over-relaxation 기법을 도입하여 부분공간반복법의 수렴성을 개선하였다. Bathe와 Ramaswamy<sup>(5)</sup>는 Lanczos 벡터를 초기벡터로 사용하는 부분공간반복법을 제시하였다. Wilson과 Itoh<sup>(6)</sup>는 블록 형태의 반복벡터를 도입하여 자유도가 큰 구조물을 효과적으로 해석하였다. 그 중 Lanczos 벡터를 초기 반복벡터로 사용하는 부분공간반복법<sup>(5)</sup>도 고유치 해석에 있어서 반복회수를 줄이는데 매우 유용하며 ADINA, NASTRAN 등의 범용 유한요소해석 프로그램에서 고유치 해석 알고리즘으로서 사용되고 있다. 한편, Grosso 등<sup>(7)</sup>은 양자역학 분야에서 양자의 고유상태를 빠르게 계산하기 위하여 거둬제곱된 연산자 행렬을 도입한 바 있으며 Cordelli<sup>(8)</sup>와 Bevilacqua 등<sup>(9)</sup>이 그 기법을 채택하였다. 유사한 기법이 수정된 부분공간반복법의 역방향반복 과정에 적용된 바 있

† 책임저자 : 정희원, 한국해양연구원 해양시스템안전연구소  
E-mail : kimbw@kriso.re.kr

Tel : (042) 868-7524, Fax : (042) 868-7519

\* 한국해양연구원 해양시스템안전연구소

\*\* 정희원, 한국과학기술원

다.<sup>(10-12)</sup> 이 연구의 목적은, 수렴의 가속화를 위해 도입된 바 있는 행렬의 거듭제곱 기법을 Lanczos 벡터를 초기벡터로 사용하는 부분공간반복법의 초기벡터 구성 과정에 적용해보고 그 효율성을 고찰하는 데에 있다.

## 2. 수정된 부분공간반복법

구조물의 고유모드는 식 (1)과 같은 고유치문제를 풀어냄으로써 결정한다.

$$\mathbf{K}\phi_j = \lambda_j \mathbf{M}\phi_j \quad (1)$$

식 (1)에서  $\mathbf{K}$ 와  $\mathbf{M}$ 은 각각 강성행렬, 질량행렬을 나타낸다.  $\lambda_j$ 는  $j$ 번째 고유치로서 그 제곱근이 바로 구조물의  $j$ 번째 고유진동수에 해당한다.  $\phi_j$ 는  $j$ 번째 고유벡터로서 구조물의  $j$ 번째 모드형상에 해당한다.

Lanczos 벡터를 초기 반복벡터로 사용하는 부분공간반복법은 식 (1)의 고유치문제를 풀기 위해 식 (2)와 같은 Lanczos 알고리즘으로부터 초기 반복벡터를 생성한다. Lanczos 알고리즘은 Lanczos<sup>(2)</sup>에 의해 처음 제안되었으며 Paige<sup>(13)</sup>, Parlett과 Scott<sup>(14)</sup>, Ruhe<sup>(15)</sup>, Ericsson과 Ruhe<sup>(16)</sup>, Nour-Omid 등<sup>(17)</sup>, Simon<sup>(18)</sup>, Matthies<sup>(19)</sup>, Chen과 Taylor<sup>(20)</sup>, Rajakumar<sup>(21)</sup>, Smith 등<sup>(22)</sup>에 의해 그 적용성과 효율성이 활발히 논의되었으며 비례성이 없는 고유치문제에 확장되기도 하였다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{x}_i \\ \tilde{\mathbf{x}}_i &= \bar{\mathbf{x}}_i - \alpha_i \mathbf{x}_i - \beta_{i-1} \mathbf{x}_{i-1} \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)에서  $\mathbf{x}_i$ 는  $i$ 번째 Lanczos 벡터를 각각 나타내며 행렬  $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$ 은 동적행렬이다. 최초의 Lanczos 벡터는 식 (3)과 같이 임의의 벡터  $\mathbf{x}$ 를 질량행렬에 대해 정규화함으로써 구성한다.

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}} \quad (3)$$

식 (2)에서  $\alpha_i$ 와  $\beta_i$ 는 스칼라 계수로서 식 (4)와 같이 산출한다.

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \bar{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_i \\ \beta_i &= \sqrt{\tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}_i} \end{aligned} \quad (4)$$

다음 단계의 Lanczos 벡터는 식 (5)로부터 구성한다.

$$\mathbf{x}_{i+1} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_i}{\beta_i} \quad (5)$$

구하고자 하는 고유모드의 수가  $p$ 이면 일반적으로  $2p$  혹은  $3p$ 개의 Lanczos 벡터를 생성하여 초기벡터로 사용한다. 본 논문에서는  $2p$ 개의 Lanczos 벡터를 생성하는 방법을 기준으로 연구를 수행하였다.

이 연구에서는 부분공간반복법의 효율성을 높이기 위해 가속화된 초기 Lanczos 벡터를 생성할 수 있는 수정된 Lanczos 알고리즘을 제시하였다. 수정된 Lanczos 알고리즘은 식 (6)과 같이 거듭제곱된 동적행렬을 Lanczos 집화식에 도입한다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}_i &= (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^2 \mathbf{y}_i \\ \tilde{\mathbf{y}}_i &= \bar{\mathbf{y}}_i - \gamma_i \mathbf{y}_i - \delta_{i-1} \mathbf{y}_{i-1} \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서  $\mathbf{y}_i$ 는 수정된 Lanczos 벡터를 나타내며 계수  $\gamma_i$ 와  $\delta_i$ 는 다음 식으로부터 계산한다.

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \bar{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{M} \mathbf{y}_i \\ \delta_i &= \sqrt{\tilde{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{y}}_i} \end{aligned} \quad (7)$$

다음 단계의 Lanczos 벡터는 식 (8)에 의해 계산한다.

$$\mathbf{y}_{i+1} = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_i}{\delta_i} \quad (8)$$

식 (6)의 거듭제곱된 동적행렬은 물리적으로 역방향반복(inverse iteration)을 2회 시행한 것을 뜻하는 것으로서 식 (2)의 1회 시행된 역방향반복에 비해 고유치의 근사값들이 더욱 빠르게 분리되어 고유치 참값에의 수렴이 가속화된다. 따라서, 수정된 알고리즘으로부터 생성된 초기벡터가 기존의 초기벡터보다 참값의 고유벡터 공간에 더욱 가깝게 된다. 물론, 동적행렬의 거듭제곱 값의 계산을 위해서는 전방향 및 역방향 치환(forward reduction and back substitution)의 연산과정이 1회 추가된다. 그러나, 수렴이 향상된

초기벡터로 인해 반복회수가 줄어들 경우 반복회수 감소에 따른 계산시간의 감소 정도가 추가된 전방향 및 역방향 치환에 따른 계산시간의 증가 정도보다 훨씬 크므로 제안방법이 기존의 방법보다 해석시간이 감소될 수 있다. 실제로, 1회 추가된 전방향 및 역방향 치환과정에 소요되는 연산은 전체 연산회수에 비해 무시할 정도다. 이 후의 과정, 즉 역방향반복 과정과 축소시스템의 고유치해석은 기존방법과 동일한 절차를 갖는다.

이 연구에서는 생성하는 초기벡터의 수에 따라 제안방법을 두 가지 형태로 제시하였다. 제안방법 1은 구하고자 하는 고유모드의 수가  $p$ 일 경우  $2p$ 개의 초기벡터를 구성하는 방법이고 제안방법 2는  $1.5p$ 개의 초기벡터를 구성하는 방법이다. 제안방법 1은 기존방법과 동일한 개수의 초기벡터를 사용하면서 가속화된 벡터를 이용하므로 반복회수가 현저히 줄어들 가능성이 크다. 단, 반복회수가 동일할 경우 효율성이 증대되지 않는 단점이 있다. 제안방법 2는 가속화된 벡터를 사용하면서 기존방법보다 작은 개수의 초기벡터를 사용한다. 반복벡터의 수가 작으므로 역방향 반복 및 축소시스템 고유치해석 등의 과정에서 해석시간을 줄일 수 있다. 그러나, 반복벡터의 수가 작으므로 그만큼 수렴성이 감소될 수 있는 단점이 있다. 기존방법과 두 제안방법의 수치 알고리즘을 Table 1에 요약

행렬로서  $k$ 가 커짐에 따라 고유벡터의 참값에 수렴한다. 는 정방행렬로서 대각항의 값들이 고유치의 근사값에 해당하며  $k$ 가 커짐에 따라 고유치의 참값에 수렴한다. 본 연구에서 수렴 여부는 식 (9)와 같은 오차식<sup>(23)</sup>으로부터 허용오차로서 충분한 정확도를 보장할 수 있는 값으로 알려진  $10^{-6}$ 으로 하였다.<sup>(5)</sup>

$$\epsilon_i = \frac{\| \mathbf{K}\phi - \lambda_i \mathbf{M}\phi \|_2}{\| \mathbf{K}\phi \|_2} \quad (9)$$

### 3. 수치예제

제안방법의 검증을 위해 Fig.1 및 Fig.2와 같은 두 개의 빌딩 구조물에 대해 수치해석을 수행하였다. 제안방법 1 및 제안방법 2와 기존 방법의 비교를 위해 세 방법의 반복회수 및 해석시간을 고찰하였다. 예제구조물의 탄성계수는  $2.1 \times 10^{11}$  Pa이고 밀도는  $7850 \text{ kg/m}^3$ 이다. 단면 2차 모멘트는  $8.3 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ 이고 단면적은  $0.01 \text{ m}^2$ 이다. 예제구조물 1은 400개의 보요소와 180개의 절점으로 구성된 구조물로서 총 자유도는 1008이다. 예제구조물 2는 2170개의 보요소와 864개의 절점으로 구성되어 있으며 총 자유도는 5040이다. 수치예제에 대한 해석 결과를 Table 2와 3 그리고 Fig. 3과 4에 제시하였다. Table 2와 3은 기존방

Table 1 Algorithm for conventional and proposed methods

Operation	Conventional method	Proposed method
Decomposition	$\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T$	
Starting iteration vectors	Eqs. (2)~(5) $\Phi_1 = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_q]$ $q = 2p$	Eqs. (6)~(8) $\Phi_1 = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \dots \ \mathbf{y}_q]$ $q = 2p$ (proposed 1) $q = 1.5p$ (proposed 2)
Iteration	$k = 1, 2, \dots$	
Inverse iteration	$\bar{\Phi}_{k+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \Phi_k$	
Reduced system	$\mathbf{K}_{k+1} = \bar{\Phi}_{k+1}^T \mathbf{K} \bar{\Phi}_{k+1}$ $\mathbf{M}_{k+1} = \bar{\Phi}_{k+1}^T \mathbf{M} \bar{\Phi}_{k+1}$	
Eigenanalysis for reduced system	$\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} \Lambda_{k+1}$	
Updating eigenvectors	$\Phi_{k+1} = \bar{\Phi}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1}$	
Check convergence	$\epsilon_i \leq \text{Tolerance ?}$	

하였다. Table 1에서  $\Phi$ 는 근사 고유벡터로 구성된

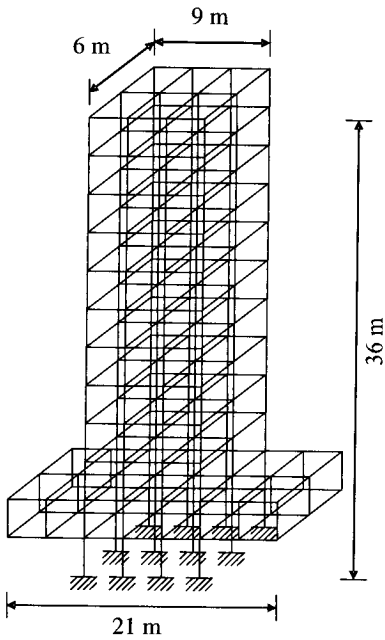


Fig. 1 Example structure 1

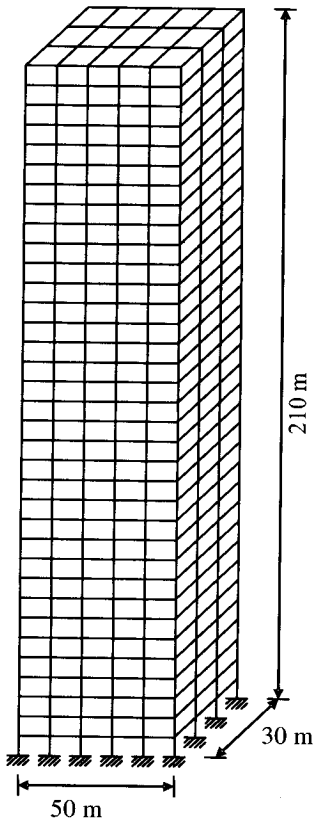
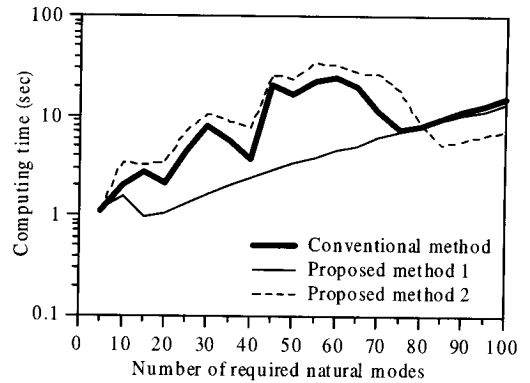


Fig. 2 Example structure 2

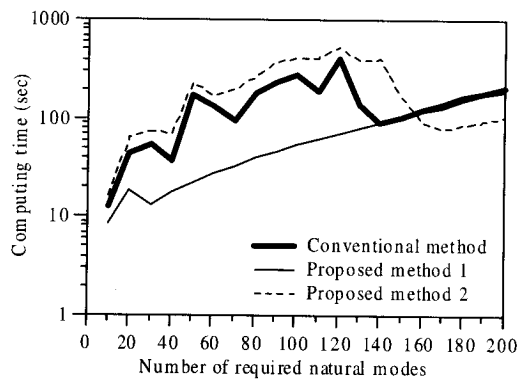
법, 제안방법 1 및 제안방법 2의 반복회수를 비교하고 있고 Fig. 3과 4는 세 방법에 있어서 예제구조물의 고유치 해석에 소요된 시간을 비교하고 있다.

Table 2와 3 그리고 Fig. 3과 4로부터 제안방법 1이 반복회수가 가장 작으며 구하고자 하는 고유모드의 수가 비교적 작을 경우 기존방법 및 제안방법 2보다 해석시간이 상당히 작음을 알 수 있다. 그러나, 구하고자 하는 고유모드의 수가 커짐에 따라 반복회수가 1이 되면서 기존방법의 반복회수와 동일하여 효율성이 증대되지 않음을 알 수 있는데 그것은 구하고자 하는 고유쌍의 수가 많을 경우 초기벡터의 수 즉 부분공간 크기의 크기가 충분히 크게 설정되므로 가속화되지 않은 초기벡터를 사용하더라도 1회의 반복으로 수렴하기 때문이다. 한편, 제안방법 2는 반복벡터의 수가 다른 두 방법보다 작아 수렴성이 우수하지 못하여 반복회수가 많이 소요됨을 알 수 있다. 그러나, 구하고



(a) 1008 DOFs

Fig. 3 Computing time of example structure 1



(b) 5040 DOFs

Fig. 4 Computing time of example structure 2

**Table 2** Number of iterations of example structure 1

No. of natural modes	Conventional method	Proposed method 1	Proposed method 2
5	13	13	18
10	12	8	30
15	10	2	17
20	5	1	13
25	9	1	22
30	14	1	27
35	7	1	18
40	3	1	13
45	21	1	42
50	14	1	33
55	16	1	42
60	15	1	36
65	10	1	26
70	4	1	22
75	1	1	13
80	1	1	4
85	1	1	1
90	1	1	1
95	1	1	1
100	1	1	1

자 하는 고유모드의 수가 비교적 클 경우 세 방법의 반복회수는 모두 1로서 동일하며 그 경우 제안방법 2의 반복벡터의 수 즉 부분공간의 크기가 작으므로 역방향 반복 및 축소고유치 해석에 소요되는 연산이 현격히 감소되어 해석시간이 가장 작음을 알 수 있다. 요약하면, 구하고자 하는 고유모드의 수가 비교적 작을 경우 제안방법 1이 가장 효율적이며 구하고자 하는 고유모드의 수가 비교적 클 경우에는 제안방법 2가 가장 효율적이다.

#### 4. 결 론

가속화된 Lanczos 벡터를 초기 반복벡터로 사용하는 수정된 부분공간반복법을 두 가지 형태로 제안하였다. 제안방법 1은 구하고자 하는 고유모드의 수가  $p$ 일 경우  $2p$ 개의 초기벡터를 구성하는 방법이고 제안방법 2는  $1.5p$ 개의 초기벡터를 구성하는 방법이다. 제안방법의 검증에 위해 자유도가 다른 두 개의 예제구조물에 대해 수치해석을 수행하였다. 이론적인 고찰과 수치해석 결과로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

**Table 3** Number of iterations of example structure 2

No. of natural modes	Conventional method	Proposed method 1	Proposed method 2
10	8	4	15
20	16	5	33
30	12	1	24
40	5	1	16
50	23	1	44
60	13	1	25
70	7	1	24
80	12	1	28
90	13	1	34
100	13	1	33
110	7	1	29
120	15	1	33
130	3	1	20
140	1	1	19
150	1	1	6
160	1	1	2
170	1	1	1
180	1	1	1
190	1	1	1
200	1	1	1

(1) 구하고자 하는 고유모드의 수가 비교적 작을 경우 제안방법 1의 수렴성이 가장 우수하여 반복회수 및 해석시간이 작아서 가장 효율적이다. 그러나, 구하고자 하는 고유모드의 수가 클 경우 기존방법과 수렴성이 동일하여 효율성이 증가하지 않는다.

(2) 제안방법 2는 수렴성이 우수하지 못하여 전반적으로 반복회수가 많다. 그러나, 구하고자 하는 고유모드의 수가 비교적 클 경우 세 방법의 반복회수가 모두 1로서 동일한 반면 반복벡터의 수는 제안방법 2가 작으므로 역방향 반복 및 축소고유치 해석에 소요되는 시간이 감소되어 제안방법 2가 가장 효율적이다.

#### 후 기

이 논문은 해양수산부가 지원하는 해양수산 연구개발과제인 '초대형 부유식 해상구조물 기술개발'과 한국해양연구원에서 기본연구사업으로 수행중인 '해양개발을 위한 설계 엔지니어링 기술고도화' 사업의 일부로 수행되었음을 밝혀 둔다.

## 참고 문헌

(1) 허택재, 정재엽, 조연, 박태원, 1999, "모드해석을 이용한 L, T자형 구조물의 결합 강성 평가 방법에 대한 연구," 한국소음진동공학회논문집, 제9권, 제5호, pp.975~983.

(2) Lanczos, C., 1950, "An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators," J. Res. Natl. Bur. Stand., Vol. 45, No. 4, pp. 255~282.

(3) Bathe, K. J. and Wilson, E. L., 1972, "Large Eigenvalue Problems in Dynamic Analysis," ASCE J. Engrg. Mech., Vol. 98, pp.1471~1485.

(4) Akl, F. A., Dilger, W. H. and Irons, B. M., 1979, "Over-Relaxation and Subspace Iteration," Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol. 14, pp. 629~630.

(5) Bathe, K. J. and Ramaswamy, S., 1980, "An Accelerated Subspace Iteration Method," Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., Vol. 23, pp. 313~331.

(6) Wilson, E. L. and Itoh, T., 1983, "An Eigensolution Strategy for Large Systems," Comput. Struct., Vol. 16, pp. 259~265.

(7) Grosso, G., Martinelli, L. and Parravicini, G. P., 1993, "A New Method for Determining Excited States of Quantum Systems," Nuovo Cimento D, Vol. 15, No. 2-3, pp.269~277.

(8) Cordelli, A., 1994, "Application of Accelerated-Convergence Technique to Modified Lanczos Calculations," Il Nuovo Cimento D, Vol. 16, pp. 45~53.

(9) Bevilacqua, G., Martinelli, L. and Parravicini, G. P., 1996, "Jahn-Teller Effect in  $ZnS:Fe^{2+}$  Revisited with a Modified Lanczos-Type Algorithm," Phys. Rev. B, Vol. 54, pp. 7626~7629.

(10) Lam, Y. C. and Bertolini, A. F., 1994, "Acceleration of the Subspace Iteration Method by Selective Repeated Inverse Iteration," FE Anal. Design, Vol. 18, pp. 309~317.

(11) Qian, Y. Y. and Dhatt, G., 1995, "An Accelerated Subspace Method for Generalized Eigenproblems," Comp. and Struct., Vol. 54, No. 6, pp. 1127~1134.

(12) Wang, X. and Zhou, J., 1999, "An Accelerated Subspace Iteration Method for Generalized Eigenproblems," Comput. Struct., Vol. 71, pp. 293~301.

(13) Paige, C. C., 1972, "Computational Variants of the Lanczos Method for the Eigenproblem," J. Inst. Math. Appl., Vol. 10, pp. 373~381.

(14) Parlett, B. N. and Scott, D. S., 1979, "The Lanczos Algorithm with Selective Orthogonalization," Math. Comput., Vol. 33, pp. 217~238.

(15) Ruhe, A., 1979, "Implementation Aspects of Band Lanczos Algorithms for Computation of Eigenvalues of Large Sparse Symmetric Matrices," Math. Comput., Vol. 33, pp. 680~687.

(16) Ericsson, T. and Ruhe, A., 1980, "The Spectral Transformation Lanczos Method for the Numerical Solution of Large Sparse Generalized Symmetric Eigenvalue Problems," Math. Comput., Vol. 35, pp. 1251~1268.

(17) Nour-Omid, B., Parlett, B. N. and Taylor, R. L., 1983, "Lanczos versus Subspace Iteration for Solution of Eigenproblems," Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol. 19, pp. 859~871.

(18) Simon, H. D., 1984, "The Lanczos Algorithm with Partial Reorthogonalization," Math. Comput., Vol. 42, pp. 115~142.

(19) Matthies, H. G., 1985, "A Subspace Lanczos Method for the Generalized Symmetric Eigenproblem," Comput. Struct., Vol. 21, pp. 319~325.

(20) Chen, H. C. and Taylor, R. L., 1988, "Solution of Eigenproblems for Damped Structural Systems by the Lanczos Algorithm," Comput. Struct., Vol. 30, pp. 151~161.

(21) Rajakumar, C., 1993, "Lanczos Algorithm for the Quadratic Eigenvalue Problem in Engineering Applications," Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., Vol. 105, 1~22.

(22) Smith, H. A., Sorensen, D. C. and Singh, R. K., 1993, "A Lanczos-Based Technique for Exact Vibration Analysis of Skeletal Structures," Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol. 36, pp. 1987~2000.

(23) Bathe, K. J., 1996, Finite Element Procedures, Prentice-Hall.