

**파동의 전파특성을 이용한 환형반복구조물의
유한요소모형화 및 진동해석**

**Finite element modelling and vibration analysis of
rotationally periodic structures using wave propagation characteristics**

**Finite element modelling and vibration analysis of
rotationally periodic structures using wave propagation characteristics**

Advisor : In-Won Lee

**By
Jeung-Gyu Park**

**Department of Mechanical Engineering
Korea Advanced Institute of Science and Technology**

**A thesis submitted to the faculty of the Korea Advanced Institute of
Science and Technology in partial fulfillment of the requirements for the degree of
Master of Engineering in the Department of Mechanical Engineering**

Daejon, Korea

1993. 2.

Approved by



Major Advisor

파동의 전파특성을 이용한 환형반복구조물의
유한요소 모형화 및 진동해석

박 정 규

위 논문은 한국과학기술원 석사 학위 논문으로
학위 논문 심사 위원회에서 심사를 통과 하였음

1993년 2월

심사위원장 이 인 원



심사 위원 이 인



심사 위원 윤 성 기



사랑하는 부모님께 이 작은 결실을 바칩니다.

MME
91264

박 정 규, Jeung-Gyu Park,
Finite element modelling and vibration analysis of rotationally
periodic structure using wave propagation characteristics,
파동의 전파특성을 이용한 환형 반복 구조물의 유한
요소 모델링 및 진동해석,
Department of Mechanical Engineering, 1993, 37 pages
Advisor: In-Won Lee

ABSTRACT

The analysis of the natural frequencies and modes of structure is restricted by cost and utter size of the computer analysis. When it has rotationally periodicity, efficient analysis is possible using wave propagation characteristics(Floquet theorem) in periodic structure. They constraint one substructure at its boundary with following substructure in a manner to impose phase difference. In the analysis described here, a finite element modelling is used not a whole structure modelling, but small angle of it. So small size of computer memory is required ,and rapid convergence of eigenvalue problem is shown. This is demonstrated by computing natural frequencies of free undamped vibrations of annular plates, usual assumption of linear elastic system is made.

목 차

Abstract	i
목차	ii
그림 및 표 목차	iii
Nomenclatures	iv
1. 서론	1
2. 주기적으로 지지되어 있는 빔에서의 이론적 해석	4
1). 전파상수의 개념	4
2). 전파상수의 계산	5
3). 유한 반복 지지된 빔의 고유 주파수	6
3. 환형반복구조물의 이론적 해석	9
1). U 변환을 이용한 환형구조물의 비연성화	9
2). 유한요소법을 통한 모형화	15
3). 섹터모델의 유용성	19
4. 예제와 고찰	21
5. 결론	23
6. 참고문헌	24

그림 및 표목차

그림1. 반복지지되어 있는 무한대빔 -----	27
그림2. 감쇠비(μ_R)과 위상차(μ_I)의 주파수파라메타에 대한 변화량 -----	28
그림3. N개의 지지대가 유한반복빔 -----	29
그림4. 5-개의 지지대가 있는 유한반복빔의 주파수 파라메타 -----	30
그림5. 환형반복구조물의 간략도 -----	31
그림6. 환형원판의 매쉬 -----	32
그림7. 섹터모델의 매쉬 -----	32
표1. 일반적 자코비법에 의한 연산횟수 비교 -----	33
표2. 일반적 자코비법에 의한 기억용량 비교 -----	34
표3. 주파수 파라메타, $\omega_0^2(\rho/D)^{1/2}$ 의 엄밀해와의 비교 -----	35
그림8. 내부자유도가 18개일때의 섹터의 갯수에 따른 연산횟수의 비교 -----	36
그림9. 내부자유도가 18개일때의 섹터의 갯수에 따른 기억용량의 비교 -----	36
그림10. 내부자유도가 24일때의 섹터의 갯수에 따른 연산횟수의 비교 -----	37
그림11. 내부자유도가 24개 일때의 섹터의 갯수에 따른 기억 용량의 비교 -----	37

NOMENCLATURES

D	: flexural rigidity for plates
EI	: flexural rigidity for beams
h	: plate thickness
L	: total length of the finite periodic structure (=Nl)
M_{r+} , M_{r-}	: amplitude of bending moment at rth support, corresponding to a positive- and a negative going wave, respectively
M₁ , M₂	: edge-moments as shown in Fig 1
M₊(x)	: total bending-moment at an arbitrary section x, due to a positive - going wave, respectively
M^m(μ_I) , K^m(μ_I)	: mass and stiffness matrix of mth substructure, which function of μ _I respectively
M^R(μ_I) , M^I(μ_I)	: real and imaginary part of M ^m (μ _I) see equation (3-22)
K^R(μ_I) , K^I(μ_I)	: real and imaginary part of K ^m (μ _I) see equation (3-23)
j	: √-1
l	: span length between two adjacent supports for beams
m	: an integer
N	: total number of spans
q_k	:kth generalized displacement

Q_k	:kth generalized displacement
r_i , r_o	: inner and outer radius of annular plates, respectively
ν	: Poisson' ratio
w	: transverse displacement
α	: receptance
ρ	: density of beam or plate material
ω	: angular frequency of osillation
π	:3.14159
θ_1 , θ_2	: slopes at points 1 and 2 respectively, Fig1
θ_0 , θ_N	: slopes at points 0 and N respectively, Fig3
μ	: wave propagation constant
μ_R , μ_I	: real and imaginary part of the wave propagation constant
Ψ	: $2\pi /N$
$\{w\}$: displacements vector for the whole structure , Fig5
$\{w\}^m$: the vector of nodal displacements for the mth substructure element
$[M]^m$: mth substructure mass matrix
$[K]^m$: mth substructure stiffness matrix

- [T]** : transformation matrix for complex constrains
- [U]** : U-matrix, see equation(3-8)
- {q}** : generalized displacements vector for the whole structure, Fig5
- [ε]** : cyclic matrix

1. 서 론

반복 구조물 (periodic structure) 이란, 동일한 분할 구조물들이 일정한 간격과 동일한 방식으로 연결되어 전체 구조물을 이루고 있는 것을 말한다. 많은 구조물들은 생산비용과 설계시간의 절감을 위하여 동일한 분할 구조물로 전체구조물을 구성하고 있다. 예로써, 비행기의 동체(aircraft fuselage), 모노레일 트랙 (monorail tracks) 등의 구조물에서 찾을 수 있다. 환형 반복 구조물 (rotationally periodic structure) 는 위와 같은 반복구조물이 링과 같은 형태를 이루고 있는 것을 말한다. 그 예로서는, 터빈 블레이드 디스크 (turbine-blade discs), 냉각탑 (cooling tower), 원심 압축기 (centrifugal compressor), 기어 휠 (gear wheel) 등이 있다. 이런 구조물들의 진동을 기하학적으로 반복적인 구조물의 특성을 이용하여 쉽게 해석할 수 있다. 즉, 반복 구조물의 진동문제는 전체 구조물중 반복적인 한 요소의 구조물과 전체 구조물의 경계 조건만으로 해석이 가능하다. 이렇게 하면 전체구조물의 해석에 있어, 계산 효율을 높일 수 있다. 예를 들어 전체 구조물에 N 개의 반복적인 요소가 있다고 하고, 그 하나의 요소에 j 개의 자유도가 있다고 하면, 종래의 방법은 전체구조물을 $N \times j$ 개라는 자유도를 가지는 문제를 다루어야 하지만, 구조물의 반복적인 성질을 이용하여 j 개의 자유도만으로 전체 구조물의 진동문제를 해석해 낼수 있다.

반복 구조물에서, 자유조화파 (free harmonic wave) 는 특정 주파수 대역에서만 전파되며, 이 대역을 전파 대역 (propagation zones) 이라고 한다. 그 이외의 영역을 감쇄대역 (attenuation zones) 이라고 한다. 이러한 특징은, 복소

수로 표현되는 전파 상수(propagation constant)로 표현되며, 이는 주파수의 함수이며, 반복구조물에서 인접한 두 분할구조물 사이의 관계를 규정짓는다.

고체물리학자인 Brillouin¹ 은 discrete crystal lattices 를 동일한 선형 스프링의 1차원 배열로 수학적 모델링을 하여 파동의 거동을 연구하였다. 그 뒤 물리학자와 전기공학자들이 결정 구조와 광학 등에서 계속 연구를 수행하였다. 비교적 최근에서야 반복구조물에서 파동의 거동이 연구되었는데, Cremer² 등은 무한 반복 빔 (infinite periodic beam structures) 에서의 운동 (flexural motion) 을 연구하였으며, Sen Gupta³ 는 유한 보 형태로된 반복구조물 (finite beam-type periodic structure) 의 고유진동수를 파동의 전파 특성을 이용하여 얻었다. 그 뒤 Mead⁴ 는 Rayleigh 법을 이용하여, 비균질 반복구조물에서 주파수별 파동의 전파 계수의 값을 해석적인 방법이 아닌 근사해법으로 구했으며, 이는 유한요소법을 근사해법으로 사용할 수 있는 가능성을 보였다. 즉, 여기서 그는 파동전파상수의 실수부인 감쇠상수 (decay constant) 와 허수부인 위상상수 (phase constant) 의 각 주파수에 대한 값들을 해석적으로 구하지 않고, Rayleigh 법을 이용하여 근사적으로 구해냈다. Orris , Petyt⁵ 는 이 근사해법을 유한요소법을 통하여 구현했다. Thomas⁶ 는 환형 반복 구조물에서의 정상파가 생기는 공진주파수를, 환형이기 때문에 생기는 기하학적 적합성을 이용하여 해석적으로 찾아내었으며, Cai, Cheung, Chan⁷ 은 이 내용을 U-변환을 이용하여 수학적으로 기술하였다.

본 연구에서는 환형 반복 구조물의 고유주파수를 유한요소법을 이용하여 구하고자 한다. 이때 Floquet 정리를 이용하여 구조물의 전체에 대한

모델링이 아니라, 동일한 분할구조물의 반복적 성질을 파동전파상수를 이용하여 하나의 분할구조물에 대해서 모형화하여 진동문제를 해석함으로써 계산효율을 높이고자 한다.

2. 주기적으로 지지되어 있는 빔에서의 이론적 해석

2.1 전파상수(propagation constant)의 개념

반복구조물의 간단한 예로서 균질하고 무한히 긴 빔이 거리 1만큼 일정한 거리로 떨어져있는 지지대들 위에 놓여있는 경우를 생각하자. 그림 1과 같은 반복구조물에서 이웃한 지지대 1과 2 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} M_2 &= M_1 e^{\pm \mu} \\ \theta_2 &= \theta_1 e^{\pm \mu} \end{aligned} \quad (2-1)$$

(-) 기호 일때는 양의 x 방향, (+) 기호 일때는 음의 x 방향으로 파동이 전파되어 가는 것이다. 위 관계를 Floquet의 정리라고 한다. 일반적인 형태의 Floquet정리는 다음과 같이 설명될수 있다. 반복적 구조물의 이웃한 반복적요소 사이의 두점을 각각 A, B 라고 하면 두점 A, B 에서 free wave 벡터에 해당하는 벡터A와 벡터B 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다는 것이다.

$$\text{벡터 A} = e^{\mu} \times \text{벡터 B}$$

여기서 두점 A와 B는 그림1에서 지지대위에 있을 필요는 없다. 일반적으로 μ 는 복소수이며 실수부 μ_R 은 이웃한 분할구조물사이의 진폭의 감쇠비율, 허수부 μ_I 는 위상차이를 나타낸다.

2.2 전파상수의 계산

그림 1.의 구조물에서, 지지대위의 회전량은 모멘트로 표현된다. 리셉턴스 (receptance) α_{xy} 는 y 좌표에 조화 가진 (harmonic force)을 했을때, x 좌표에 생기는 변위로 정의되며, 회전 리셉턴스는 힘대신 모멘트로 가진할 때 변위대신 회전량으로 정의되는 양이다. 회전 리셉턴스를 $\alpha(\omega)$ 라고 하자. 이때 α 는 주파수의 함수이다. 지지대 1에서의 회전량을 θ_1 , 지지대 2에서의 회전량을 θ_2 라고 하면, 선형시스템인 경우 중첩법이 성립하므로 다음과 같다..

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \alpha_{11} M_1 + \alpha_{12} M_2 \\ \theta_2 &= -\alpha_{21} M_1 - \alpha_{22} M_2\end{aligned}\tag{2-2}$$

여기서 α_{11}, α_{22} 는 direct receptance, α_{12}, α_{21} 는 cross receptance이다. 선형시스템인 경우에는 리셉턴스는 상반성의 원리(reciprocal property)가 성립하므로 $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ 이다. 또한 $\alpha_{11} = \alpha_{22}$ 임을 알 수 있다. 양의 방향으로만 전파되는 파동만을 고려한다면

$$\begin{aligned}
 M_2 &= M_1 e^{-\mu} \\
 \theta_2 &= \theta_1 e^{-\mu}
 \end{aligned}
 \tag{2-3}$$

식(2-3)를 식(2-2)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}
 \cosh \mu &= -\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} \\
 &= -\frac{\sin(\lambda l) \cosh(\lambda l) - \cos(\lambda l) \sinh(\lambda l)}{\sinh(\lambda l) - \sin(\lambda l)}
 \end{aligned}
 \tag{2-4}$$

여기서

$$\lambda l = \left[\frac{A \rho l^4 \omega^2}{EI} \right]^{1/4}$$

음의 방향으로 전파되는 파동도 동일한 식이 유도됨을 알수있다. 식(2-4)에서 주목할만한 것은 μ 는 하나의 분할구조물로 표현된다는 것이다. 주파수 파라메타 ω 에 대한 μ 의 값은 그림2와 같다.

2.3 유한 반복지지된 빔의 고유 주파수

어떤 임의의 주파수에서 양의 방향으로 진행되는 자유파는 다음과 같이 표현된다.

$$M_+(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_{n+} e^{j(\omega t - (2n\pi + \mu_1)x/l} \quad (2-5)$$

여기서 M_{n+} 은 x 위치에서 n 번째 모드의 굽힘 모멘트의 크기이며, $M_+(x)$ 는 x 위치에서 굽힘모멘트의 총합을 나타낸다. r 번째 지지대에 대해서 $x = r$ 이므로 $x/l = r$ 을 식(2-5)에 대입하면

$$M_{r+} = M_+ e^{j(\omega t - \mu_1 r)}$$

$$M_+ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_{n+}$$

여기서 M_{r+} , M_+ 는 r 번째 지지대와 0번째 지지대의 진폭이다. 마찬가지로

$$M_{r-} = M_- e^{j(\omega t + \mu_1 r)}$$

그림3과 같은 N 개의 지지대가 있는 경우

$$M_r = M_{r+} + M_{r-}$$

$$= M_+ e^{j(\omega t - \mu_1 r)} + M_- e^{j(\omega t + \mu_1 r)}$$

$$= (M_+ e^{-j\mu_1 r} + M_- e^{+j\mu_1 r}) e^{j\omega t}$$

경계조건

$$M_0 = 0, M_N = 0 \quad (2-6)$$

을 고려하면,

$$M_+ = -M_-$$

$$M_+ \sin \mu_1 N = 0$$

$$\mu_1 = \frac{m \pi}{N} \quad m=0,1,2 \dots \quad (2-7)$$

위와같이 경계조건 식(2-6)을 이용하여 유한반복적인 보에서의 공진 주파수에 해당하는 위상차 μ_1 를 식(2-7)을 통하여 구한뒤 공진주파수를 그림4에서 찾아낼 수 있다. 위의 예와 같은 비교적 간단한 보의 경우에는 리셉턴스를 해석적으로 유도시 많은 계산을 요구하는데, 복잡한 구조물의 리셉턴스를 해석적으로 구한다는것은 어려운 과정으로 생각된다.

3. 환형반복구조물의 이론적 해석

3.1 U-변환을 이용한 환형반복구조물의 비연성화

그림5와 같이 보의 각 분할구조물의 중앙점에 국소좌표계(local coordinate)를 잡았을때 모든 분할구조물의 지배방정식은 동일하다.

$$EI \frac{\partial^4 w_k(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w_k(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3-1)$$

여기서, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, $k=0,1,2,3,\dots,N-1$ 이고, $w_k(x,t)$ 는 처짐량이다.
서로 이웃한 분할구조물사이에는 다음과 같은 경계조건을 만족한다.

$$w_k \Big|_{x=\frac{1}{2}} = w_{k+1} \Big|_{x=-\frac{1}{2}} \quad (3-2)$$
$$k = 0,1,2,3,\dots,N-1$$

0번째 분할 구조물과 N-1 번째 분할구조물이 연결된 경우가 환형반복 구조물이며 다음과 같은 경계조건이 추가된다.

$$w_{N-1} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = w_0 \Big|_{x=-\frac{1}{2}} \quad (3-3)$$

전체 구조물의 변위를 다음과 같이 표현하면

$$\{w\} = [w_0, w_1, \dots, w_{N-1}]^T \quad (3-4)$$

식(3-1)과 같은 N개의 동일한 방정식을 아래와 같이 식 하나로 표현할수 있다.

$$EI \frac{\partial^4 \{w\}}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \{w\}}{\partial t^2} = 0 \quad (3-5)$$

$[\varepsilon]$ 을 $N \times N$ 매트릭스

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

로 정의하면, 식(3-2), 식(3-3)과 같이 표현되는 경계조건을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{w\} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = [\varepsilon] \{w\} \Big|_{x=-\frac{1}{2}} \quad (3-6)$$

(3-6)식은 경계조건이 서로 이웃한 분할구조물에 의존한다는 것을 알수 있다. 공진주파수는 전파대역에서 경계조건을 만족시켜주는 이산화된값 μ_i 에 해당하는 주파수라는 사실과 Floque의 정리를 이용하면 식(3-6)를 모드공간내

에서 하나의 분할구조물에 대한 양단의 경계조건으로 고칠수 있다.위의 사실을 이용하여, 식(3-2)를 다음과 같이 고쳐 적을 수 있다.

$$\begin{aligned} w_k|_{x=1/2} &= w_{k+1}|_{x=-1/2} = e^{-j\mu} w_k|_{x=-1/2} \\ w_{N-1}|_{x=1/2} &= e^{-jN\mu} w_0|_{x=-1/2} \end{aligned} \quad (3-7)$$

그런데 식(3-7)가 식(3-3)의 조건을 만족하기 위하여

$$e^{-jN\mu} = 1$$

따라서 위상차 μ_1 가 $2\pi/N$ 의 정수배일때 환형구조물에서 공진이 일어난다. 이를 이용한 변환으로 모드공간내에서 전체구조물의 변위는 하나의 분할구조물로 정확히 기술될수 있다. $\{w\}$ 를 다음과 같이 변환하자.

$$\{w\} = [U] \{q\} \quad (3-8)$$

여기서

$$\begin{aligned} \{q\} &= [q_0, q_1, \dots, q_{N-1}]^T \\ [U] &= [U_0, U_1, \dots, U_{N-1}] \\ \{U_k\} &= \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) [1 \ e^{jk\Psi} \ e^{j2k\Psi} \ \dots \ e^{j(N-1)k\Psi}]^T \end{aligned}$$

이며, $\Psi = \frac{2\pi}{N}$, $j = \sqrt{-1}$ 이고, $\{q\}$ 의 성분 q_k ($k = 1, 2, \dots, N$)은 모드공간에서의 변위이다. $\{U_0\}$ 은 기준이 되는 하나의 분할구조물에 대하여 바로 이웃한 분할 구조물과 위상차가 없는 경우를, $\{U_k\}$ 는 이웃한 분할구조물과 $k \frac{2\pi}{N}$ 만큼의 위상차이가 생기는 경우에 대하여 전체구조물의 변위를 하나의 분할 구조물로 표현해 주는 역할을 한다.

$$\begin{aligned} \{U_j\}^H \{U_k\} &= \left(\frac{1}{N}\right) \left[1 + e^{j(k-j)\Psi} + e^{j2(k-j)\Psi} + \dots + e^{j(N-1)(k-j)\Psi} \right] \\ &= \left(\frac{1}{N}\right) \left(\frac{1 - e^{jN(k-j)\Psi}}{1 - e^{j(k-j)\Psi}} \right) = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases} \end{aligned}$$

즉,

$$[U]^H [U] = [I]$$

위와 같은 조건을 만족하는 매트릭스를 U- 매트릭스라 하며 식(3-7)를 U-변환 이라고 한다. 식(3-8)를 식(3-5)에 대입하고 각 항에 앞에 $[U]^H$ 를 곱하면

$$EI \frac{\partial^4 \{q\}}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \{q\}}{\partial t^2} = 0, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \quad (3-9)$$

그리고 식(3-6)은

$$\{q\} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = [U]^H [\varepsilon] [U] \{q\} \Big|_{x=-\frac{1}{2}} \quad (3-10)$$

여기서

$$[U]^H [\varepsilon] [U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{j\Psi} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & e^{j(N-1)\Psi} \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

식(3-9)과 식(3-10)은 각 분할구조물에 대한 N개의 동일한 방정식들이다.

$$EI \frac{\partial^4 q_k}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 q_k}{\partial t^2} = 0 \quad (3-12)$$

$$q_k \Big|_{x=\frac{1}{2}} = e^{jk\Psi} q_k \Big|_{x=-\frac{1}{2}} \quad (3-13)$$

여기서 $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

N이 짝수일때는 k이 $\frac{N}{2} + 1$ 에서 부터 N-1까지의 값일때는 $e^{jk\Psi}$ 가 주기함수이므로 $-\left(1 + \frac{N}{2}\right)$ 으로 부터 -1까지의 값을 갖는다. 따라서,

$$k = -\left(\frac{N}{2} - 1\right), \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

양의 기호를 가진 경우는 시계방향으로 진행되는 파에 해당하고, 음의 기호는 반시계방향으로 진행되는 파에 해당하는 것이 된다고 볼 수 있고, 양의 기호를 가지는 경우와 음의 기호를 가지는 경우는 서로 동일한 형상들을 표현해 주고 있다. 이들 각각을 전방 진행파(forward travelling waves)와 후방 진행파(backward travelling waves)라고 하며 회전하지 않는 환형반복 구조물에서는 동일한 고유 진동수와 모드 형상을 가지며, 따라서 이 두 파는 합쳐서 정상파를 형성한다. 그러나 임의의 각속도를 가지고 코리올리 효과가 없을 때를 제외하고는 전방진행파와 후방진행파는 서로 다른 고유주파수를 형성하며, 따라서 정상파가 형성되지 않는 것으로 알려져 있다. 위의 경우는 환형반복 구조물이 회전하지 않는 경우이므로 양의 방향으로 진행하는 파만을 적용하여도 타당하다. 예를 들면, $N = 6$ 이고 $k = 2$ 일때와 $k = -2$ 일때, 모두 $q_1 = q_4, q_2 = q_5, q_3 = q_6$ 인 형상을 표현하고 있다. N 이 홀수에서도 양의 방향으로 진행하는 파에 해당하는 값만 취하면 된다. 그러므로, N 이 짝수일때는

$$k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

마찬가지로, N 이 홀수일때는

$$k = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}$$

까지의 값만 가진다. 식(3-10)과 식(3-11)은 하나의 분할구조물에 대한 식이며

다른 분할구조물과 비연성이다. 따라서, 다음과 같은 결론을 얻을수 있다. 환형반복구조물을 $N/2\pi$ 각도만으로 구성된 임의의 분할구조물만으로 모드공간 내에서 전체 환형반복구조물의 거동을 정확히 표현할수 있다. 앞으로는, 위와 같은 분할구조물을 섹터 모델(sector model) 이라고 하겠다.

3-2 유한요소법을 통한 모형화

만약 동일한 분할구조물(sector model)로 구성되어 있는 환형반복구조물의 한 섹터를 m 이라 하면, 각 주파수 ω 를 가지며 조화진동을 한다고 할때, 이 분할 구조물만의 고유치문제는 다음과 같이 표현된다.

$$\left[K^m - \omega^2 M^m \right] \{w\}^m = \{f\}^m \quad (3-14)$$

여기서 $\{w\}^m$ 은 한 분할구조물의 자유도이다. $\{w\}^m$ 와 $\{f\}^m$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\{w\}^m = \begin{pmatrix} w_L \\ w_I \\ w_R \end{pmatrix}^m \quad (3-15)$$

$$\{f\}^m = \begin{pmatrix} f_L \\ f_I \\ f_R \end{pmatrix}^m \quad (3-16)$$

여기서 아래첨자L은 섹터모델중 왼쪽경계면의 자유도를, 아래첨자I는 내부공간의 자유도를 아래첨자R은 오른쪽경계면의 자유도를 나타낸다. 자유파가 전파되어 가는 것이므로 $\{f\} = 0$ 이다. 그런데 $\{f_L\}$ 와 $\{f_R\}$ 는 0의 값을 가진다고 볼 수 없다. 왜냐하면, 이 힘들은 한개의 섹터로부터 다음의 섹터로 파동을 전달하는 구실을 하기 때문이다. 어떤 값을 가지는 지 정확히 알수 없지만 경계에서의 힘의 균형을 만족시키기 위해서, 다음의 관계를 가지고 있다는 것을 알 수 있다.

$$\{f_R\}^m + \{f_L\}^{m+1} = 0$$

식(3-13)과 식(3-14)에 Floquet정리를 적용하면,

$$\{w\}^m = \begin{pmatrix} w_L \\ w_I \\ w_R \end{pmatrix}^m = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ e^{-j\mu_I} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_L \\ w_I \end{pmatrix}^m = T \begin{pmatrix} w_L \\ w_I \end{pmatrix}^m \quad (3-17)$$

$$\{f\}^m = \begin{pmatrix} f_L \\ f_I \\ f_R \end{pmatrix}^m = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ -e^{-j\mu_I} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_L \\ f_I \end{pmatrix}^m \quad (3-18)$$

여기서,

$$T^H = \begin{bmatrix} I & 0 & e^{j\mu_I} \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

식(3-17)과 식(3-18) 식을 식(3-14)에 대입하고 T^H 를 각항의 앞에 곱하면, 강성행렬은

$$\begin{bmatrix} I & 0 & e^{j\mu_I} \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ -e^{-j\mu_I} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_L \\ f_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_L \\ f_I \end{Bmatrix} \quad (3-19)$$

여기서 윗첨자H는 켈레복소(complex conjugate) 매트릭스의 전치행렬이다.

즉, 우리가 알지 못하는 경계면에 작용하는 힘은 T^H 를 각항의 앞에 곱함으로써 유한요소법으로 모형화하는데 있어서 아무런 영향을 주지 않으며, 자유파인 경우 $F_I = 0$ 이므로 강성행렬전체는 0의 값을 갖는다.

$$\left[K^m(\mu_I) - \omega^2 M^m(\mu_I) \right] \begin{Bmatrix} w_L \\ w_I \end{Bmatrix} = 0 \quad (3-20)$$

여기서

$$K^m(\mu_I) = T^H K^m T, M^m(\mu_I) = T^H M^m T$$

K^m 을 아래와 같이 표현하면

$$K^m = \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LI} & K_{LR} \\ K_{IL} & K_{II} & K_{IR} \\ K_{RI} & K_{RI} & K_{RR} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} K^m(\mu_I) &= \begin{bmatrix} K_{LL} + e^{-j\mu_I} K_{LR} + e^{j\mu_I} K_{RL} + K_{RR} & K_{LI} + e^{j\mu_I} K_{RI} \\ K_{IL} + e^{-j\mu_I} K_{IR} & K_{II} \end{bmatrix} \\ &= K^R(\mu_I) + j K^I(\mu_I) \end{aligned} \quad (3-21)$$

유사한 방법으로 강성 행렬에 적용하면

$$M^m(\mu_I) = M^R(\mu_I) + j M^I(\mu_I) \quad (3-22)$$

을 구할 수 있다.

여기서 $\mu_I = \frac{2k\pi}{N}$ 이고, N이 짝수일 때는 $k = 0, 1, 2, \dots, N/2$ 값을, N이 홀수일 때는 $k = 0, 1, 2, \dots, (N-1)/2$ 의 값을 가진다.

$$\begin{Bmatrix} w_L \\ w_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w^R \end{Bmatrix} + j \begin{Bmatrix} w^I \end{Bmatrix} \quad (3-23)$$

로 표현하면,

식(3-20)은

$$\left[\left(\mathbf{K}^R + j \mathbf{K}^I \right) - \omega^2 \left(\mathbf{M}^R + j \mathbf{M}^I \right) \right] \left(\left\{ \mathbf{w}^R \right\} + j \left\{ \mathbf{w}^I \right\} \right) = 0 \quad (3-24)$$

식(3-24)을 실수부분과 허수부분을 각각 분리하여 다음과 같이 표현할 수 있다..

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^R - \mathbf{K}^I \\ \mathbf{K}^I \mathbf{K}^R \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}^R - \mathbf{M}^I \\ \mathbf{M}^I \mathbf{M}^R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}^R \\ \mathbf{w}^I \end{Bmatrix} = 0 \quad (3-25)$$

여기서

$$\left(\mathbf{T}^H \mathbf{K}^m \mathbf{T} \right)^H = \mathbf{T}^H \mathbf{K}^m \mathbf{T}, \quad \left(\mathbf{T}^H \mathbf{M}^m \mathbf{T} \right)^H = \mathbf{T}^H \mathbf{M}^m \mathbf{T}$$

이므로

\mathbf{K}^R 와 \mathbf{M}^R 은 대칭행렬이고 $-\mathbf{K}^{IT} = \mathbf{K}^I, -\mathbf{M}^{IT} = \mathbf{M}^I$ 이므로 식(3-25)는 실수이며 대칭인 고유치문제가 된다. 따라서 이 고유치 문제는 종래에 나와있는 루틴을 그대로 사용할 수 있다.

3-3 섹터 모델의 유용성

종래의 방법으로 환형반복구조물 전체를 유한요소법으로 모형화한 후 고유치 문제를 풀 경우에는 섹터의 갯수 N 이고 한섹터당 경계면의 자유도 J_I , 내부자유도 j_I 라면 $j = j_B + j_I$ 라 할때 $Nj \times Nj$ 에 해당하는 고

유치 문제에 해당하나, 식(3-13)와 같은 하나의 섹터모델로 고유치문제를 풀 경우에는 $2j \times 2j$ 에 해당하는 고유치 문제에 해당한다. 그러나, 섹터 모델로 해석할 경우, N 이 짝수인 경우에는 $\left(\frac{N}{2} + 1\right)$ 번, N 이 홀수에 해당하는 경우에는 $\frac{(N+1)}{2}$ 에 해당하는 고유치 문제를 풀어야만 한다. 그렇다면, $Nj \times Nj$ 매트릭스에 해당하는 고유치문제를 한번 해석하는 것과 $2j \times 2j$ 매트릭스에 해당하는 고유차문제를 $\left(\frac{N}{2} + 1\right)$ 번 또는 $\frac{(N+1)}{2}$ 번 해석하는 것 중 어느 것이 더 유용한 것인지를 확인해야 할 것이다. 이를 위하여 일반적으로 많이 사용하는 자코비법으로 연산횟수와 필요한 기억용량을 비교해 보고자 한다. 표1에는 연산횟수를 표2에는 기억용량을 비교하였다. 전체 구조물에서의 연산횟수는 섹터의 갯수에 기하급수적으로 증가하나, 섹터모델에서는 산술급수적으로 증가한다. 따라서 섹터갯수의 증가에 따라 섹터 모델에 의한 해석법으로 보다 빠른 결과를 얻을 수 있다. 그림 8과 그림 9에서는 내부자유도의 수가 18개일때 연산횟수와 기억용량의 섹터모델에 대한 그에 상응하는 전체모델의 비율을 섹터의 갯수에 따라 비교하였으며, 그림10과 그림11은 내부자유도의 수가 24개일때의 그것을 그려 놓았다. 이들 그림에서 섹터의 갯수가 증가함에 따라 연산횟수와 기억용량이 늘어나고 있음을 알 수 있다. 그림8과 그림10, 그리고 그림9과 그림11을 비교하면 내부자유도의 증가에 따른 영향은 크지 않다는 것을 알 수 있다.

4. 예제와 고찰

환형반복구조물의 예로 두께가 일정하며 내부는 고정, 외부는 자유인 환형원판을 고려하자.

환형원판을 모형화하는 데 있어서 다음과 같은 가정을 하였다.

1. 균질하며 선형탄성인 재료로 이루어져 있다.
2. 얇은 평판 이론을 적용하였다.
3. 환형원판의 횡방향 진동만을 고려하며 종방향의 진동과 회전축을 중심으로 하는 비틀림진동은 무시한다.

환형원판의 재원은 다음과 같다.

내경 $: r_i = 0.3 \text{ m}$

외경 $: r_o = 1 \text{ m}$

포아송비 $: \nu = 0.3$

질량 밀도 $: \rho = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

두께 $: h = 1 \text{ m}$

탄성 계수 $: E = 10.92 \text{ Pa}$

그러면 plate flexural rigidity $D (= Eh^3 / 12(1-\nu^3)) = 1$ 이 된다.

유한요소법으로 해석시 참고문헌[9]에 나와 있는 요소를 사용했다. 한

요소당 각모서리에 4개의 절점이 있고 한 절점에 처짐량과 처짐량의 반
 경방향의 기울기, 처짐량의 회전각에 대한 기울기로 이루어진 3개의 자
 유도를 가지고 있다. 주파수 파라메타 $\omega r_0^2 (\rho/D)^{1/2}$ 을 엄밀해와 비교하면
 표3과 같다. 먼저 그림6과 같이 매쉬(mesh)를 잘라 환형원판 전체에 대
 한 공진주파수를 구하였다 이때 사용한 요소의 갯수는 24개, 자유도는
 96이다. 그뒤 그림7과 같은 환형원판중 45도 만큼의 섹터모델을 만들었
 다. 이때 사용한 요소의 갯수는 3개 자유도는 24이다. 앞의 이론으로 공
 식화하여 고유치문제를 5번 반복하여 풀은 결과 그림6과 같이 매쉬를
 자르고 풀은 결과와 동일하였다. 본예제의 경우 섹터모델에 의한 연산횟
 수는 전체 환형반복구조물에 비해 1/12에 불과하며, 기억용량 또한 1/15에
 불과하므로 이 방법의 효율성이 입증되었다.

5. 결론

유한요소법을 통한 환형 원판의 진동해석에 있어서 환형원판 전체에 대한 모형화가 아닌 360° 를 정수배로 나눈 각도의 모형(섹터모델)만으로도 전체 구조물을 정확히 묘사할 수 있음을 보였다. 이런 방식으로 모형화 함으로써 다음과 같은 잇점이 있음을 보았다.

첫째. 섹터모델을 유한요소법으로 모형화할 경우, 적은 기억용량으로 그에 해당하는 전체구조물을 모형화할 경우와 동일하게 진동문제를 해석해 낼 수 있음을 보였다.

둘째. 고유치 문제를 풀때 섹터모델의 수렴속도가 전체 구조물을 모형화할 때보다 훨씬 빠르다.

셋째. 섹터모델을 통한 모형화일 경우라도 실수이며 대칭인 고유치 문제가 되기 때문에 기존에 나와 있는 고유치 문제 해법을 그대로 적용할 수 있어 다른 번거러움이 없다.

따라서 본논문에서 사용되어진 섹터모델은 환형 반복구조물의 진동을 유한요소법으로 해석할 경우 효과적으로 사용되어 질 수 있다.

6. 참고 문헌

1. L. Brillouin , *Wave Propagation in Periodic Structures*. New York : Dover Publications (1953)
2. L. Cremer, M. Heckl, & E. E. Ungar , *Structure - Borne Sound* , Berlin , Springer-Verlag (1973, Translated from German, Original 1967)
3. D. J. Mead , "A General Theory of Harmonic Wave Propagation in Linear Periodic Systems with Multiple Coupling." , *Journal of Sound and Vibration* , vol 27, pp. 235 - 260 (1973)
4. G. Sen Gupta , "Natural Flexural Waves and The Normal Modes of Periodically - Supported Beams and Plates." , *Journal of Sound and Vibration*, vol 13, pp. 89 - 101 (1970)
5. Ruth M. Orris, & M. Petyt , "A Finite Element Study of Harmonic Waves Propagation in Periodic Structures", *Journal of Sound and Vibration*, vol 33, pp. 223 - 236 (1974)
6. D. L. Thomas , "Dynamics of Rotationally Periodic Structures" *International*

Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 14, pp. 81 - 102 (1979)

7. C. W. Cai, Y. K. Cheung, & H. C. Chan , "Dynamic Response of Infinite Continuous Beams Subjected to a Moving Force - An Exact Method"., Journal of Sound and Vibration, vol 123, pp. 461 - 472 (1988)
8. M. Petyt ,*Introduction to Finite Element Vibration Analysis* , Cambridge Univ. Press(1990)
9. M. D. Olson , "Annular and Circular Sector Finite Elements for Plate Bending" , Int. J. Mech. Sci., vol 12, pp. 17 - 32 (1970)
10. A. W. Leissa , *Vibration of Plates* , NASA SP - 160 (1969)
11. D. L. Thomas , "Standing Waves in Rotationally Periodic Structures", Journal of Sound and Vibration, vol 37 , pp. 288 - 290 (1974)
12. C. A. Mota Soares, & M.Petyt , "Finite Element Dynamic Analysis of Practical Bladed Discs", Journal of Sound and Vibration, vol 161, pp. 561 -570 (1978)
13. K.J. Bathe , *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall (1982)

14. J. Wildheim, "Vibrations of Rotating Circumferentially Periodic Structures", Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, pp. 213-229 (1981)
15. J. Wildheim, "Excitation of Rotating Circumferentially Periodic Structures", Journal of Sound and Vibration, vol 75 , pp. 397-416 (1981)
16. J. Wildheim, "Excitation of Rotationally Periodic Structures", ASME Journal of Applied Mechanics ,vol 46 , pp. 878-882 (1979)

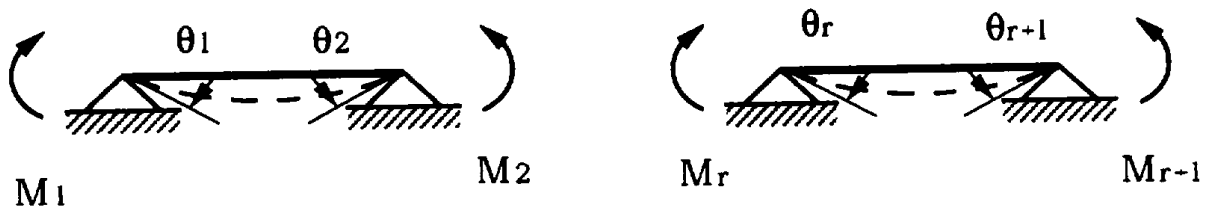
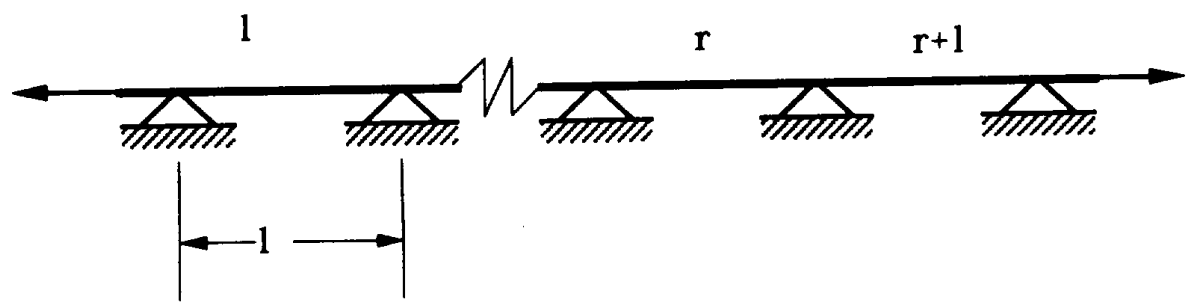


그림1. 반복지지되어 있는 무한대빔

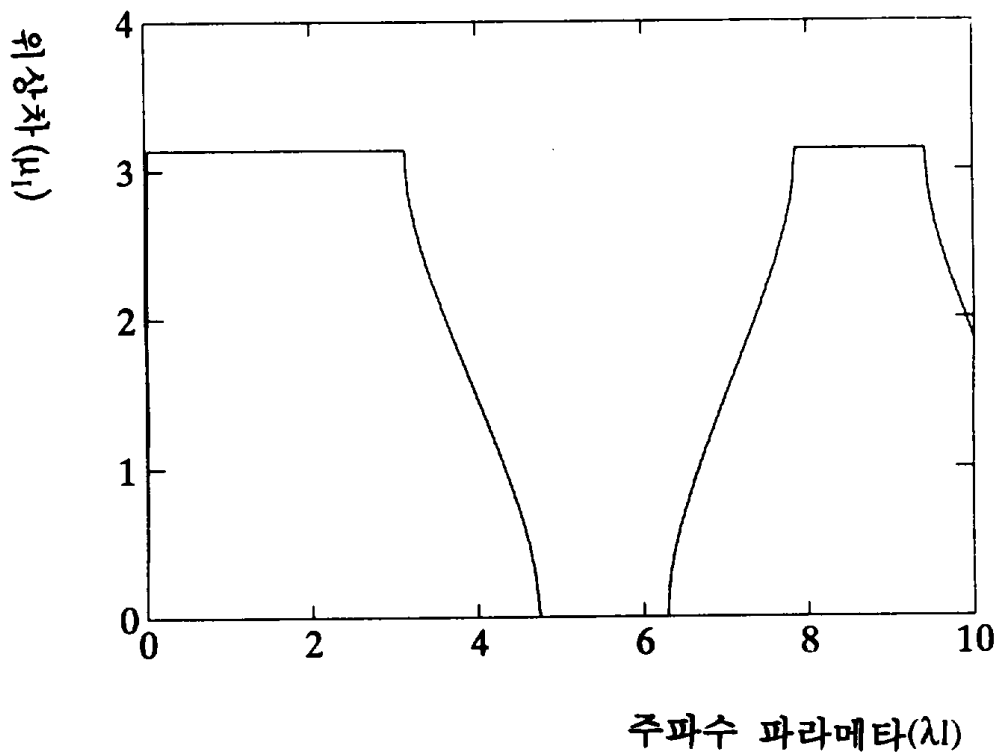
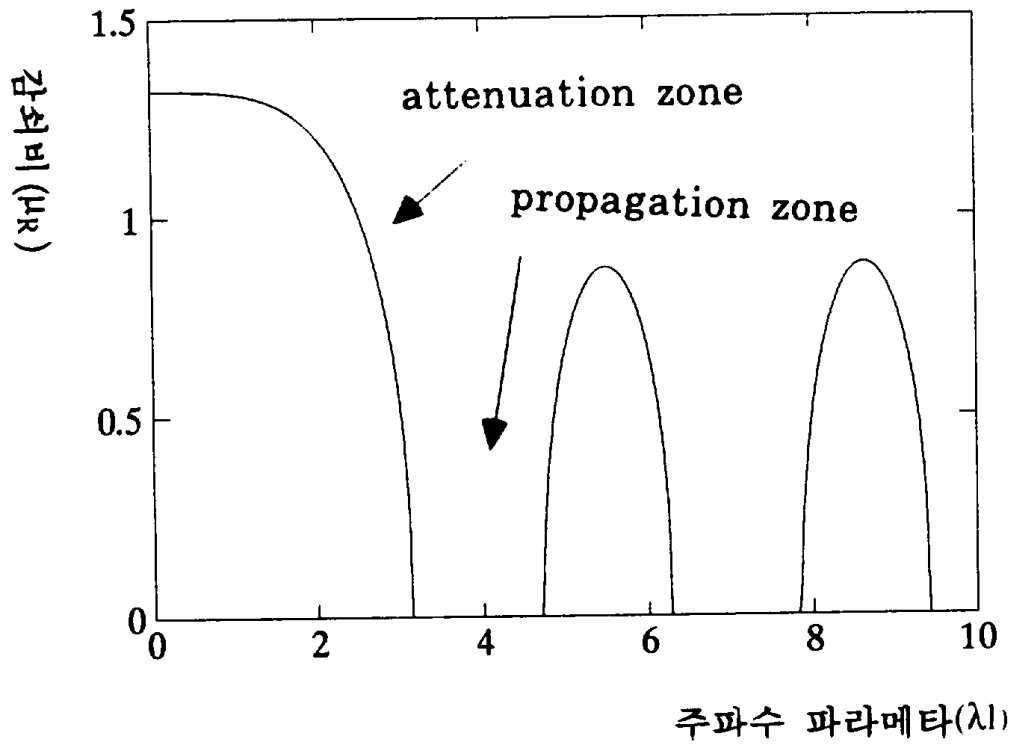


그림2. 감쇠비 (μ_R) 과 위상차 (μ_I) 의 주파수파라메타에 대한 변화량

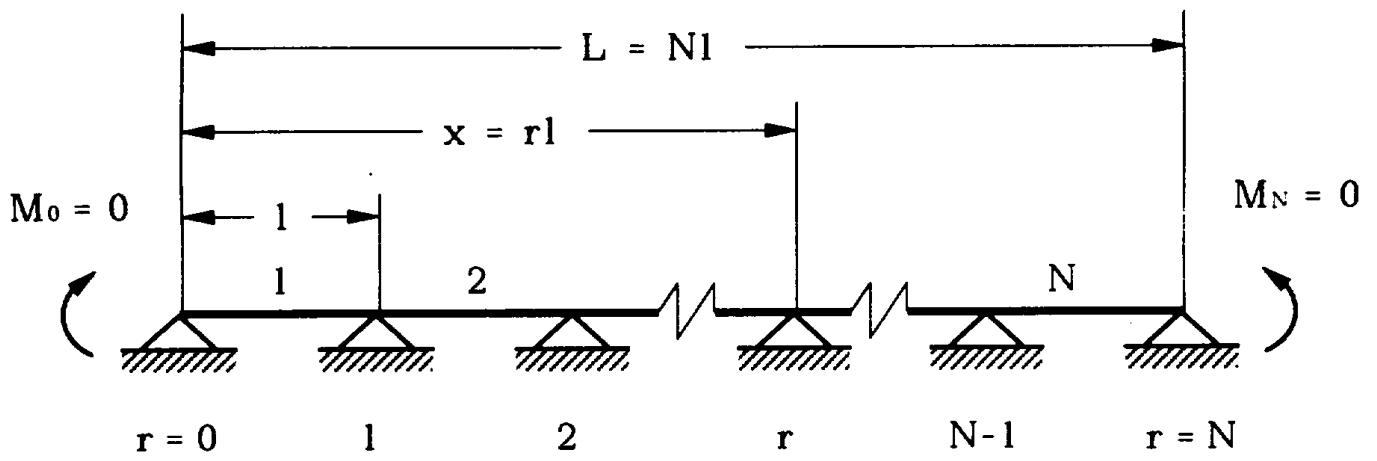


그림3. N 개의 지지대가 유한반복빔

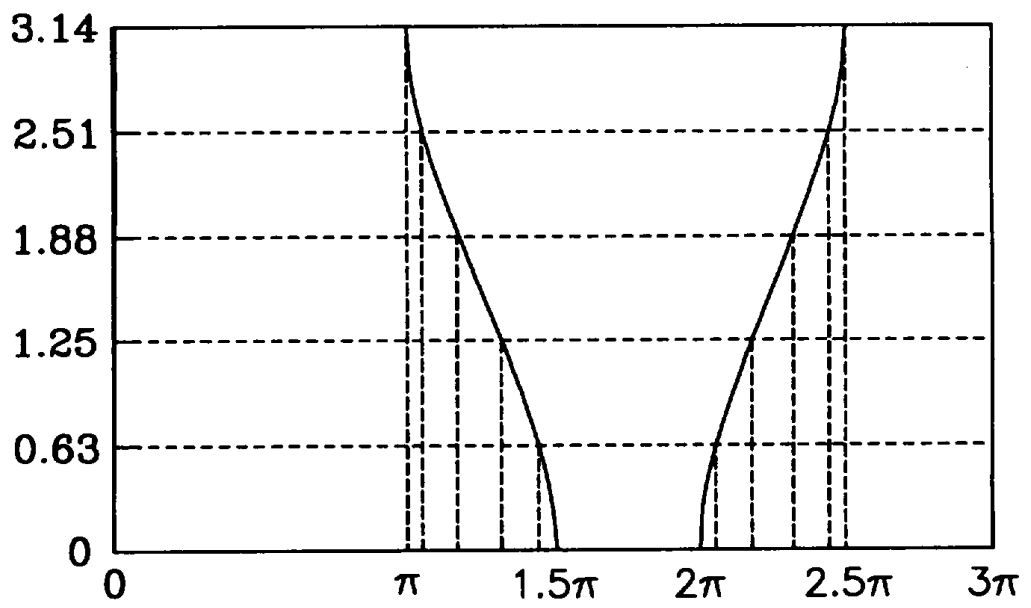


그림4. 5-개의 지지대가 있는 유한반복빔의 주파수 파라메타

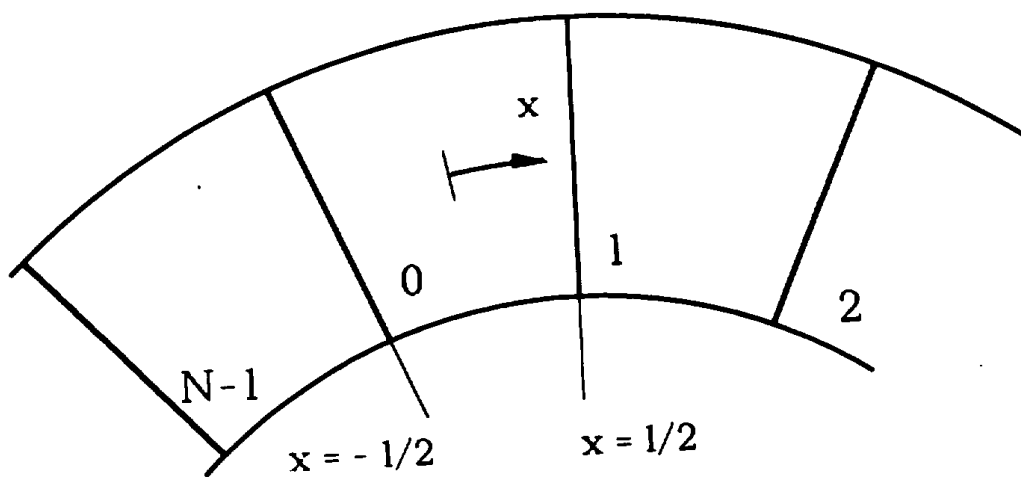


그림5. 환형반복구조물의 간략도

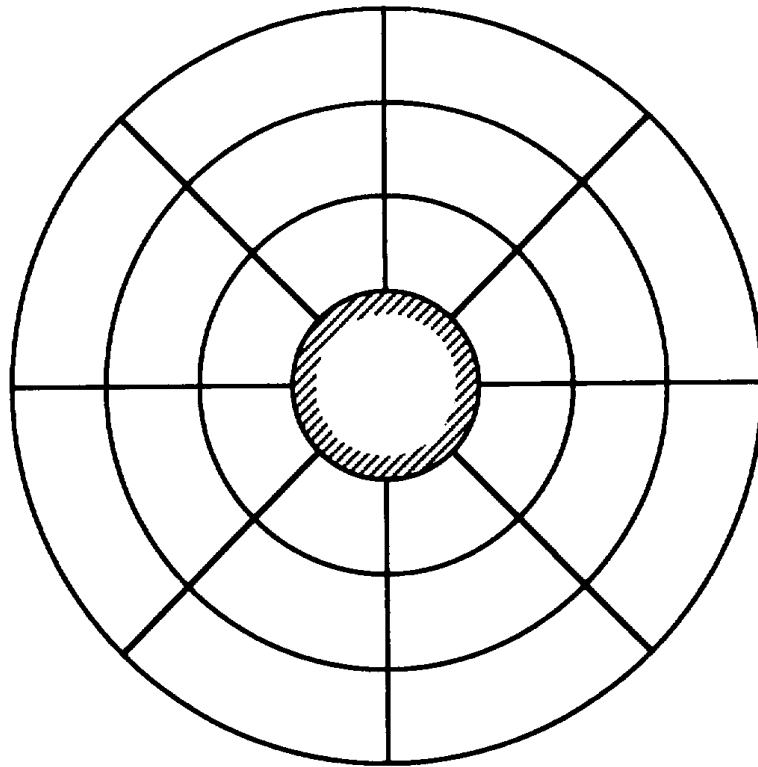


그림6. 환형원판의 매쉬

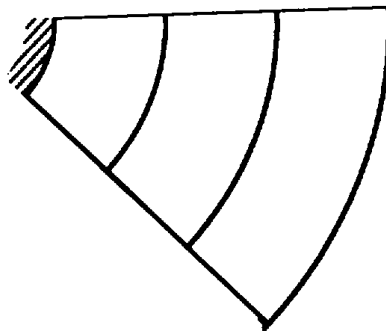


그림7. 섹터모델의 매쉬

매트릭스 크기		연산횟수
$n \times n$		$3n^3 + 6n^2 + 6n + 18$
전체 환형반복구조물 $N_j \times N_j$		$3(N_j)^3 + 6(N_j)^2 + 6N_j + 18$
섹터 모델	N:짝 수 $2j \times 2j$	$(N/2 + 1) \left(3(2j)^3 + 6(2j)^2 + 6(2j) + 18 \right)$
	N:홀 수 $2j \times 2j$	$((N + 1)/2) \left(3(2j)^3 + 6(2j)^2 + 6(2j) + 18 \right)$

표1. 일반적 자코비법에 의한 연산횟수 비교

매트릭스 크기	기억 용 량
$n \times n$	$4n^2 + 4n$
전체환형반복구조물 $N_j \times N_j$	$4(N_j)^2 + 4(N_j)$
섹터 모델 $2j \times 2j$	$4(2j)^2 + 4(2j)$

표2. 일반적 자고비법에 의한 기억용량 비교

Nodal diameter	Nodal circles	F E M	Analytical	% Difference
1	0	6.30	6.33	-0.48
0	0	6.67	6.66	0.15
2	0	7.37	7.96	-7.41
3	0	13.26	13.27	-0.08
0	1	42.6	42.6	0.
1	1	44.1	44.6	-1.12
2	1	52.94	50.9	2.95
3	1	60.3	62.1	-2.9

표3. 주파수 파라메타, $\omega_0^2(\rho/D)^{1/2}$ 의 엄밀해와의 비교

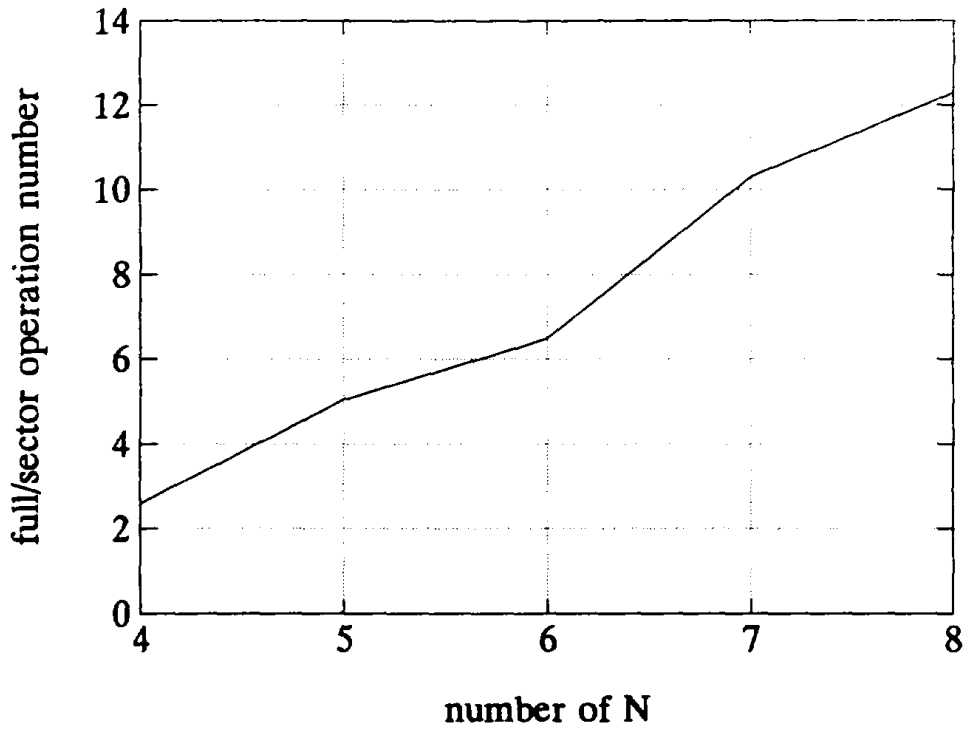


그림8. 내부자유도가 18개일때의 섹터의 갯수에 따른 연산횟수의 비교

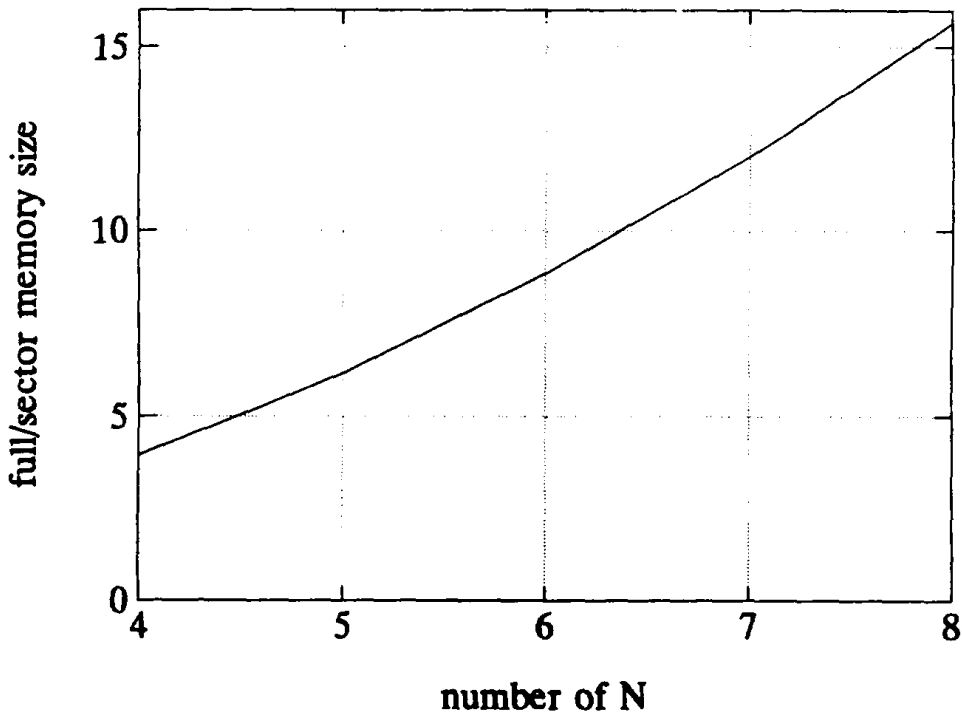


그림9. 내부자유도가 18개일때의 섹터의 갯수에 따른 기억용량의 비교

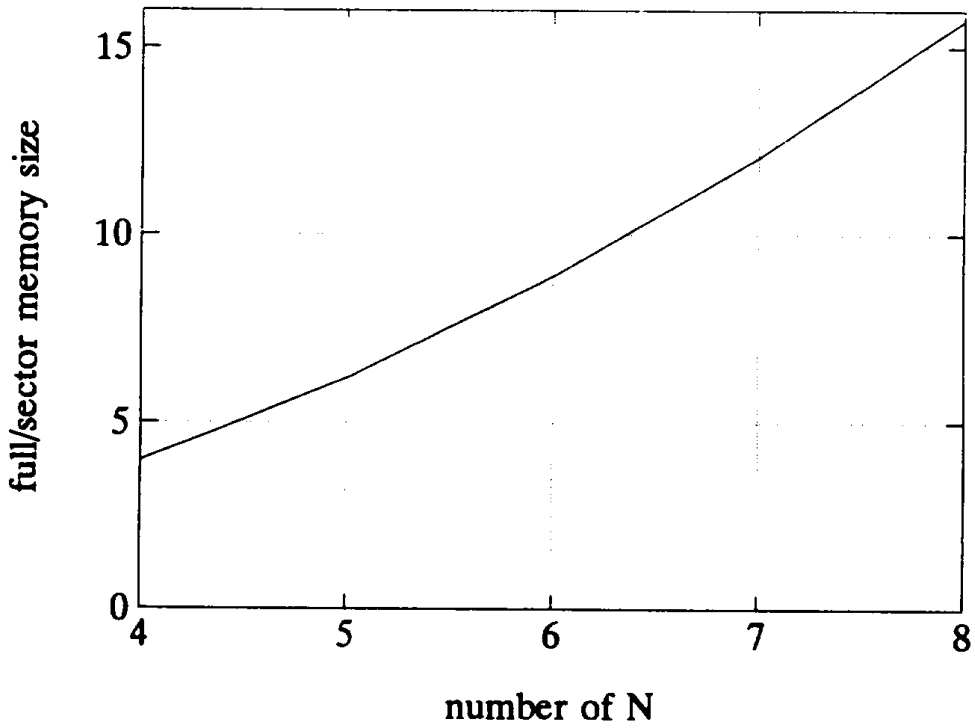


그림11. 내부자유도가 24개 일때의 섹터의 갯수에 따른 기억 용량의 비교

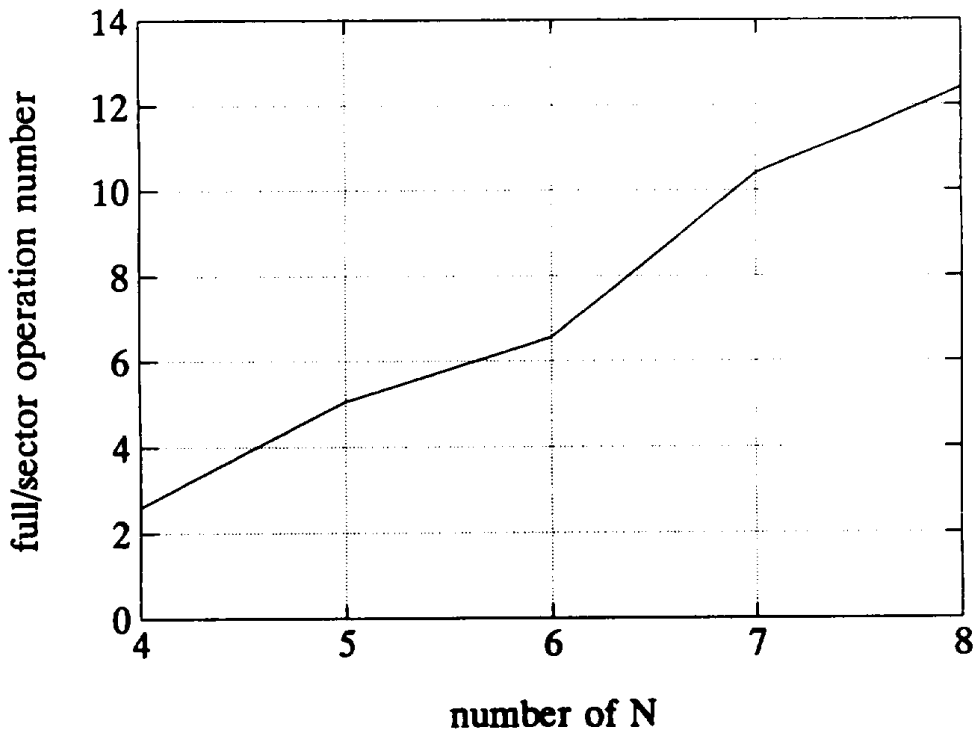


그림10. 내부자유도가 24일때의 섹터의 갯수에 따른 연산횟수의 비교

감사의 글

부족한 저를 지도해 주신 이 인원 교수님과 바쁘신 중에도 심사를 맡아주신 이 인 교수님, 윤 성기 교수님에게 감사를 드립니다.

2년이라는 시간동안 좋은 벗이 되어준 선배형들, 동료들, 그리고 후배들의 모습을 떠올리며, 멋진 미소를 띄워 봅니다. 같은 교수님에게 지도받은 길호형, 태희형, 동욱이형, 만철이형 모두 고마웠습니다. 소음.진동.제어 실험실에서 공부하면서 느낀 많은 깨달음들, 느낌들 그리고 고뇌들이 다시 생각납니다. 이 모든것들이, 그저 흉내내는데만 그친 저의 부족한 논문보다도 더 소중하게만 느껴집니다.

끝으로 오늘의 제가 있기까지 깊은 사랑으로 보살피 주신 부모님의 은혜에 감사드리며 매형과 두 누님에게도 고맙다는 말을 이 글을 통해 전합니다.

이 력 서

성 명 : 박 정 규
생년월일 : 1968년 10월 18일 (음력)
출생지 : 부산직할시
본 적 : 경상남도 울산군 온양면 고산리 599

학 력

1987 .3 - 1991 .2 : 한양대학교 공과대학 기계공학과 공학사(B.S.)

1991 .3 - 1993 .2 : 한국과학기술원 기계공학과 공학석사(M.S.)