석 사 학 위 논 문

비비례 감쇠시스템에 대한 효율적인 모드 중첩법

조 상 원 (趙 常 元)

토 목 공 학 과

한 국 과 학 기 술 원

1999

비비례 감쇠시스템에 대한
효율적인 모드 중첩법

Efficient Mode Superposition Methods for Non-Classically Damped Systems

Efficient Mode Superposition Methods for Non-Classically Damped Systems

Advisor : Professor In-Won Lee

by

Sang-Won Cho
Department of Civil Engineering
Korea Advanced Institute of Science and Technology

A thesis submitted to the faculty of the Korea Advanced Institute of Science and Technology in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Engineering in the Department of Civil Engineering

Taejon, Korea
1998. 12. 17.
Approved by

Professor In-Won Lee
Major Advisor

비비례 감쇠시스템에 대한 효율적인 모드 중첩법

조 상 원

위 논문은 한국과학기술원 석사학위논문으로 학위논문 심사위원회에서 심사 통과하였음.

1998 년 12 월 17 일

심사 위원장 이 인 원 (인)

심 사 위 원 윤 정 방 (인)

심 사 위 원 김 진 근 (인)

MCE 973645 조상원. Cho Sang-Won. Efficient Mode Superposition Method for Non-Classically Damped Systems. 비비례 감쇠시스템에 대한 효율적인 모드 중첩법. Department of Civil Engineering. 1998. 42p. Advisor : Professor In-Won Lee

ASTRACT

This thesis is on the improved mode superposition methods for non-classically damped systems by considering the truncated high modes. Generally, the mode superposition methods use a relatively small subset of the modes of the structures. The mode acceleration and the modal truncation augmentation methods improve the results of the mode superposition method by considering effect of the truncated high modes. For using these methods to non-classically damped systems, the non-classically damped systems are approximated to the classically damped systems. The errors are induced by these approximations.

In this paper, therefore, the mode acceleration and the modal truncation augmentation methods are expanded to analyze the non-classically damped systems. The applicability of expansion is verified by closed form solutions and numerical examples. Two numerical examples are carried out. In the first example, the responses of cantilever beam due to the earthquake loading and the step loading are evaluated respectively and the results of each method are compared. In the second example, to show the characteristics of the expanded modal truncation augmentation method, the responses of ten-story building by each method are compared. The expanded methods are found to be superior to the simple mode displacement methods.

The expanded modal truncation augmentation method is conditionally stable in the non-classically damped systems, depending on the pattern of the external loading whereas the expanded mode acceleration method is stable for the all cases of loading in the non-classically damped systems. When the expanded modal augmentation method is used to non-classically damped systems, the results are the same with that of the expanded mode acceleration method. To stably analyze the non-classically damped systems, it is better to use the expanded mode acceleration method.

목 차

- 그림 및 표 목록-

제 1 장 서론

1.1 연구 배경

과거에는 구조물의 규모가 작았고 바람이나 지진의 영향이 현재처럼 구조물 설계의 중요한 요소가 아니었다. 따라서 정적하중에 대한 해석만으로도 안정성을 확보한 설계를 할 수 있었다. 그러나 현대의 구조물들은 구조가 복잡해지고 대형화되고 있으며 구조물의 사용성과 안정성을 확보하기 위해 감쇠력이 큰 제어 시스템들을 도입하고 있다. 따라서 구조물을 보다 안전하고 효율적으로 설계하기 위해서는 동적해석이 필수적이다.

동적해석의 방법에는 이론적 해석과 수치적 해석이 있으며, 이론적 해석이 어려운 대형구조물의 경우에는 수치해석이 일반적인 방법이다. 수치해석에서 이용하는 동적해석의 방법으로는 직접 적분법과 모드 중첩법이 있다. 직접 적분법은 구조물의 운동방정식을 축약하지 않고 해석하기 때문에 정확하지만 계산량이 많다. 또한 해석의 안정성을 위해 시간증분을 작게 하면 해석시간이 오래 걸리는 단점이 있다. 이에 반해 모드 중첩법은 구조물의 동적 특성을 잘 나타내는 소수의 저차 모드로써 구조물의 운동방정식을 축약하여 해석하기 때문에 경제적이다. 직접 적분에 비해서 모드 중첩법이 가지는 장점을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 소수의 저차 모드만을 사용하므로 계산량이나 계산시간이 단축되어 효율적이다

둘째, 각각의 모드에 대한 구조물의 동적특성을 알 수 있다.

셋째, 지진과 같이 재하시간이 긴 하중에 대해 효율적인 해석을 할 수 있다.

그러나 모드 중첩법은 구조물의 운동방정식을 축약하여 해석하므로 누락되는 고차모드로 인해 오차가 발생한다. 따라서 모드 중첩법의 결과를 개선하기 위하여, 누락되는 고차 모드들의 영향을 보정한 방법들이 제안되었다. 누락되는 고차 모드로 인한 오차를 보정한 방법으로 모드 가속도법(MA 방법: Mode Acceleration Method)과 모드 절삭 보강법(MT 방법:Modal Truncation Augmentation Method)이 있다.

MA 방법은 Williams 에 의해 처음으로 소개되었으며 Bisplinghoff 와 Ashley[1]에 의해서 감쇠가 없는 시스템에 적용되었다. Hurty 와 Rubenstein[2]은 본격적으로 비례 감쇠 시스템에 적용된 MA 방법을 적용하였으며, Hansteen 과 Bell[3]은 MA 방법과 단순한 모드중첩법(Mode Displacement Method, 이하 MD 방법)을 주파수영역에서 비교하였다. MT 방법은 Wilson 과 Itoh[4]에 의해 처음으로 그 개념이 제안된 최근의 이론이다. Guyan[5]은 특정한 하중이 작용하는 구조물에 MT 방법을 적용하였으며, Dickens[6]는 보다 일반화된 하중이 작용하는 구조물에 MT 방법을 적용하였다.

이러한 개선된 모드 중첩법들은 비비례 감쇠시스템의 대각행렬화의 어려움과 고유벡터 생성의 비효율성 등으로 인해 비례 감쇠시스템에 국한되어 사용되었다. 따라서 본 연구에서는 개선된 모드 중첩법들을 비비례 감쇠스템을 효율적으로 해석할 수 있도록 확장하고자 한다.

1.2 연구 목적

일반적인 모드 중첩법과 개선된 모드 중첩법인 MA 방법과 MT 방법은 비례 감쇠시스템의 해석에 적합한 형태를 갖고 있다. 그러나 대부분의 일반적인 구조물은 비비례 감쇠 특성을 갖고있다. 특히 지반구조 상호작용 시스템, 진동제어기를 갖춘 대형구조물 그리고 다양한 재료로 구성된 실제 구조물 등은 감쇠력이 매우 큰 비비례 감쇠 거동을 한다. 비비례 감쇠시스템의 해석에 기존의 모드 중첩법을 적용하는 경우 비비례 감쇠를 비례 감쇠로 근사하여 사용하는 것이 일반적인 방법이다. 그러나 이러한 방법은 필연적으로 오차[7]를 포함하게 되어 신뢰할 수 없는 결과를 준다. 그러므로 실제 구조물의 동적해석을 정확하고 효율적으로 수행하기 위해서는 비비례 감쇠시스템에 적용 가능하며 정확한 결과를 주는 해석방법이 필요하다.

이에 본 연구에서는 비례감쇠시스템의 동적해석에 널리 사용되는 MA 방법과 MT 방법을 비비례 감쇠시스템의 해석에 적합한 형태로 확장하고 그 사용성을 검증하고자 한다.

1.3 연구 범위

본 연구에서는 먼저 비례 감쇠시스템에 적용되는 기존의 MA 방법과 MT 방법을 소개하고 각 방법의 특성들을 설명하였다. 또한 비비례 감쇠시스템에 MA 방법과 MT 방법을 확대 적용하기 위하여 상태공간 방정식과 복소 영역에 대한 모드 중첩법을 도입하였다.

또한 이론해와 수치예제로써 비비례 감쇠시스템에 대한 MA 방법과 MT 방법의 적용성을 검토하였다. 수치예제로써 지진하중과 Step Loading 이 작용하는 캔틸레버빔을 해석하였으며 각각의 방법에 의한 응답을 비교하였다. 특별히 비비례 감쇠시스템에 대한 MT 방법의 특성을 검증하기 위하여 10 층의 Shear Building 을 해석하여 MA 방법의 결과와 비교하였다.

제 2 장 비례 감쇠시스템에 대한 모드 중첩법

2.1 기존 모드 중첩법[9],[15],[16]

구조물의 운동을 기술하는 방정식은 일반적으로 미분 방정식으로 표현된다. 복잡한 형상을 갖는 구조물은 미분 방정식에 대한 이론해를 구하기 어렵기 때문에 수치적 해석 방법인 유한 요소법이 널리 사용된다. 유한 요소법에서는 구조물을 이산화하고 운동방정식을 행렬식으로 표현하는 것이 일반적이다. 식(2-1)은 일반적인 구조물의 운동방정식을 행렬식으로 표현한 것이다.

$$\mathbf{M\ddot{u}} + \mathbf{C\dot{u}} + \mathbf{Ku} = \mathbf{f(t)} \tag{2-1}$$

위 식에서 **M**은 구조물의 질량행렬(mass matrix)이며 **C**는 감쇠행렬(damping matrix), 그리고 **K** 는 강성행렬(stiffness matrix)이다. 벡터 **u** 는 구조물의 변위를 나타내고 벡터 **f** 는 구조물에 가해지는 하중을 나타낸다. 위의 방정식을 모드 중첩법으로 해석하기 위해서는 구조물의 동적특성인 고유진동수와 고유모드를 먼저 구해야 한다. 고유진동수와 고유모드는 고유치 문제로부터 구하며, 식(2-1)에 대한 고유치 문제는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}f = l\mathbf{M}f \tag{2-2}$$

여기서 f 는 구조물의 고유모드 벡터이며, l 는 구조물의 고유치로써 w_i^2 이다. 운동방정식의 차수가 n 이면, n 개의 고유치와 이에 대응하는 n 개의 고유모드가 존재한다. 고유모드의 크기는 다음 식과 같은 질량 정규화(mass normalization) 조건을 만족하도록 정하는 것이 일반적이다.

$$f_i^T \mathbf{M} f_i = \mathbf{1} \qquad\qquad \boldsymbol{i} = \mathbf{1, 2, 3, \cdots}, \boldsymbol{n} \tag{2-3}$$

고유모드의 특성은 각 벡터간의 직교성(orthogonality)이다. 고유모드의 직교성을 이용하면 식(2-1)의 운동방정식을 n 개의 독립(uncoupled)된 방정식으로 변환할 수 있다. 식(2-4)과 식(2-5)는 고유모드의 직교성을 표현한 것이다.

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = \delta_{ij} \qquad \boldsymbol{i, j} = \mathbf{1, 2, 3, \cdots, \boldsymbol{n}} \tag{2-4}$$

$$\phi^T \mathbf{K} \phi = \omega_i^2 \delta_{ij} \qquad \boldsymbol{i, j} = \mathbf{1, 2, 3, \cdots, \boldsymbol{n}} \tag{2-5}$$

여기서 δ_{ij}는 Kronecker delta 이다. 이러한 고유모드의 직교성을 행렬 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \tag{2-6}$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda \tag{2-7}$$

위 식에서 $\mathbf{I}$는 n 차의 단위행렬이며 Φ는 n 개의 고유모드로 이루어진 행렬이고 Λ는 고유치를 대각요소로 하는 대각 행렬로 다음과 같다.

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_n] \tag{2-8}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2-9}$$

또한 구조물의 변위는 식(2-8)과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathbf{u}(t) = \Phi \, \mathbf{q}(t) \tag{2-10}$$

위와 같이 정의된 변위와 고유모드의 직교성을 이용하여 식(2-1)의 운동방정식을 모드 좌표로 변환하면 식(2-11)과 같다.

$$\ddot{q}_i + 2\beta \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \phi_i^T \mathbf{f}(t) \tag{2-11}$$

여기서 ϕ_i는 구조물의 i 번째 고유모드이고, β는 감쇠율이며, ω_i은 구조물의 i 번째 고유 진동수이다. 이와 같은 방법으로 구해진 모드좌표에서의 응답은 식(2-10)을 이용하여 다시 실제공간(real space)으로 변환할 수 있다. 식(2-12)는 이러한 역변환 과정을 나타낸 것이며 이러한 일련의 과정을 모드 중첩법(mode superposition method)이라고 한

다.

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i q_i(t) \qquad (m << n) \tag{2-12}$$

위 식에서 구조물이 갖는 n 개의 모드 중에 저차의 m 개만을 구하여 사용함으로써, 구조물의 동적응답 해석에 소요되는 시간을 직접 적분법을 이용하는 경우 보다 월등히 절약할 수 있다.

따라서 모드 중첩법은 구조물의 동적평형방정식을 각각의 독립적인 모드로 분리(decoupling)하여 해를 구한 뒤, 각 모드별 전체거동에 대한 기여를 조합하여 전체결과를 구하는 방법으로 각 모드의 직교성을 이용한 모드의 분리 및 중첩의 과정이라 할 수 있다.

2.2 모드 가속도법 (Mode Acceleration Method) [8],[9],[13]

앞의 식(2-12)에서 전체 n 개의 모드 중에서 저차의 m 개만을 사용하여 모드 중첩법을 수행할 경우에 고차 모드의 영향이 누락된다. MA 방법과 MT 방법은, 전체 시스템에 대하여 추가적인 모드를 계산하지 않고, 누락되는 고차모드의 영향을 보정할 수 있는 효율적인 방법으로, MA 방법의 개념은 다음과 같다.

모드 중첩법에 사용되는 저차 모드의 개수, n 은 구조물에 중요한 특정 주파수영역을 해석할 수 있도록 정해지기 때문에, 누락된 고차 모드가 나타내는 응답은 일반적으로 유사 정적(quasi-static)인 응답이라고 추측할 수 있다. 따라서 누락된 고차 모드는 속도나 가속도 응답에 큰 영향을 줄 수 없다. 그러므로 MA 방법에서는 기존의 모드 중첩법에서 구해진 값을 그대로 이용하여 속도와 가속도 응답을 구하고 변위 응답에 대해서만 고차 모드 누락의 영향을 보정한다. 이러한 MA 방법의 알고리즘을 전개하기 위해 식(2-1)의 운동방정식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}_0\mathbf{r}(t) - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) \tag{2-13}$$

여기서 $\mathbf{R}_0$ 는 입력하중 $\mathbf{f}(t)$ 중에서 시간에 따라 변하지 않는 하중벡터(spatial portion)이고 $\mathbf{r}(t)$ 는 시간에 따라 변하는 하중함수(time dependent portion)이다. 식(2-12)의 모드 중첩법으로부터 구해진 응답을 식(2-13)의 우변에 대입하면 MA 방법에 의한 변위를 식(2-14)와 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}_0\mathbf{r}(t) - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\sum_{i=1}^{m}\phi_i\ddot{q}_i(t) - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}\sum_{i=1}^{m}\phi_i\dot{q}_i(t) \qquad (2\text{-}14)$$

2.3 모드 절삭 보강법 (Modal Truncation Augmentation Method) [6],[8],[10]

MT 방법은 누락되는 고차모드의 영향을 추가적인 '유사 고유벡터', MT 벡터를 생성하여 보정하는 방법이다. MT 벡터가 질량과 강성행렬에는 직교(orthogonal)하지만 각각의 고유치 문제를 만족하지 않기 때문에 '유사 고유벡터'라고 한다. 즉 식(2-15)는 만족하지만, 식(2-16)과 같은 고유치 문제는 만족하지 못한다.

$$\mathbf{P}^T\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{P}^T\mathbf{K}\mathbf{P} = \omega_p^2 \qquad (2\text{-}15)$$

$$\mathbf{K}\mathbf{P} \neq \omega_p^2\mathbf{M}\mathbf{P} \qquad (2\text{-}16)$$

여기서 $\mathbf{P}$ 는 MT 벡터이고 ω_p 는 MT 벡터 $\mathbf{P}$ 에 해당하는 **Rayleigh-Ritz** 진동수이다. MT 벡터를 생성하는 과정은 누락하중벡터 $\mathbf{R}_t$ (force truncation vector)를 사용하여 **Ritz** 벡터를 유도하는 **Rayleigh-Ritz approximation** 과정이라고 볼 수 있다. 누락 하중벡터 $\mathbf{R}_t$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_s \qquad (2\text{-}17)$$

여기서 $\mathbf{R}_0$ 는 입력하중 $\mathbf{f}(t)$ 중에서 시간에 따라 변하지 않는 하중벡터(spatial portion)이고, $\mathbf{R}_s$ 는 입력 하중벡터중에서 저차 모드에 의해 표현되는 모드 하중벡터(spatial load vector)로써 다음과 같이 유도한다. 먼저 입력하중벡터 의한 정적변위 $\mathbf{u}$ 는 식(2-18)과 같다.

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{R}_0 \tag{2-18}$$

식(2-18)을 $\mathbf{u} = \Phi\mathbf{q}$ 임을 이용하여 모드 좌표계로 변환하면 식(2-19)와 같다.

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_i \, q_i = \phi_i^T \mathbf{R}_0 \tag{2-19}$$

그리고 식(2-19)는 식(2-20)과 같이 정리할 수 있다.

$$\omega_i^2 q_i = \phi_i^T \mathbf{R}_0 \tag{2-20}$$

따라서 각각의 모드에 의해 표현되는 물리적 변위량 $\mathbf{R}_s$ 는 식(2-21)과 식(2-22)로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{K}\phi_i \, q_i = \mathbf{M}\phi_i \omega_i^2 q_i \tag{2-21}$$

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{M}\phi_i \phi_i^T \mathbf{R}_0 \tag{2-22}$$

MT 벡터는 식(2-23)의 변위벡터 $\mathbf{X}$ 로부터 유도된다. 여기서 $\mathbf{R}_t$ 는 식(2-22)와 (2-17)로부터 구해진다.

$$\mathbf{KX} = \mathbf{R}_t \tag{2-23}$$

다음으로 식(2-24)과 (2-25)를 이용하여

$$\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{X}^\mathbf{T}\mathbf{KX} \tag{2-24}$$

$$\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{X}^\mathbf{T}\mathbf{MX} \tag{2-25}$$

식(2-26)과 같은 축소된 고유치 문제를 푼다.

$$\overline{\mathbf{K}}\boldsymbol{Q} = \overline{\mathbf{M}}\boldsymbol{Q}\overline{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{P}}^{\mathbf{2}} \tag{2-26}$$

따라서 생성된 MT 벡터 P 는 최종적으로 다음과 같다.

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}\boldsymbol{Q} \tag{2-27}$$

유도된 MT 벡터는 기존의 고유 벡터들과 직교하는 특성을 갖는다. 따라서 MT 벡터를 기존의 고유 벡터들에 추가하여 식(2-28)와 같은 유사 고유벡터 행렬, $\overline{\Phi}$ 를 구성한다.

$$\overline{\mathrm{F}} = [\,\mathrm{F} \quad \mathbf{P}\,] \tag{2-28}$$

여기서 F 는 고유벡터 행렬이고, **P** 는 MT 벡터이다. 유사 고유벡터 행렬을 이용하여 응답해석을 수행한 후에 모드중첩의 과정으로부터 MT 방법에 의한 변위를 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}(t) = \overline{\mathrm{F}}\,\mathbf{q}(t) \tag{2-29}$$

2.4 모드 가속도법과 모드 절삭 보강법의 특성 비교[8]

운동방정식(2-1)에 의한 변위는 다음과 같이 두 부분으로 나눌 수 된다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_t \tag{2-30}$$

여기서 $\mathbf{u}_s$는 해석에 포함된 저차 모드에 의한 변위이고, $\mathbf{u}_t$ 는 누락되는 고차모드에 의한 변위이다. 식(2-30)과 식(2-17)을 운동방정식 식(2-1)에 대입하면 다음과 같다.

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}_s + \boldsymbol{C}\,\dot{\mathbf{u}}_s + \mathbf{K}\,\mathbf{u}_s + \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}_t + \boldsymbol{C}\,\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}\,\mathbf{u}_t = \{\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_t\}\mathbf{r}(t) \tag{2-31}$$

저차 고유벡터를 이용한 모드해석에 의해 식(2-32)를 만족하는 변위 $\mathbf{u}_s$를 구할 수 있다.

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}_s + \boldsymbol{C}\,\dot{\mathbf{u}}_s + \mathbf{K}\,\mathbf{u}_s = \mathbf{R}_s\mathbf{r}(t) \tag{2-32}$$

식(2-31)에서 식(2-32)를 빼면 식(2-33)을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}_t + \boldsymbol{C}\,\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}\,\mathbf{u}_t = \mathbf{R}_t\mathbf{r}(t) \tag{2-33}$$

식(2-33)은 저차의 모드에 의해 표현되어지지 않는 부분이다. 따라서 MA 방법과 MT 방법은 추가적인 고유벡터의 계산을 하지 않고, 모드에 의해 표현되지 않는 식(2-33)의 변위 $\mathbf{u}_t$ 를 추정하여 누락된 고차모드의 영향을 보정하는 방법이다.

MA 에 방법에 의한 변위를 $\mathbf{u}_{ma}$ 라고 하면, $\mathbf{u}_{ma}$ 역시 (2-30)과 같이 두 부분으로 나눌 수 있다.

$$\mathbf{u}_{ma} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_{t_{ma}} \tag{2-34}$$

여기서 $\mathbf{u}_s$는 저차 모드에 의한 변위이고 $\mathbf{u}_{t_{ma}}$는 누락되는 고차모드를 보정한 변위이다. 식(2-17)과 (2-34)를 식(2-14)에 대입하고, 식(2-32)를 이용하면 MA 방법을 이용하여 고차 모드를 보정한 변위 $\mathbf{u}_{t_{ma}}$을 구할 수 있다. 구하여진 $\mathbf{u}_{t_{ma}}$는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}_{t_{ma}} = \mathbf{R}_t\mathbf{r}(t) \tag{2-35}$$

식(2-35)를 풀어 쓰면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}_{t_{ma}} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_s)\mathbf{r}(t) \tag{2-36}$$

$$= \mathbf{K}^{-1}(1 - \mathbf{M}\,f_i f_i^T)\mathbf{R}_0\mathbf{r}(t)$$

MT 방법에 의한 변위 $\mathbf{u}_{t_{mt}}$도 위의 MA 방법과 같이 두 부분으로 나눌 수 있다.

$$\mathbf{u}_{mt} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_{t_{mt}} \tag{2-37}$$

2.3 절에 유도한 것과 같이 $\mathbf{u}_{t_{mt}}$는 식(2-38)과 같다.

$$\mathbf{u}_{mt} = \mathbf{P}\mathbf{q}_P(t) \tag{2-38}$$

식(2-38)을 이용하여 식(2-33)을 변환하면 다음과 같다.

$$\mathbf{P}^T\mathbf{M}\,\mathbf{P}\,\ddot{\mathbf{q}}_P + \mathbf{P}^T\,\boldsymbol{C}\,\mathbf{P}\,\dot{\mathbf{q}}_P + \mathbf{P}^T\mathbf{K}\,\mathbf{P}\,\mathbf{q}_P = \mathbf{P}^T\mathbf{R}_t\mathbf{r}(t) \tag{2-39}$$

식(2-39)에 의해 $\mathbf{q}_P(t)$를 구하고 식(2-38)을 이용하여 역변환을 하면 MT 방법을 이용하여 고차 모드를 보정한 변위 $\mathbf{u}_{t_{mt}}$를 구할 수 있다.

기존의 저차 모드에 의해서 표현되는 변위 $\mathbf{u}_s$는 식(2-30), 식(2-34) 그리고 식(2-37)에 나타난 것과 같이, MA 방법과 MT 방법이 동일하다. 그러나 고차 모드에 대한 보정 변위 $\mathbf{u}_t$는 $\mathbf{u}_{t_{ma}}$와 $\mathbf{u}_{t_{mt}}$로 MA 방법과 MT 방법이 서로 다른 것을 알 수 있다. MA 방법은 고차 모드에 대한 보정 변위 $\mathbf{u}_t$를 식(2-35)와 같이 정적인 방법으로 추정하고 있다. 또한 식(2-36)에 보인 것과 같이 고차 모드에 대한 보정은 진폭에 대해 이루어 지고, 위상은 입력하중의 위상을 그대로 반영하는 것을 알 수 있다.

이에 반해 MT 방법은 식(2-39)에서와 같이 질량의 영향을 고려한 동적인 방법으로 누락되는 고차 모드를 보정하고 있다. MT 방법에서 속도와 가속도를 0 으로 놓으면, 보정값이 MA 방법과 같아짐을 알 수 있다. 이것은 MT 벡터 $\mathbf{P}$ 가 2.3 절의 유도에서 볼 수 있는 것 처럼, MA 방법에서도 나타나는 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}_t$ 항에 상수가 곱해진 형태이기 때문이다. 따라서 MA 방법은 MT 방법의 근사형태라고 볼 수 있다.

제 3 장 비비례 감쇠시스템에 대한 모드 중첩법

3.1 비비례 감쇠시스템[9],12]

행렬식으로 표현된 운동방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \tag{3-1}$$

여기서 M 은 구조물의 질량행렬(mass matrix)이며 C 는 감쇠행렬(damping matrix), 그리고 K 는 강성행렬(stiffness matrix)이다. 벡터 u 는 구조물의 변위를 나타내고 벡터 $\mathbf{f}(t)$ 는 구조물에 가해지는 하중을 나타낸다. 위 식에서 감쇠행렬 C 는 식(3-2)와 같은 비례감쇠(Rayleigh Damping)로 정의된다.

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{a}_0\mathbf{M} + \boldsymbol{a}_1\mathbf{K} \tag{3-2}$$

여기서 $\boldsymbol{a}_0$ 와 $\boldsymbol{a}_1$ 은 상수이며, M 과 K 는 각각 질량과 강성행렬이다. 상수 $\boldsymbol{a}_0$ 와 $\boldsymbol{a}_1$ 은 각 모드에 대한 감쇠값으로부터 정할 수 있다. 또 식(3-2)의 행렬 M 과 K 를 모드의 직교성을 나타내는 식(3-3)과 (3-4)를 이용하여 정리하면 식(3-5)와 같다.

$$f_i^T\mathbf{M}f_j = d_{ij} \qquad \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = 1, 2, 3, \cdots, \boldsymbol{n} \tag{3-3}$$

$$f_i^T\mathbf{K}f_j = w_i^2 d_{ij} \qquad \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = 1, 2, 3, \cdots, \boldsymbol{n} \tag{3-4}$$

$$f_i^T\mathbf{C}f_j = (a_0 + w_i^2 a_1)d_{ij} \qquad \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = 1, 2, 3, \cdots, \boldsymbol{n} \tag{3-5}$$

감쇠행렬 C 가 비례감쇠로 구성되어 있으면, 식(3-5)와 같이 고유 모드에 대한 직교성을 만족한다. 이러한 고유 모드의 직교성이 성립해야만 운동방정식을 n 개의 독립(uncoupled)된 방정식으로 변환하여 모드 중첩법을 적용할 수 있다. 그러나 식(3-2)와 같이 구성되지 않고 집중감쇠기 등의 영향으로 인해 비대각요소(non-diagonal element)가 감쇠행렬 C 에 존재하면 고유 모드에 대한 직교성이 성립하지 않는다. 고유 모드에 대한 직교성이 성립하지 않으면 n 개의 독립된 방정식으로 변환할 수 없으므로 모드

중첩법을 적용할 수 없다. 이러한 감쇠행렬 C 를 비비례 감쇠라 하고 비비례 감쇠가 설치된 시스템을 비비례 감쇠시스템이라고 한다. 비비례 감쇠시스템의 해석에 모드 중첩법을 적용하는 경우 비비례 감쇠를 비례 감쇠로 근사하여 사용하는 것이 일반적인 방법이다. 그러나 이러한 방법은 필연적으로 오차를 포함하게 되어 신뢰할 수 없는 결과를 준다. 그러므로 실제 구조물의 동적해석을 정확하고 효율적으로 수행하기 위해서는 비비례 감쇠시스템에 적용 가능하며 정확한 결과를 주는 해석방법이 필요하다.

3.2 기존 모드 중첩법 [11],[12],[14]

비 대각요소(non-diagonal element)를 갖는 비비례 감쇠시스템은 모드의 직교성이 성립하지 않으므로 모드 중첩법을 적용할 수 없다. 따라서 차수 n 을 갖는 기존의 운동방정식을, 식(3-6)과 같은 차수 2n 의 상태공간 방정식으로 변환하여 모드 중첩법을 적용한다. 2 장의 식(2-1)과 같은 운동방정식은 (3-6)과 같은 상태공간 방정식으로 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}_0 r(t) \tag{3-6}$$

여기서 행렬 B 와 A 는 행렬 M, C, K로 이루어 지는 행렬이며, $\mathbf{y}(t)$ 는 변위와 속도로 이루어진 벡터이고 $\mathbf{F}_0$ 는 입력 하중벡터와 zero 벡터로 이루어져 있으며 $r(t)$ 는 입력 하중의 하중함수이다. 각각은 식(3-7)과 같다.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3-7}$$

식(3-7)에서 행렬 B 와 A 는 차수 2n×2n 의 크기를 갖는 행렬이며, 여기서 0 벡터는 모든 요소가 zero 로 구성된 차수 n×1 의 크기를 갖는 벡터이다. 또한 $\mathbf{R}_0$ 는 비례 감쇠시스템에서 정의되었던 차수 n×1 의 하중벡터이다. 따라서 $\mathbf{y}(t)$ 와 $\mathbf{F}_0$ 는 차수 2n×1 의 크기를 갖는 벡터이다. 식(3-6)과 같은 상태공간 방정식을 모드 중첩법으로 해석하기 위

해서는 고유치 문제에 대한 고유 모드와 고유치를 먼저 구해야 한다. 식(3-6)과 같은 상태공간 방정식에 대한 고유치 문제는 다음과 같다.

$$\mathbf{A}y_i = s_i \mathbf{B} y_i \tag{3-8}$$

Y_i는 구조물의 고유모드 벡터이며 s_i는 구조물의 고유치로, 식(3-9)와 같이 공액복소짝(complex conjugate pair)의 형태로 정의 된다.

$$s_i = -x_i w_i \pm i w_{Di} \qquad y_i = \begin{Bmatrix} \hat{f}_i \\ s_i \hat{f}_i \end{Bmatrix} \tag{3-9}$$

여기서 $w_i = |s_i|$, $x_i = -\mathbf{real}(s_i)/|s_i|$, $w_{Di} = w_i\sqrt{(1-x_i^2)}$ 로 정의 되며, y_i는 차수 2n×1 의 벡터로써 차수 n×1 의 $\hat{f}_i$벡터와 크기 차수 n×1 의 $s_i\hat{f}_i$벡터로 구성된다. 상태공간 방정식의 차수가 2n 이므로 2n 개의 복소 고유모드 벡터와 복소 고유치가 존재하며 이들은 n 개의 공액 복소짝을 형성한다. 복소수 형태의 고유모드 벡터의 크기는 **B** 행렬에 대해 정규화(normalization)조건 (3-10)을 만족하도록 정한다.

$$y_i^T \mathbf{B} y_i = \mathbf{1} \qquad i = 1,2,3,\cdots,2n \tag{3-10}$$

y_i는 상태공간 방정식에 대한 복소 고유벡터이므로 행렬 **A** 와 행렬 **B** 에 대해서 직교한다. $\mathbf{y}(t)$를 식(3-11)과 같이 정의하고

$$\mathbf{y}(t) = \Upsilon \mathbf{z}(t) \tag{3-11}$$

y_i 의 직교성을 이용하면 식(3-6)의 상태공간 방정식을 식(3-12)와 같은 독립된 (uncoupled) 2n 개의 방정식으로 변환할 수 있다.

$$\dot{z}_i - s_i z_i = \Upsilon_i^T \mathbf{F}_0 r(t) \tag{3-12}$$

식(3-12)의 변환된 모드 좌표에서의 응답 z_i 역시 복소수의 형태로 구해진다. 모드 좌표에서의 응답 z_i는 식(3-11)을 이용하여 다시 실제 공간으로 변환할 수 있으며 식(3-13)은 이러한 과정을 나타낸다.

$$\mathbf{y}(t) = \Upsilon\,\mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^{2q} y_i \mathbf{z}_i(t) \qquad (q << n) \qquad (3\text{-}13)$$

$\mathbf{y}(t)$ 의 상부 n 행은 식(3-9)에 정의된 것처럼 실제 공간상에서의 변위를 나타내기 때문에 복소수값을 가질 수 없다. 따라서 식(3-13)에서 2q 의 형태로 항상 공액 복소짝을 함께 사용하여 변위를 계산하면 복소수 부분이 공액 복소짝 끼리 상쇄된다 . 이러한 성질을 이용하여 식(3-13)을 다음과 같이 바꾸어, 비비례 감쇠시스템에 대한 변위 $\mathbf{y}(t)$ 를 계산 할 수 있다.

$$\mathbf{y}(t) = 2 \times real\left(\sum_{i=1}^{q} y_i \mathbf{z}_i(t)\right) \qquad (q << n) \qquad (3\text{-}14)$$

3.3 모드 가속도법 (Modal Acceleration Method)

비비례 감쇠시스템에서 MA 방법을 적용하는 것은, 비례 감쇠시스템에서 적용되는 MA 방법을 복소 영역으로 확장하는 것을 의미한다. 따라서 차수 n 의 운동방정식을 차수 2n 의 상태공간 방정식으로 변환하여 MA 방법을 적용한다. 비비례 감쇠시스템에 MA 방법을 적용하기 위하여 식(3-6)의 상태공간 방정식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}(t) \qquad (3\text{-}15)$$

식(3-12)의 상태공간 방정식의 의한 해를 식(3-15)의 우변에 대입하여, 비비례 감쇠시스템에 대한 MA 방법의 변위를 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{y}(t) = 2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \times real\left(\sum_{i=1}^{q} y_i \dot{\mathbf{z}}_i\right) - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}(t) \qquad (q << n) \qquad (3\text{-}16)$$

식(3-16)에 유도된 비비례 감쇠시스템에 대한 MA 방법 역시 비례 감쇠시스템과 같은 고차 모드에 대한 정적인 보정을 하게 된다.

MA 방법에 의한 변위를 MT 방법에 의한 변위와 구별하기 위해 $\mathbf{y}_{ma}(t)$ 로 놓으면, 식(3-17)과 같이 두 부분으로 나누어 쓸 수 있다.

$$\mathbf{y}_{ma} = \mathbf{y}_s + \mathbf{y}_{t_{ma}} \tag{3-17}$$

위에서 $\mathbf{y}_s$ 는 해석에 포함된 공액 복소짝 형태의 저차 모드에 의한 변위이고, $\mathbf{y}_{t_{ma}}$ 는 MA 방법에 의한 누락되는 고차모드의 보정 변위이다. 공액 복소짝 형태의 저차 모드를 이용한 해석에 의해 식(3-18)을 만족하는 변위 $\mathbf{y}_s(t)$ 를 구할 수 있다.

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}}_s(t) - \mathbf{A}\mathbf{y}_s(t) = \hat{\mathbf{R}}_s r(t) \tag{3-18}$$

식(3-18)에서 $\hat{\mathbf{R}}_s$ 는 2.2 절의 비례 감쇠시스템의 $\mathbf{R}_s$ 와 같은 모드 하중벡터로 비비례 감쇠시스템에 대해서는 다음과 같이 유도한다. 먼저 입력하중의 하중 벡터에 의한 정적 변위 $\mathbf{y}$ 는 식(3-19)와 같다.

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{F}_0 \tag{3-19}$$

식(3-19)를 $\mathbf{y} = \Upsilon\mathbf{z}$ 임을 이용하여 모드 좌표계로 변환하면 식(3-20)과 같다.

$$y_i^T \mathbf{A} y_i z_i = y_i^T \mathbf{F}_0 \tag{3-20}$$

식(3-20)을 정리하면 다음과 같다.

$$s_i z_i = y_i^T \mathbf{F}_0 \tag{3-21}$$

따라서 각각의 모드에 의해 표현되는 물리적 변위량 $\hat{\mathbf{R}}_s$ 는 식(3-22)와 식(3-23)으로 나타낼 수 있다.

$$\hat{\mathbf{R}}_s = \mathbf{A} y_i z_i = \mathbf{B} y_i s_i z_i \tag{3-22}$$

$$\hat{\mathbf{R}}_s = \mathbf{B} y_i y_i^T \mathbf{F}_0 \tag{3-23}$$

그러나 식(3-23)에 유도된 $\hat{\mathbf{R}}_s$ 는 복소 고유벡터로부터 유도되었으므로 복소수 형태의 벡터이다. 그러나 변위는 복소수를 갖을 수 없는 물리량이므로, 비례 감쇠시스템에서의 $\mathbf{R}_s$ 와 같은 물리적 변위량을 갖도록 복소 고유벡터의 복소 공액짝을 이용하여 $\hat{\mathbf{R}}_s$ 가 실수 값의 의미 있는 변위를 갖도록 유도한다. 이것을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{R}}_s = \mathbf{B}[\,y_i\ \overline{y_i}\,][\,y_i\ \overline{y_i}\,]^T \mathbf{F}_0 \tag{3-24}$$

위식에서 $\overline{y_i}$는 y_i의 공액 복소짝으로 식(3-24)에 의해 유도된 $\hat{\mathbf{R}}_s$는 실수 값을 갖는다. 따라서 식(3-18)을 해석함으로써 해석에 포함되는 저차 모드에 의한 변위 $\mathbf{y}_s(t)$를 구 할 수 있다. 그리고 누락 하중벡터 $\hat{\mathbf{R}}_t$는 식(3-25)와 같이 정의할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{R}}_t = \mathbf{F}_0 - \hat{\mathbf{R}}_s \tag{3-25}$$

비비례 감쇠시스템에서의 MA 방법에 의한 고차 모드의 보정량 $\mathbf{y}_{t_{ma}}(t)$는 식(3-25)와 식(3-16), 식(3-17) 그리고 식(3-18)에 의해 다음과 같이 정적인 방법으로 고려된다.

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_{t_{ma}} = -\hat{\mathbf{R}}_t \mathbf{r}(t) \tag{3-26}$$

위와 같이 MA 방법에 의한 누락되는 고차모드의 정적인 보정은 비비례 감쇠시스템에 대해서도 유지된다.

3.4 모드 절삭 보강법 (Modal Truncation Augmentation Method)

MT 방법을 비비례 감쇠시스템에 적용하기 위해서는 비비례 감쇠시스템에 대한 MT 벡터 **P** 를 먼저 유도하여야 한다. 비례 감쇠시스템의 MT 벡터는 크기 n×1 의 벡터이지만, 비비례 감쇠시스템에 대한 MT 벡터는 크기 2n×1 의 벡터가 될 것이다. MT 벡터 **P** 는 식(3-27)과 식(3-28)로부터 유도할 수 있다.

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{R}}_t \tag{3-27}$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{a}\overline{\mathbf{P}} \tag{3-28}$$

여기서 $a = (\overline{\mathbf{P}}^T \mathbf{B} \overline{\mathbf{P}})^{1/2}$ 이다. **P** 는 비례 시스템과는 달리 크기 2n×1 의 벡터이다.

MT 에 방법에 의한 변위를 $\mathbf{y}_{mt}$ 라고 하면, $\mathbf{y}_{mt}$ 역시 다음과 같이 두 부분으로 나눌 수 있다.

$$\mathbf{y}_{mt} = \mathbf{y}_s + \mathbf{y}_{t_{mt}} \tag{3-29}$$

여기서 $\mathbf{y}_s$ 는 저차 모드에 의해 표현되는 변위량으로 3.3 절의 MA 방법에 의한 $\mathbf{y}_s$ 와 같다. 3.2 절의 식(3-6)의 상태공간 방정식에 의한 해 $\mathbf{y}(t)$ 는 $\mathbf{y}_s$ 와 $\mathbf{y}_t$ 로 이루어 짐으로 $\mathbf{y}(t)$ 에서 $\mathbf{y}_s$ 의 성분을 뺀 $\mathbf{y}_t$ 는 (3-30)과 같다.

$$\mathbf{B}\,\dot{\mathbf{y}}_t(t) - \mathbf{A}\,\mathbf{y}_t(t) = \hat{\mathbf{R}}_t r(t) \tag{3-30}$$

$\mathbf{y}_{t_{mt}}$ 는 누락되는 고차모드를 보정한 변위량이다. 고차 모드에 대한 보정량 $\mathbf{y}_{t_{mt}}$ 는 식(3-28)의 MT 벡터를 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{y}_{t_{mt}} = \mathbf{P} z_P(t) \tag{3-31}$$

따라서 식(3-31)을 이용하여 식(3-30)을 변환하면 다음과 같다.

$$\mathbf{P}^T\mathbf{B}\,\mathbf{P}\dot{z}_P(t) - \mathbf{P}^T\mathbf{A}\,\mathbf{P}\,z_P(t) = \mathbf{P}^T\hat{\mathbf{R}}_t r(t) \tag{3-32}$$

MT 벡터 $\mathbf{P}$ 는 행렬 $\mathbf{A}$ 와 행렬 $\mathbf{B}$ 에 직교(orthogonal)하므로 식(3-33)를 만족한다.

$$\mathbf{P}^T\mathbf{B}\,\mathbf{P} = \mathbf{I} \qquad\qquad \mathbf{P}^T\mathbf{A}\,\mathbf{P} = s_P \tag{3-33}$$

따라서 식(3-33)를 이용하여 식(3-32)를 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{z}_P(t) - s_P z_P(t) = \mathbf{P}^T\hat{\mathbf{R}}_t r(t) \tag{3-34}$$

식(3-34)에 의해 $z_P(t)$ 를 구하고 식(3-31)을 이용하여 역변환을 하면, 비비례 감쇠시스템에 대한 MT 방법에 의한 누락되는 고차 모드의 보정변위 $\mathbf{y}_{t_{mt}}$ 를 구할 수 있다.

식(3-34)의 미분방정식을 풀기 위하여 식(3-35)와 같은 일반적인 일차 미분 방정식을 생각해 보자.

$$y' + f(t)\,y = r(t) \tag{3-35}$$

식(3-35)와 같은 일반적인 일차 미분방정식의 해는 식(3-36)과 같다.

$$y = e^{-h}\left[\int e^h r\,dt + c\right] \tag{3-36}$$

위식에서 $h = \int f(t)\, dt$ 으로 주어진다. 실제 구조물을 정식화한 미분방정식에서는 식(3-35)의 $f(t)$가 상수로 주어진다. 또한 외부하중 $r(t)$는 삼각함수로 가정할 수 있는데, 복잡한 하중함수도 삼각함수의 조합으로 나타낼 수 있으므로 이러한 가정은 타당하다. 따라서 식(3-35)를 좀더 일반적으로 쓰면 다음과 같은 두 가지의 경우가 있다.

$$y' + ay = b\sin(\omega t) \tag{3-37}$$

$$y' + ay = b\cos(\omega t) \tag{3-38}$$

여기서 α는 입력하중의 주파수이다. 식(3-37)와 식(3-38)의 초기조건 $y(0) = 0$ 에 대한 각각의 Closed Form의 해는 다음과 같다.

$$y(t) = \frac{b}{a^2 + w^2}\left(a\sin(wt) - w\cos(wt) + we^{-at}\right) \tag{3-39}$$

$$y(t) = \frac{b}{a^2 + w^2}\left(w\sin(wt) + a\cos(wt) + ae^{-at}\right) \tag{3-40}$$

식(3-39)과 식(3-40)의 해가 물리적으로 안정하기 위해서는 각 식의 마지막 항의 a가 항상 0보다 작아야 한다. 즉 식(3-41)의 조건에 한해서 해를 갖는다.

$$\lim_{t \to \infty} e^{-at} = 0 \qquad \text{단, } a > 0 \text{ 일 때} \tag{3-41}$$

식(3-37)과 식(3-38)을 식(3-34)와 비교하면 $-s_p = a$ 이고 $\mathbf{P}^T \hat{\mathbf{R}}_t = b$로 놓을 수 있으며 $r(t) = \sin(wt)$, 또는 $r(t) = \cos(wt)$로 놓을 수 있다. 따라서 식(3-36)의 안정된 해가 존재하기 위해서는 다음의 조건을 만족하여야 한다.

$$s_p < 0 \tag{3-42}$$

s_p는 식(3-33)에 의해 정의되므로 식(3-42)의 조건을 다시 쓰면, 아래와 같다.

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A}\,\mathbf{P} < 0 \tag{3-43}$$

식(3-27)에서 식(3-28)을 통해 생성된 MT 벡터 $\mathbf{P}$ 가 위의 식(3-43)의 조건을 만족시키지 못하면, MT 방법에 의한 고차 모드의 보정 변위 $\mathbf{y}_{t_{mt}}$ 는 존재하지 않는다. 즉 비비례 감쇠시스템에 MT 방법을 적용하는 데에는 제한이 있다.

다음으로 식(3-43)의 조건을 만족시키는 MT 벡터 $\mathbf{P}$ 에 의한 응답의 특성을 알아 보자. 이것은 식(3-39)과 식(3-40)에 대한 분석으로부터 시작할 수 있다. 식(3-39)와 식(3-40)에서 $a = -s_p = -\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$ 와 $b = \mathbf{P}^T\hat{\mathbf{R}}_t$ 로 정의되며 w 는 입력하중의 주파수이다. 실질적인 구조물에서 행렬 $\mathbf{A}$ 는 질량과 강성행렬으로 이루어 지는 차수 2N 의 행렬이고 실제 구조물의 물성치를 요소로 갖는다. 또한 w 는 실제 구조물에 가해지는 하중의 입력 가진 주파수(rad/sec)로 그 값이 수십에서 수백 rad/sec 로 제한 되어 있다. 따라서 상수 a 가 입력하중 주파수 w 에 비해 그 절대값이 훨씬 크다.

$$|a| >> w \tag{3-44}$$

따라서 식(3-39)와 식(3-40)은 다음과 같이 정리된다.

$$y(t) = \frac{b}{a^2 + w^2}\left(a\,sin(w\,t) - \cancelto{0}{w\,cos(w\,t)} + \cancelto{0}{w\,e^{-at}}\right) \tag{3-45}$$

$$y(t) = \frac{b}{a^2 + w^2}\left(\cancelto{0}{w\,sin(w\,t)} + a\,cos(w\,t) + \cancelto{0}{a\,e^{-at}}\right) \tag{3-46}$$

위의 식을 다시 쓰면 *sine* 입력하중에 대해서는 식(3-47)로 정리되고

$$y(t) = \frac{ba}{a^2 + w^2} sin(w\,t) \tag{3-47}$$

cosien 입력하중에 대해서는 식(3-48)로 정리된다.

$$y(t) = \frac{ba}{a^2 + w^2} cos(w\,t) \tag{3-48}$$

위의 식을 이용하면 식(3-34)의 $sine$ 과 $cosien$ 입력 하중에 대한 $z_P(t)$ 의 해는 각각 다음과 같이 주어 진다.

$$z_P(t) = \frac{-s_P \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{R}}_t}{s_P^2 + w^2} sin(w\,t) \tag{3-49}$$

$$z_P(t) = \frac{-s_P \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{R}}_t}{s_P^2 + w^2} cos(w\,t) \tag{3-50}$$

$\mathbf{y}_{t_{mt}} = \mathbf{P} z_P(t)$ 의 관계를 이용하여 역변환을 하면, $sine$ 입력하중의 고차 모드에 대한 보정 변위 $\mathbf{y}_{t_{mt}}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{y}_{t_{mt}} = \mathbf{P} z_P(t) = \mathbf{P} \frac{-s_P \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{R}}_t}{s_P^2 + w^2} sin(w\,t) \tag{3-51}$$

MT 벡터 $\mathbf{P}$ 는 식(3-27)과 식(3-28)로부터 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\mathbf{P} = \frac{1}{a} \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_t \tag{3-52}$$

따라서 식(3-51)은 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\mathbf{y}_{t_{mt}} = -\frac{s_P \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{R}}_t}{a(s_P^2 + w^2)} \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_t \, sin(w\,t) \tag{3-53}$$

여기서 식(3-26)의 MA 방법에 의한 고차 모드의 보정량 $\mathbf{y}_{t_{ma}}(t)$ 를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{y}_{t_{ma}} = -\mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_t \mathbf{r}(t) \tag{3-54}$$

식(3-53)은 식(3-54)의 MA 방법에 의한 결과와 유사하며, 식(3-53)의 계수 항이 다음의 조건을 만족할 경우 MA 방법의 결과와 일치 한다.

$$\frac{s_P \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{R}}_t}{a(s_P^2 + w^2)} \approx 1 \tag{3-55}$$

일반적인 경우에 시스템이 식(3-55)를 만족함을 증명하면 다음과 같다. 식(3-55)의 분자와 분모를 s_p 로 나누어 주면 식(3-44)에 의해서 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{s_P\,\mathbf{P}^T\hat{\mathbf{R}}_t}{a\,(s_P^2+w^2)} \approx \frac{\mathbf{P}^T\hat{\mathbf{R}}_t}{a\;s_p} \tag{3-56}$$

여기서 $\hat{\mathbf{R}}_t = a\,\mathbf{AP}$ 이고, $s_p = \mathbf{P}^T\mathbf{AP}$ 이므로 식(3-56)은 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{s_P\,\mathbf{P}^T\hat{\mathbf{R}}_t}{a\,(s_P^2+w^2)} \approx \frac{\mathbf{P}^T\hat{\mathbf{R}}_t}{a\;s_p} = \frac{a\;\mathbf{P}^T\mathbf{AP}}{a\;\mathbf{P}^T\mathbf{AP}} = 1 \tag{3-57}$$

따라서 식(3-43)을 만족하는 MT 방법의 결과는 식(3-57)에 의해 식(3-58)로 정리되며 이것은 식(3-54)에 표기한 MA 방법의 결과와 같음을 알 수 있다.

$$\mathbf{y}_{t_{mt}} = -\frac{s_P\,\mathbf{P}^T\hat{\mathbf{R}}_t}{a\,(s_P^2+w^2)}\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{R}}_t\;sin(w\,t) \approx -\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{R}}_t\;sin(w\,t) \tag{3-58}$$

같은 방법으로 $cosien$ 입력하중의 고차 모드에 대한 보정 변위 $\mathbf{y}_{t_{mt}}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{y}_{t_{mt}} = -\frac{s_P\,\mathbf{P}^T\hat{\mathbf{R}}_t}{s_P^2+w^2}\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{R}}_t\;cos(w\,t) \tag{3-59}$$

식(3-59)는 식(3-26)의 MA 방법에 의한 식과 유사하며, $\frac{s_P\,\mathbf{P}^T\hat{\mathbf{R}}_t}{s_P^2+w^2} \approx 1$ 로써 MA 방법에 일치함을 알 수 있다.

위의 결과들을 정리하면, 비비례 감쇠시스템에 대한 MT 방법의 적용은 s_P 의 조건에 따라 제한적으로 적용가능하며, 적용된 MT 방법은 MA 방법과 같은 결과를 주는 것을 증명하였다. 위식의 유도는 $sine$ 입력하중과 $cosine$ 입력하중에 대해 증명하였으나 다양한 입력하중은 $sine$ 함수와 $cosine$ 함수의 조합으로 나타낼 수 있으므로 일반적인 증명이다.

확장된 MA 방법과 MT 방법은 비비례 감쇠시스템의 동적해석에 효율적인 방법이다. 확장된 MA 방법과 MT 방법의 정확도는 대부분의 경우에 있어서 동일하다. 그러나 수렴의 안정성을 고려한다면 확장된 MA 방법에 확장된 MT 방법보다 우수한 방법이라고 할 수 있다. 4 장의 수치예제에서는 MA 방법과 MT 방법의 수렴성을 일반적인 모드

중첩법과 비교하였다. 또한 비비례 감쇠시스템에서 s_p 의 조건에 따라 MT 방법에 의한 결과가 발산하는 경우와 수렴하는 경우를 나타내었고, 수렴하는 경우에는 MA 방법과 일치함을 보였다.

제 4 장 수치예제

비비례 감쇠시스템으로 확장된 MA 방법과 MT 방법의 적용성을 검증하기 위하여 3 개의 수치예제를 수행하였다. 첫 번째 수치예제와 두 번째 수치예제는 일반적인 모드 중첩법과 누락 되는 고차 모드의 영향을 보정한 방법인 MA 방법과 MT 방법의 효율성을 비교하기 위하여 수행하였다. 첫 번째 수치예제는 입력하중이 지진하중 일 때의 각 방법의 결과를 비교하였으며, 두 번째 수치예제에서는 입력하중이 Step Loading 인 경우에 각 방법을 비교하였다. 각 방법에 대한 결과 비교는, 각 절점에서의 최대 전단력과 최대 휨 모멘트를 비교하였다. 또한 결과의 표시는 직접 적분법으로 전체 시스템을 해석한 결과로써 각 절점에서의 최대 전단력과 최대 휨 모멘트를 정규화하여 나타내었다. 직접 적분법에 의한 해석은 소수의 저차 모드만을 사용하는 모드 중첩법에 비해서 해석시간이 올래 걸리는 등의 비효율성이 있으나, 전체시스템을 해석하기 때문에 수치적으로 정확한 값을 산출한다. 따라서 각 방법에 의한 응답을 직접 적분법의 결과로 다음과 같이 정규화하여 나타내면 각 방법의 수렴성을 보다 용이하게 표시할 수 있다.

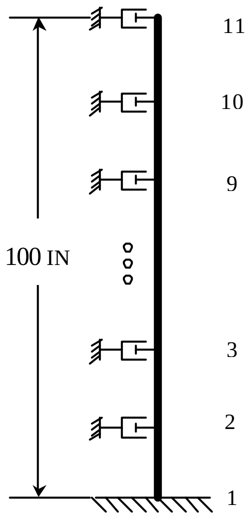
$$Y\text{축} : \frac{MOMENT\ (of\ mode\ superposition)}{MOMENT\ (of\ direct\ integration)} \quad \text{or} \quad \frac{SHEAR\ (of\ mode\ superposition)}{SHEAR\ (of\ direct\ integration)}$$

$$X\text{축} : Node\ Number$$

세 번째의 수치 예제는 비비례 감쇠시스템에 대한 MT 방법의 적용성을 검증하기 위한 것으로써, MT 방법의 해가 존재하지 않는 경우와 MT 방법의 해가 존재할 때, 그 결과가 MA 방법과 일치하는 두 가지 경우를 나타내었다.

4.1 집중 감쇠가 설치된 외팔보(지진 하중)

지진 하중이 가해지는 그림 4.1 과 같은 예제 구조물을 기본적인 모드 중첩법과 누락되는 고차 모드의 영향을 보정한 MA 방법과 MT 방법으로 해석하여 그 결과를 비교하였다. 그림 4.1 의 예제 구조물은 10 개의 빔 요소로 구성된 캔틸레버빔으로써, 각각의 절점에 집중감쇠가 설치되어 있는 비비례 감쇠시스템이다. 각각의 절점마다 두개의 자유도(수평변위와 회전변위)를 가지므로, 총 자유도는 20 개이다. 구조물의 물성치는 그림 4.5 에 표시되어 있으며, 표 4.1 은 구조물의 각각의 모드에 대한 고유치를 나타낸다. 예제 구조물이 집중감쇠가 부착되어 있는 비비례 감쇠시스템이므로 구조물의 고유치는 표 4.2 와 같이 복소수의 형태를 가지며, 공액복소짝(complex conjugate pair)을 갖는 것을 알 수 있다. 예제 구조물에 첫 번째로 적용된 하중은 지진 하중으로 El Centro 지진의 N00W 성분을 사용하였다. El Centro 지진(0.348g)은 표준적인 강진으로 지진에너지가 1~4Hz 에 집중되며 그 최대값이 1.5Hz 정도에 위치한다. 따라서 입력하중의 주파수가 상대적으로 낮은 경우에 대한 각각의 방법의 응답 특성을 관찰할 수 있다.



E = 3.0´ 10^7 PSI

L = 100 IN

A = 4 IN^2

C = 0.1 LB·Sec/IN

I = 1.25 IN^4

r = 7.41´ 10^{-4} LB/IN^3

10 BEAM ELEMENTS

그림 4.1 예제 구조물과 물성치

표 4.1 예제 구조물의 고유치

Mode Number	Eigenvalues
1	– 4.43482 – 39.29620i
2	– 4.43482 + 39.29620i
3	– 88.4454 – 231.3995i
4	– 88.4454 + 231.3995i
5	– 677.3535 – 147.892i
6	– 677.3535 + 147.892i

지진하중에 대한 각 방법의 응답비교를 그림 4.6, 그림 4.7, 그림 4.8 그리고 그림 4.9 에 나타내었다. 각각의 그림의 Y 축은 각 방법에 의한 응답을 직접 적분법의 결과로 정규한 시킨 값이며, X 축은 절점 번호를 나타낸다. **md1** 은 MA 방법을 사용하지 않고, 한 개의 저차 모드만을 사용한 단순한 모드 중첩법(mode superposition method : 이하 MD 방법)에 의한 결과를 나타내며, 같은 방법으로 **md2** 는 두 개의 저차 모드가 중첩된 결과를, **md3** 는 세 개의 저차 모드가 중첩된 결과를 나타낸다. 또한 **ma1** 은 한 개의 저차 모드만을 이용하는 MA 방법에 의한 응답 곡선을 나타내며 **ma2** 는 두 개의 저차 모드를, **ma3** 는 세 개의 저차 모드를 이용하는 MA 방법에 의한 응답 곡선이다. 동일하게 **mt1** 은 한 개의 저차 모드만을 이용하는 MT 방법에 의한 응답 곡선을 나타내며 **mt2** 는 두 개의 저차 모드를, **mt3** 는 세 개의 저차 모드를 이용하는 MT 방법에 의한 응답 곡선이다.

그림 4.3 과 그림 4.5 에 나타난 것과 같이, MA 방법의 결과와 MT 방법의 결과가 일치하는 것을 알 수 있다. 이것은 3 장에서 MT 방법이 식(3-43)을 만족하는 경우에 MA 방법의 결과와 일치하는 것을 수치적으로 보여준다. 또한 전체적인 경향으로 중첩되어지는 모드의 수가 많아 질수록 수치적으로 정확한 값인 직접 적분법의 값에 점근함을 알 수 있다.

그림 4.2 와 그림 4.3 은 지진하중에 대한 각각의 방법에 의한 모멘트를 비교한 것

이다. 그림 4.2 의 MD 방법에 비해 그림 4.3 의 MA 방법과 MT 방법이 직접 적분법의 값에 더 잘 수렴하는 것을 알 수 있다. 이것은 MA 방법과 MT 방법에 의한 응답 곡선이 누락되는 고차 모드의 영향을 추가적으로 보정했기 때문이다.

그림 4.4 와 그림 4.5 는 지진하중에 대한 각각의 방법에 의한 전단력을 비교한 것이다. 그림 4.4 의 MD 방법에 비해 누락되는 고차 모드의 영향을 보정한 그림 4.5 의 MA 방법과 MT 방법이 직접 적분법의 값에 더 잘 수렴하는 것을 알 수 있다. 따라서 비례 감쇠 시스템에 적용되던 MA 방법과 MT 방법이 비비례 감쇠시스템에 확장되어 적용되었으며, 결과 역시 비례 감쇠시스템에서와 마찬가지로 비비례 감쇠시스템에서도 누락되는 고차모드의 영향을 보정한 MA 방법과 MT 방법이 더 효율적으로 수렴하는 것을 알 수 있다. 또한 MT 방법의 결과는 MA 방법의 결과와 일치함을 알 수 있다.

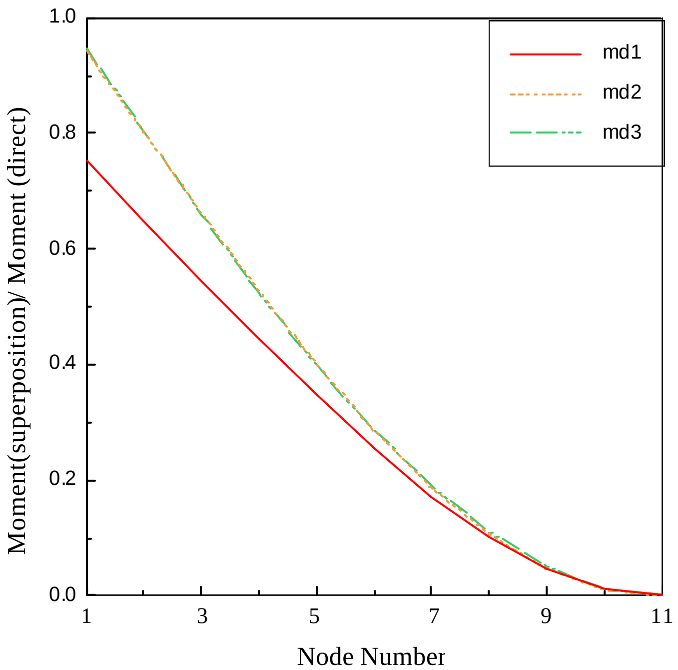


그림 4.2 MD 방법에 의한 각 절점에서의 모멘트

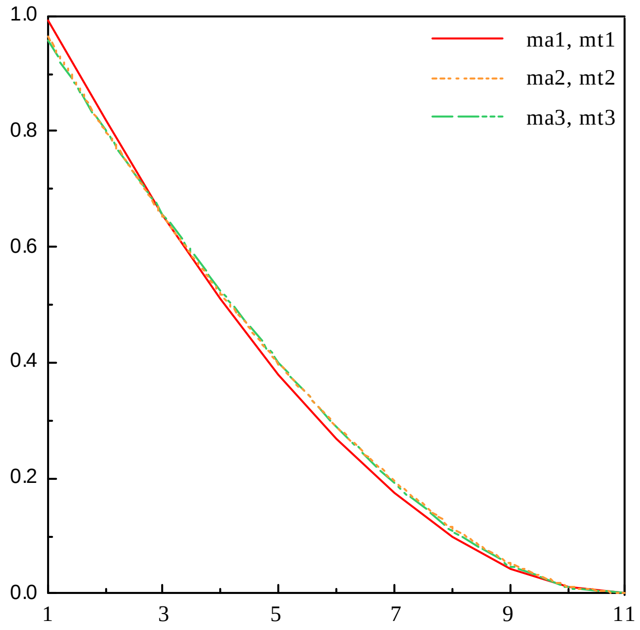


그림 4.3 MA 방법과 MT 방법에 의한 각 절점에서의 모멘트

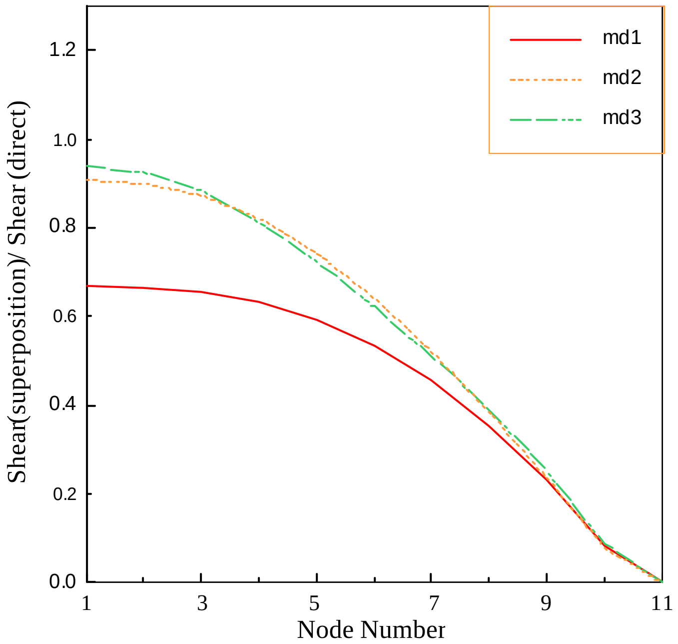


그림 4.4 MD 방법에 의한 각 절점에서의 전단력

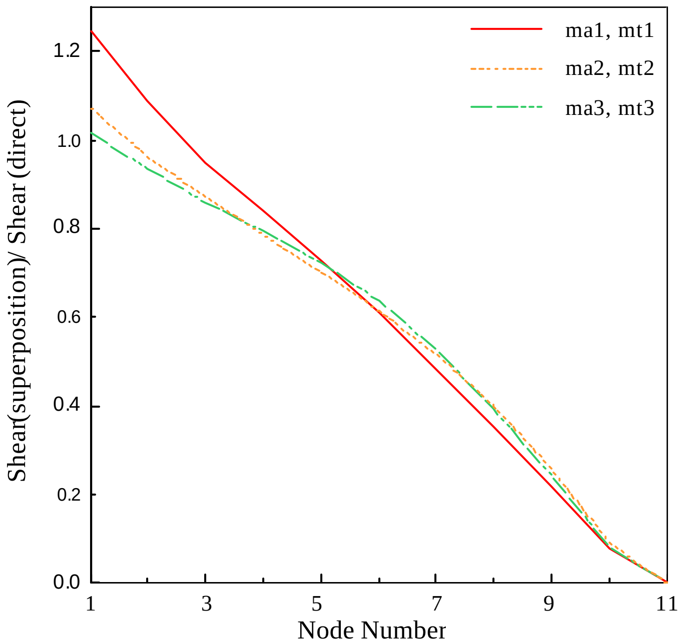


그림 4.5 MA 방법과 MT 방법에 의한 각 절점에서의 전단력

4.2 집중 감쇠가 설치된 외팔보(Step Loading)

그림 4.6 의 예제 구조물은 지진 하중에 적용했던 구조물과 동일한 구조물로써, 10 개의 빔 요소로 구성된 캔틸레버빔이다. 각각이 절점마다 두 개의 자유도를 가지는, 총자유도 20 개의 구조물이다. 구조물의 물성치는 그림 4.5 과 같고, 표 4.1 은 구조물의 각각이 모드에 대한 고유치이다. 예제 구조물에 적용된 하중은 Step Loading 으로 그림 4.10 과 같이 5LB/IN 의 분포하중으로 캔틸레버빔 전체에 작용한다. 이 때의 각 방법에 의한 응답을 비교하였으며, 결과의 표시는 4.1 과 같이 직접적분법에 의한 결과로써 정규화 하여 표시하였다. Step Loading 은 저주파 주파수 영역을 갖는 지진 하중과는 달리, 주파수 영역에서 저주파성분뿐 아니라 고주파 성분도 갖는 하중이다. 따라서 Step Loading 으로써 구조물의 저차 모드뿐 아니라 고차모드까지 가진할 수 있다. 따라서 입력하중의 주파수가 상대적으로 큰 경우에 대한 각각의 방법의 응답 특성을 관찰할 수 있다.

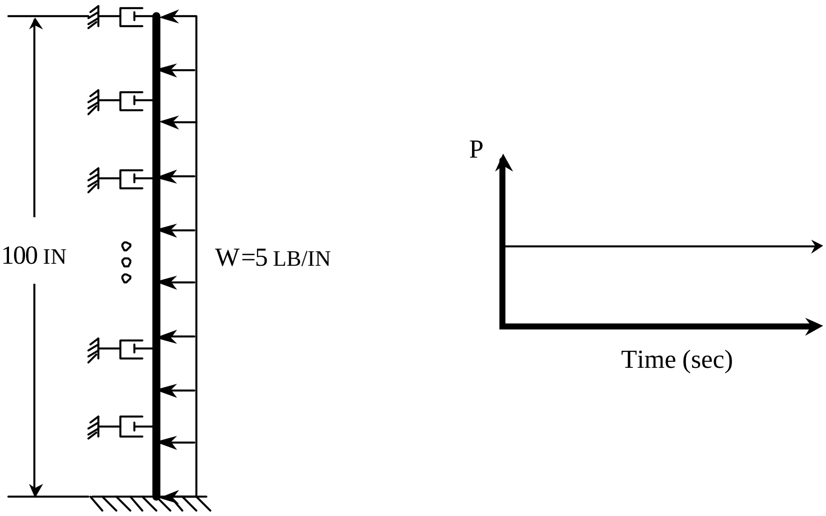


그림 4.6 Step Loading 과 시간이력곡선

Step Loading 에 대한 각 방법의 응답비교를 그림 4.7, 그림 4.8, 그림 4.9 그리고 그림 4.10 에 나타내었다. 각 그림의 Y 축은 각 방법에 의한 응답을 직접 적분법의 결과로 정규화 시킨 값이며, X 축은 절점번호를 나타낸다. **md1** 은 일반적인 모드 중첩법으로써, 한 개의 저차 모드만을 사용한 단순한 모드 중첩법(MD 방법)에 의한 결과를 나타내며, 같은 방법으로 **md2** 는 두 개의 저차 모드가 중첩된 결과를, **md3** 는 세 개의 저차 모드가 중첩된 결과를 나타낸다. 또한 **ma1, mt1** 은 한 개의 저차 모드만을 이용하는 MA 방법과 MT 방법에 의한 응답곡선을 나타내며 **ma2, mt2** 는 두 개의 저차 모드를 , **ma3, mt3** 는 세 개의 저차 모드를 이용하는 MA 방법과 MT 방법에 의한 각각의 응답 곡선이다.

그림 4.8 과 그림 4.10 에 나타난 것과 같이, MA 방법의 결과와 MT 방법의 결과가 일치하는 것을 알 수 있다. 이것은 3 장에서 MT 방법이 식(3-43)을 만족하는 경우에 MA 방법의 결과와 일치하는 것을 수치적으로 보여준다. 또한 전체적인 경향으로 중첩되어지는 모드의 수가 많아 질수록 수치적으로 정확한 값인 직접 적분법의 값에 점근함을 알 수 있다.

그림 4.7 과 그림 4.8 은 Step Loading 에 대한 각각의 방법에 의한 모멘트를 비교한 것이다. Step Loading 에 대한 모멘트응답에서는 MA 방법과 MT 방법의 결과가 MD 방법의 수렴성과 거의 같다. 그러나 그림 4.9 와 그림 4.10 의 전단력에 대한 응답비교에서는 MA 방법과 MT 방법이 MD 방법의 결과의 수렴성보다 좋은 것을 관찰 할 수 있다. 이것은 MA 방법과 MT 방법이 누락되는 고차 모드의 영향을 추가적으로 보정하였기 때문이다. 그러나 4.1 의 지진하중이 작용할 때 보다는 전체적인 수렴성이 좋지 못한다. 이것은 Step Loading 에 의해서 고차 모드까지 가진 되기 때문에, MA 방법과 MT 방법에 의한 고차 모드의 보정량이 충분치 못하기 때문이다. 이 경우에는 포함되는 저차 모드의 수를 늘리고 MA 방법과 MT 방법을 사용한다면 좀더 정확한 해석을 할 수 있다.

이상의 결과를 정리하면 비례 감쇠시스템에 적용되던 MA 방법과 MT 방법이 비비례 감쇠시스템으로 확장되어 적용되었으며 MT 방법이 해석결과가 MA 방법의 해석결

과와 일치 하였다. 또한 비례 감쇠시스템에서와 마찬가지로 비비례 감쇠시스템에서도 누락되는 고차모드의 영향을 보정한 MA 방법과 MT 방법이 전단력에 있어서 효율적으로 수렴하는 것을 알 수 있다. 그러나 Step Loading 과 같이 고차 모드의 영향이 확대되는 경우에는 MA 방법과 MT 방법도 고차 모드의 누락으로 인한 오차가 커짐을 알 수 있다. 그러나 그 오차는 고차 모드의 누락을 전혀 고려치 않은 MD 방법보다는 작다.

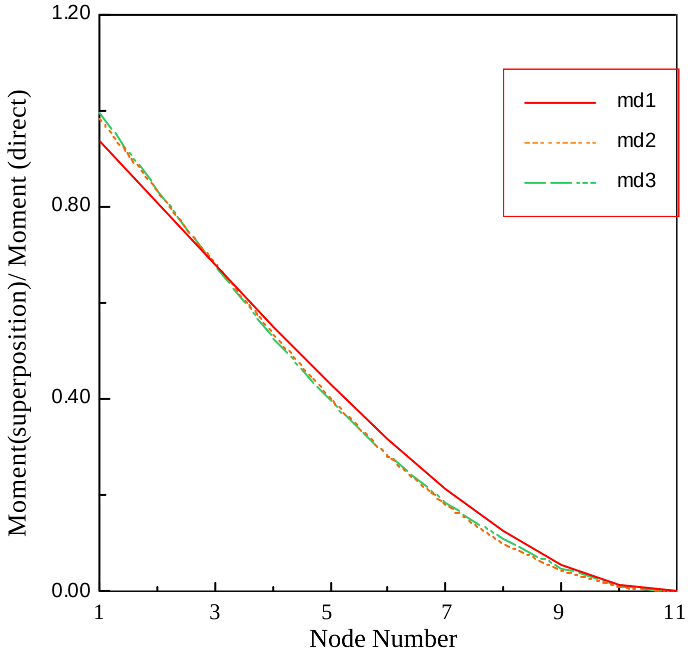


그림 4.7 MD 방법에 의한 각 절점에서의 모멘트

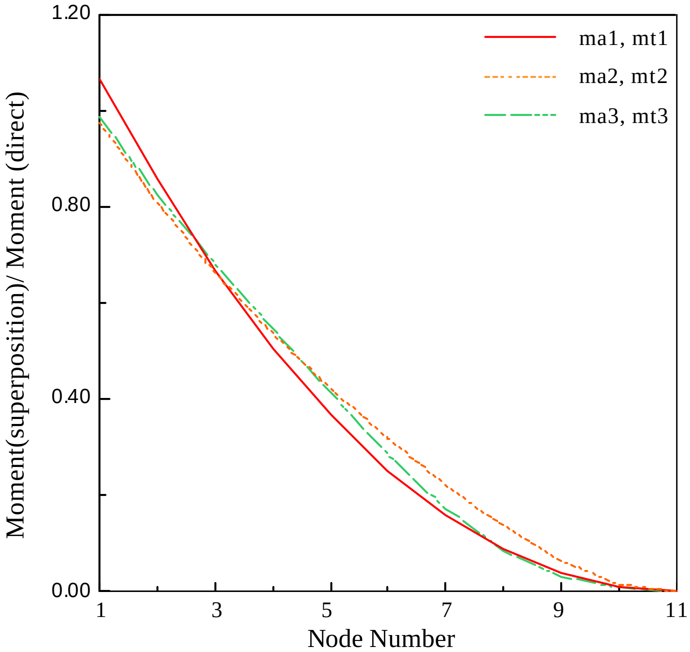


그림 4.8 MA 방법과 MT 방법에 의한 각 절점에서의 모멘트

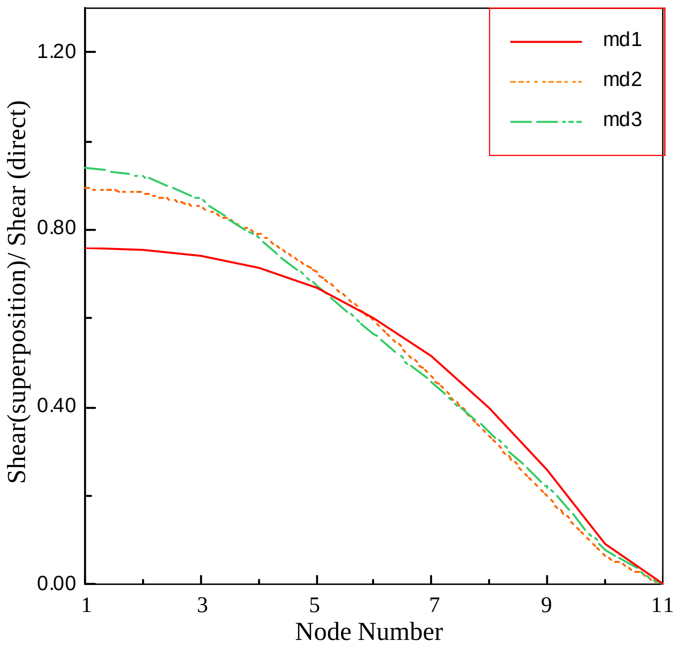


그림 4.9 MD 방법에 의한 각 절점에서의 전단력

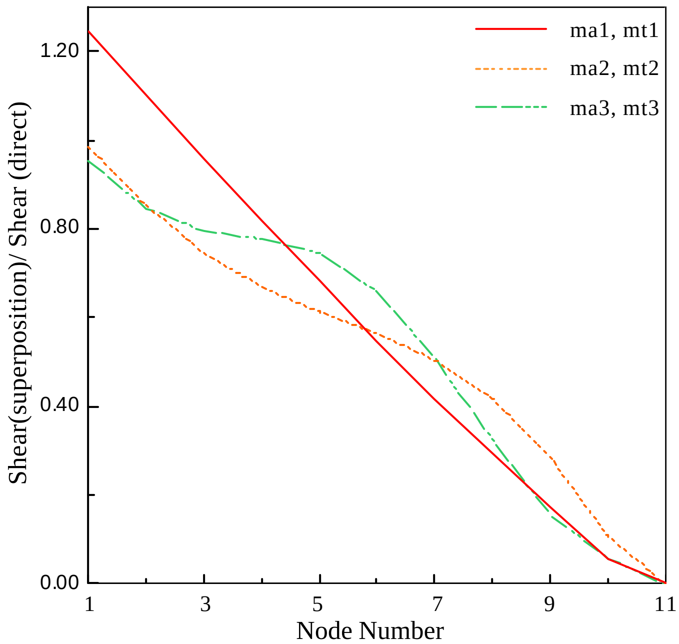
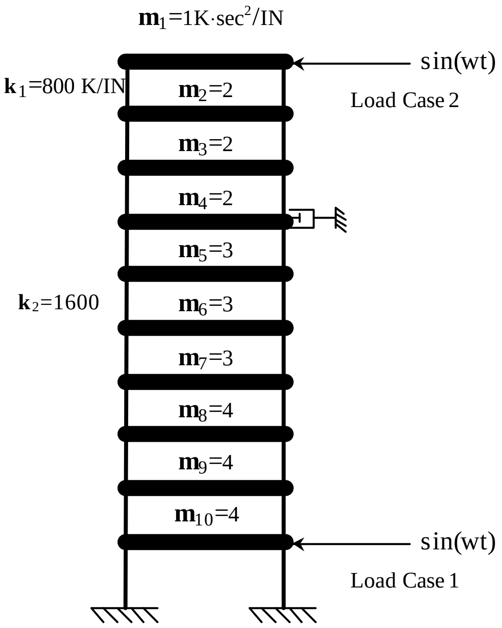


그림 4.10 MA 방법과 MT 방법에 의한 각 절점에서의 전단력

4.3 10 층 Shear Building

비비례 감시시스템에 대한 MT 방법의 적용성을 수치 그림 4.11 과 같은 예제 구조물을 통하여 예시하였다. 그림 4.11 의 예제 구조물은 10 개의 자유도를 갖는 Shear Buiding 으로써 7 층에 집중 감쇠가 부착되어진 비비례 감쇠시스템이다. 물성치는 그림 4.11 과 같으며, 구조물의 고유치는 표 4.2 와 같은 공액 복소짝을 갖는 비비례 감쇠시스템이다. 강성은 10 층과 9 층 사이의 k_1=800K/IN 를 제외하고 모든 층에서 k2=1600K/IN 로 동일하다. 수치 예제의 수행은 Load Case1 과 Load Case2 의 하중 함수에 대하여 각각 수행하였으며, 각각의 하중 벡터는 $\mathbf{R}_{01}$와 $\mathbf{R}_{02}$ 로 모델링 한다. $\mathbf{R}_{01}$는 1 층을 가진 하는 것을 의미하고 $\mathbf{R}_{02}$ 는 10 층을 가진 하는 것을 의미한다.

Load Case1 은 입력하중의 하중 벡터(spatial portion)가 $\mathbf{R}_{01}$ 이고 하중 함수(time varying portion) $r(t)$는 $sin(32.0t)$ 인 경우이다. 입력하중의 하중 벡터가 $\mathbf{R}_{01}$일때,



$$\mathbf{R}_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_{02} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Case1 Case2

그림 4.11 예제 구조물과 입력 하중벡터

표 4.2 예제 구조물의 고유치

Mode Number	Eigenvalues
1	– 0.0316 – 4.0100i
2	– 0.0316 + 4.0100i
3	– 0.0066 – 10.8381i
4	– 0.0066 + 10.8381i
5	– 0.0058 – 17.421i
6	– 0.0058 + 17.421i

생성된 MT 벡터 $\mathbf{P}$를 이용하여 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\,\mathbf{P}$ 를 계산하면 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\,\mathbf{P}$ = -9.4710×10³ 으로써 식(3-43)을 만족시킨다. 따라서 Case1 의 $\mathbf{R}_{01}$에 대한 MT 방법의 해는 MA 방법의 해와 같을 것이다.

그림 4.12 와 그림 4.13 은 Load Case1 에 대한 구조물의 응답 결과를 그림으로 나타낸 것이다. 그림 4.12 는 MT 방법에 의한 응답 곡선이고 그림 4.13 은 MA 방법에 의한 응답 곡선이다. 그림 4.12 와 그림 4.13 에서 보듯이 식(3-43)의 조건, $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\,\mathbf{P} < 0$ 를 만족시키는 경우에 대해서 MA 방법과 MT 방법에 의한 해가 같음을 알 수 있다.

Load Case2 는 입력하중의 하중벡터(spatial portion)가 $\mathbf{R}_{02}$ 이고 하중함수(time varying portion) $r(t)$가 $sin(32.0t)$으로 Load Case1 과 같다. 입력하중의 하중벡터가 $\mathbf{R}_{02}$ 일 때 생성된 MT 벡터를 이용하여 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\,\mathbf{P}$ 를 계산하면 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\,\mathbf{P}$ =6.2443×10³ 으로써 식(3-43)을 만족시키지 못한다. 따라서 Load Case2 의 하중 벡터$\mathbf{R}_{02}$ 에 대한 MT 방법의 해는 발산하므로 적용할 수 없다.(그림 4.14) 그러나 MA 방법은 Load Case2 의 경우에도 적용 가능하며, 그 때의 해는 그림 4.15 와 같다. 따라서 비비례 감쇠시스템에 대한 MT 방법의 적용은 제한적이다.

이상의 결과를 정리하면 확장된 MA 방법과 MT 방법을 비비례 감쇠시스템에 적용함에 있어서, MA 방법은 항상 안정된 결과를 주는 반면에 MT 방법은 하중의 형태에 따라 안정된 결과를 주지 못하는 경우가 존재한다. 또한 MT 방법이 안정된 결과를 주는

경우에 있어서 그 결과는 MA 방법과 일치 한다. 따라서 비비례 감쇠시스템의 실제 해석에 적용함에 있어서 확장된 MT 방법보다는 확장된 MA 방법을 선택하는 것이 해석의 안정성을 확보하고 정확한 결과를 얻을 수 있다.

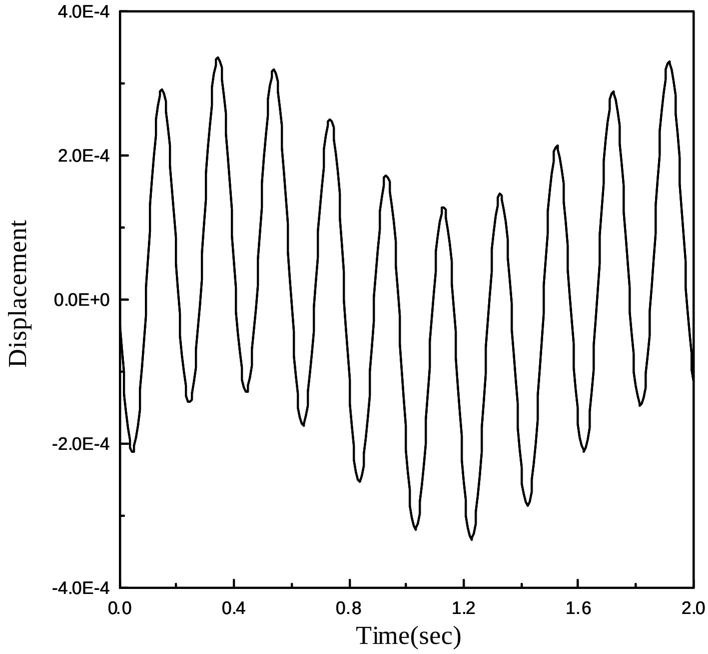


그림 4.12 Load Case1에 대한 MT 방법의 응답 곡선

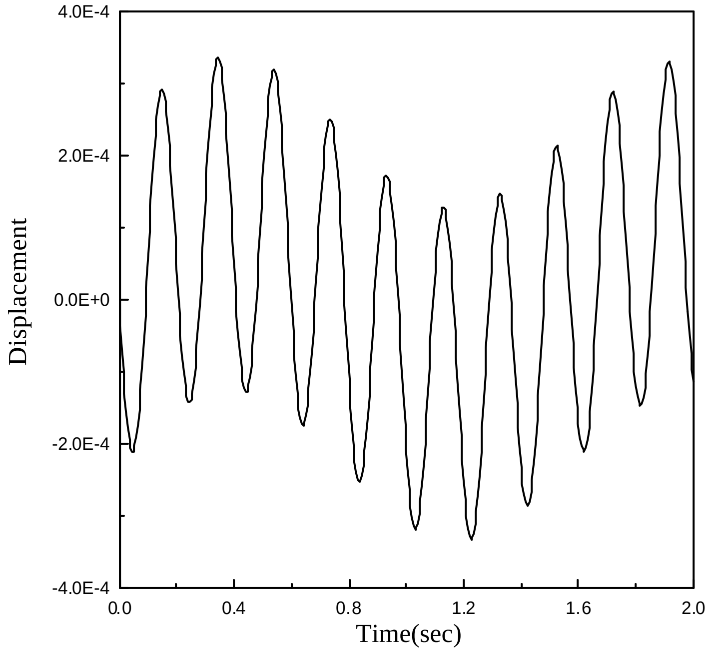


그림 4.13 Load Case1에 대한 MA 방법의 응답 곡선

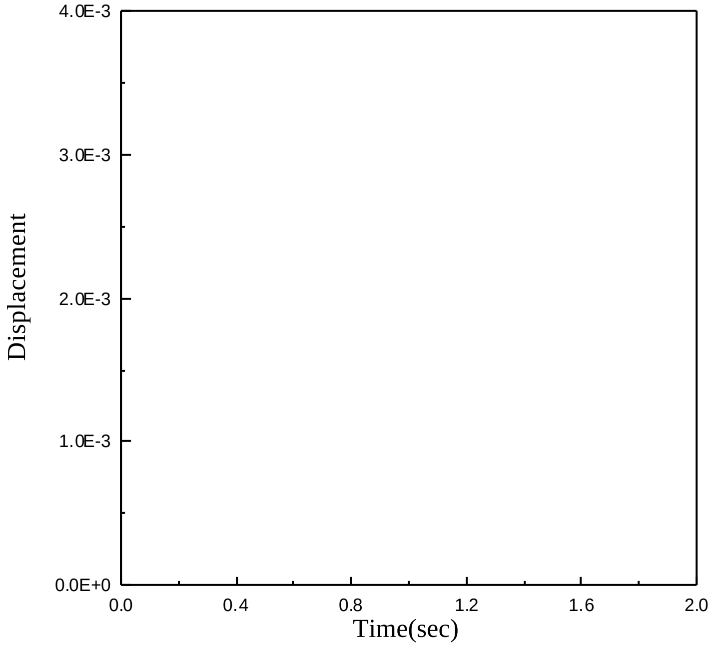


그림 4.14 Load Case2 에 대한 MT 방법의 응답 곡선

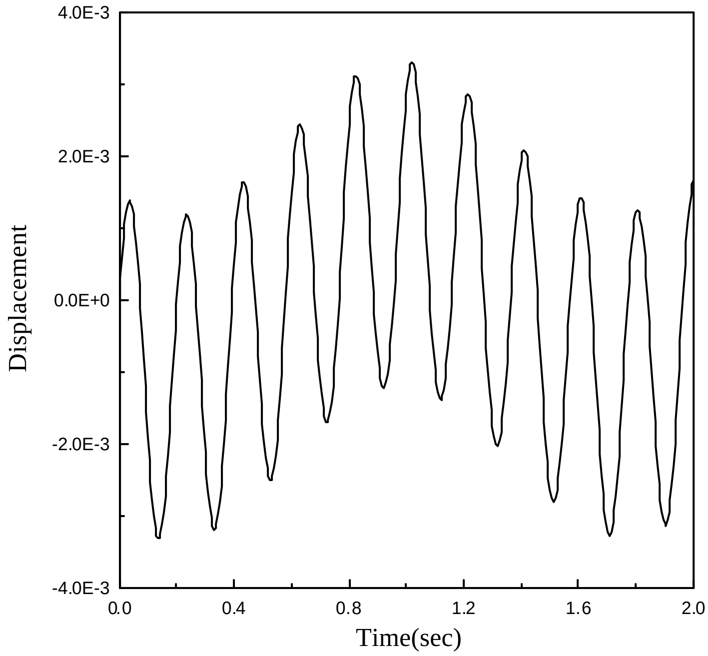


그림 4.15 Load Case2 에 대한 MA 방법의 응답 곡선

제 5 장 결론

본 연구에서는 MA 방법과 MT 방법을 비비례 감쇠시스템의 해석에 적합한 형태로 확장하였으며 그 사용성을 이론적 방법과 수치예제를 통하여 검증하였다. 본 연구의 결과는 다음과 같이 정리할 수 있다.

1. 비비례 감쇠시스템의 동적해석을 위한 확장된 MA 방법과 MT 방법은 고차모드의 누락으로 인해 발생하는 오차를 보정할 수 있는 효율적인 방법이다.
2. 확장된 MA 방법과 MT 방법을 적용함에 있어서 MA 방법은 항상 안정된 결과를 주는 반면 MT 방법은 하중의 형태에 따라 안정된 결과를 주지 못하는 경우가 존재한다.
3. MT 방법이 안정된 결과를 주는 경우에 있어서 그 결과는 MA 방법과 일치한다.

결론적으로 확장된 MA 방법과 MT 방법은 비비례 감쇠시스템의 동적해석에 효율적인 방법이다. 확장된 MA 방법과 MT 방법의 정확도는 대부분의 경우에 있어서 동일하다. 그러나 수렴의 안정성을 고려한다면 확장된 MA 방법이 확장된 MT 방법보다 우수한 방법이라고 할 수 있다. 그러므로 실제해석에 적용함에 있어서 확장된 MT 방법보다는 확장된 MA 방법을 선택하는 것이 해석의 안정성을 확보하고 정확한 결과를 얻는 데 바람직하다.

감사의 글

본 연구는 현대건설㈜의 연구비로 수행되었으며, 이에 현대건설㈜, 이지송 부사장 그리고 강대신 이사께 감사를 드립니다.

참고 문헌

[1] R. L. Bisplinghoff and H. Ashley, Aeroelasticity, Addison-wesley, Reading, Mass., 1955

[2] W. C. Hurty and M. F. Rubinstein, *Dynamics of Structure*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964

[3] O. E. Hansteen and K. Bell, "On the Accuracy of Mode Superposition Analysis in Structural Dynmics", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.7, 1979, pp.405-411

[4] E. L. Wison and T. Itoh, "An Eigensolution Strategy for Large Systems.", Computers and Structures, Vol.16, 1983, pp.259-265

[5] R. J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", AIAA Journal , Vol.3, 1965, pp380

[6] J. M. Dickens and K. V. Pool, "Modal Truncation Vectors and Periodic Time Domain Analysis Applied to a Cyclic Symmetry Structure", Computers and Structures, Vol.45, No.4, 1992, pp. 685-696

[7] G. B. Warburton and S. R. Soni, "Erros in Response Calculations for Non-Classically Damped Structures", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 5, 1987, pp.365-376.

[8] J. M. Dickens, J. M. Nakagawa and M. J. Wittbrodt, "A Critique of Mode Acceleration and Modal Truncation Augmentation Methods for Modal Response Analysis.", Computers and Structures, Vol.62, No.6, 1997, pp. 985-998

[9] Roy R. Craig, Jr., *Structural Dynamics*, John Wiley&Sons, 1981.

[10] E. L. Wison, M. W, Yuan and J. M. Dickens, "Dynamic Analysis by Superposition of Ritz Vectors.", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.10, 1982, pp.813-823

[11] Takeru Igusa, Armen Der Kiureghian and Jerome L. Sackman, "Modal Decomposition Method for Stationary Response of Non-Classically Damped Systems.", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.12, 1984, pp.121-136

[12] D. E. Newland, *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Scientific &

Technical, 1989.

[13] R. E. Cornwell, R. R. Craig, Jr. and C. P. Johnson, "On the Application of The Mode-Acceleration Method to Structural Engineering Problems.", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.11, 1983, pp.679-688

[14] **김만철**, "**비비례 감쇠 시스템의 효율적인 자유진동 해법**", **박사학위 논문**, **한국과학기술원**,1998

[15] Leonard Meirovitch, *Analytical Methods in Vibrations*, McGraw-Hill, 1975.

[16] Ray W. Clough and Josheph Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, 1993