석 사 학 위 논 문

케이블의 개선된 장력 산출 방법

김 기 영 (金 起 永)

토목공학과

한국과학기술원

2000

케이블의 改善된 張力 算出 方法

Improved Technique for Evaluating Tension of Cable

Improved Technique for Evaluating Tension of Cable

Advisor : Professor **In–Won Lee**

By

Ki-Young Kim

Department of Civil Engineering
Korea Advanced Institute of Science and Technology

A thesis submitted to the faculty of the Korea Advanced Institute of Science and Technology in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Engineering in the Department of Civil Engineering.

Taejon, Korea
1999. 12. 27.
Approved by

____

Professor In-Won Lee
Major Advisor

케이블의 개선된 장력 산출 방법

김 기 영

위 논문은 한국과학기술원 석사학위논문으로 학위논문 심사위원회에서 심사 통과하였음.

1999 년 12 월 27 일

심사 위원장 이 인 원

심 사 위 원 김 진 근

심 사 위 원 곽 효 경

MCE 983061

김기영. Ki-Young Kim. Improved Technique for Evaluating Tension of Cable. 케이블의 개선된 장력 산출 방법. Department of Civil Engineering. 2000. 45p. Advisor Prof. In-Won Lee. Text in Korea

ABSTRACT

Cables are very important members in long-span bridges such as cable-stayed bridges and suspension bridges. So it is a very important and a essential part of maintenance of bridge to evaluate the tension of cables. But most theory on evaluation of cable tension does not consider the inclination of cable and additional tension due to cable vibration, hence we can apply these results to limited cases.

In this paper, new formula for evaluating the tension of cables is studied to improve the existing formula by introducing the inclination and additional tension of cable. Exact solution for static cable problem is solved to derive new tension formula, and it is proved that symmetry and anti-symmetry of cables are broken in the existence of inclination of cables. The dynamic equation of motion of cable is studied on base of exact static solution and dynamic displacement of cable is derived on the assumption that the sag of cable is negligible and the dynamic displacement is much smaller than static one.

In case of inclined cables, there is no criterion for judging the symmetry and the anti-symmetry of mode shapes, so proposed method does not divide the modes into symmetric modes and anti-symmetric modes, hence, considers the additional tension in both symmetric and anti-symmetric modes.

The proposed method gives the better result than the result of existing methods. The error of existing method by Irvine(1981) is about 10%, but that of proposed method is only 0.04%. Moreover, the variance of results in proposed method is much smaller than Irvine’s method, because Irvine’s formula does not give accurate values in calculating tensions with lower frequencies.

목 차

그림 목차

제 1 장 서론

1.1 연구 배경

토목 구조물의 건설 분야에 있어서 현재까지 시공 기술 및 학문적 배경에 많은 진보가 있어 왔다. 이러한 기술의 발달로 인해 이제 토목 구조물은 구조물의 안전성 확보라는 과제에 대해 어느 정도 모범 답안을 내리게 되었으며, 점차적으로 시공 및 유지/보수에 관련된 경제성과 효율성에 까지 그 학문적 관심이 집중되어 가고 있다.

이러한 추세는 구조물의 형태나 시공 단계를 가리지 않고 번져가고 있다. 안전 확보를 우선으로 했던 기존 설계의 개념을 뛰어 넘은 최적 설계(optimal design)의 개념이 이미 보편화 되었고, 구조물의 계획 단계부터 유지 및 보수에 관한 계획이 신중히 고려되고 있을 뿐 아니라, 구조물의 안전도 측정 및 손상 평가에 관련된 새로운 학문과 이론이 속속 소개되고 있다.

이러한 현재의 추세 중에서 구조물의 사후 관리, 즉 구조물의 유지 및 보수에 관련된 분야에 우리는 주목해야 한다. 특히 시공 기술 및 관련 학문의 발전으로 인해 건설이 가능해진 거대 구조물(large structure)의 경우 여타 토목 구조물보다 유연(flexible)하며 낮은 고유 진동수를 갖고 있으므로 적극적인 유지 및 보수 계획이 필요하다. 그러나 거대 구조물은 그 제원이 크기 때문에 구조물의 안전도 및 손상지점을 측정하기가 상당히 난해하며, 경제적, 시간적 비용이 많이 소요된다. 따라서 거대 구조물의 안전도 평가 및 손상도 평가에 대한 효율적인 이론 및 기법이 절실히 요구되고 있는 상황이다.

사장교(cable-stayed bridge), 현수교(suspension bridge)와 같은 장대 교량의 경우 역시 마찬가지이다. 특히 장대 교량은 그 대부분이 해안, 산악 지형 등 환경이 열악한 곳에 건설되기 때문에, 풍하중에 의한 교량의 과다 변위나 해수에 의한 교각의 부식등에 인하여 구조물에 손상이 일어날 확률이 높다. 또한 많은 교각을 건설할 수 없는 경우가 많으므로 교각이 아닌 다른 형태의 지지 구조물로 거더(girder)를 지지하게 되며, 이 때 하중의 대부분을 이 지지 구조물에 의존하게 되므로 이 지지 구조물의 부재력 측정 및 손상 평가가 중요한 의미를 가지게 된다.

사장교나 현수교 등 대부분의 장대 교량 구조물은 그 지지 구조물로서 케이블(cable)

을 사용한다. 케이블은 휨강성(flexural rigidity)이 거의 없기 때문에 압축력(compression)을 받지 못하고 오로지 장력(tension)만을 받는 부재이다. 사장교 및 현수교는 대부분의 하중을 케이블이 지지하기 때문에 시공 및 유지, 보수 단계에서 케이블의 장력 산출은 필수적인 단계이다. 그러나 장대 교량의 케이블은 거더를 지지하기 위해 많은 수가 사용되므로 장력 산출 방법이 용이하지 않으면 시간적으로나 경제적으로 그 비용이 막대하다.

현재까지 케이블의 장력 산출은 주로 실험적인 방법으로 이루어지고 있다. 이 방법은 모든 케이블에 대해 장력 산출 작업을 실시하기에는 그 절차가 번거로울 뿐 더러, 단시간에 장력을 산출하기 어렵고 많은 연구 인력이 필요하다. 따라서 보다 경제적이고 편리한 방법이 요구되고 있는데, 그 대안으로 부각된 것이 바로 장력식을 이용한 방법이다. 장력식을 이용한 방법은 케이블의 고유 진동수를 측정하여 장력을 측정하는 방법으로서, 비교적 짧은 시간에 작업을 완수할 수 있을 뿐만 아니라, 자료 수집 절차가 비교적 간단한 장점이 있다. 그러나 현재까지는 케이블의 비선형성(nonlinearity)으로 인해 이론적 접근이 어렵고 많은 가정 사항을 포함하고 있어 주로 실험식이나 경험식이 연구되고 있다. 더욱이 일반적인 경우의 케이블에 대해서는 아직 이론적 기틀이 확립되어 있지 않으므로, 연구 단계나 실무 단계에서 이론적 접근이 어려울 뿐만 아니라 결과물의 검증 기준이 모호하다. 따라서 일반적인 케이블 구조물의 동특성의 이론적 해석 및 그 장력식이 절실히 요구되고 있는 실정이다.

1.2 기존 연구

케이블 구조물이 본격적으로 연구되어지기 시작한 때는 1974 년 H. M. Irvine[1]이 수평 케이블의 연구 결과를 소개하기 시작한 이후부터 이다. Irvine 은 수평 케이블의 운동 방정식을 유도하고 대칭성을 이용하여 동적 해(dynamic solution)를 완성하였다. 또한 수평 케이블의 대칭성을 그대로 도입하여 경사 케이블에 적용하였고, 이를 바탕으로 케이블의 특성 곡선 등 여러 가지 케이블의 동특성을 이론적으로 설명하여 케이블 구조물의 연구에 있어 선구적 역할을 하였다.

M. S. Triantafyllou[2]는 1982 년부터 부교(浮橋) 등의 해양구조물을 지지하는 케이블을 연구하면서 경사 케이블에 대한 운동 방정식을 새로운 좌표계를 도입하여 완성하였고 그 해를 구하였다. 그의 초기 방정식은 가정 사항이 많아 기존 좌표계와는 다른 새로운 좌표계를 도입했다는 사실을 제외하고는 괄목할만한 점이 없었다. 그러나 차후 수년동안 자신의 운동 방정식을 개선하여 가정사항을 배제한 새로운 운동 방정식을 완성, 해를 연구하였지만, 그 식이 복잡하고 풀기가 난해하여 지금까지 그 해를 구하지 못하고 있다. 이 운동 방정식의 해는 지금까지도 많은 학자들에 의해 연구되어지고 있으며, 더불어 Triantafyllou 의 운동 방정식은 Irvine 의 운동 방정식과 함께 대표적인 케이블의 운동 방정식으로서 양대 산맥을 이루고 있다.

1998 년 Russel 과 Lardner 는 실험을 통하여 케이블의 특성 곡선을 결정하였다. 또한 실험을 통해 여러 변수를 구하고 이를 Triantafyllou 의 운동 방정식에 대입하여 Triantafyllou 의 운동 방정식을 실험적으로 검증하였다. 또한 이 실험을 통해 지금까지 운동방정식의 부분적인 해석을 기반으로 예측되었거나 설명되었던 경사 케이블의 특성을 실험적으로 증명하였다.

1996 년 Zui, Shinke 와 Namita[3]는 Irvine 의 식을 기초로 한 새로운 장력식을 제안하게 된다. 이 식은 Irvine 의 식에 케이블의 경사각과 물성치 등의 변화에 따른 다양한 경우에 대해 보정값을 경험적, 실험적인 방법으로 산정하여 개선한 식이다. 그러나 경험식이기 때문에 적용에 있어 많은 제약 조건이 따르게 되어 실제 현장에서의 적용이 용이하지 않은 단점이 있다.

이밖에도 많은 학자들에 의하여 케이블 구조물의 운동 방정식 및 정적/동적 거동에 대한 연구는 계속되고 있으며, 동시에 장력 산출에 대한 문제도 많이 연구되고 있다.

1.3 연구 목표 및 범위

앞 절에서 소개한 바와 같이, 현재까지의 장력식은 실험으로부터 유도하였거나, 이론적인 배경에서 유도하되 경사각이나 부가장력을 고려하지 않고 가장 단순한 케이블의 경우에만 국한하여 식을 유도 하였거나, 개발된 이론식이 실험치와 유사한 값을 갖도록 보정한 식이 전부이다. 따라서 실제 케이블의 장력 측정시 오차를 유발할 수 있으며, 케이블의 물성치나 설치 환경도 식의 제한 사항에 벗어나는 경우가 많다. 또한 케이블에 대한 정확한 이론 정립이 되어 있지 않기 때문에, 경사 케이블에 있어서의 특성곡선의 변화 등 케이블의 특수 현상에 대해 단순히 실험적인 증명만을 수행하였거나, 그 현상이 일어날 수 있는 세부 조건에 대해서 밝히지 못하고 있다.

따라서 본 연구에서는 케이블 구조물에 대해 수행할 연구 목표 및 범위를 다음과 같이 설정하였다.

우선 일반적인 케이블의 정적 변위를 위한 엄밀해(exact solution)를 유도한다. 지금까지의 이론에서는 수평 케이블을 그대로 경사 케이블에 대해 적용하였기 때문에, 실제로는 그렇지 않음에도 불구하고 케이블의 정적 처짐(static deflection)이 대칭성을 유지한다고 가정하였고, 따라서 그 처짐이 매우 작을때만을 가정 할 수 밖에 없었다. 따라서 본 연구에서는 실제 상황에 맞는 좌표계를 설정하고, 케이블의 정적 변위를 유도하며 이를 장력식 개선에 활용한다.

또한 케이블의 정적 변위의 엄밀해를 사용하여 케이블의 동적 운동 방정식의 해를 구한다. 경사각을 고려할 경우 케이블의 동적 변위식은 기존 연구와는 다른 양상을 보이게 되지만, 기존 연구에서는 이러한 양상을 무시하고 단지 수평 케이블에 대한 이론을 그대로 경사 케이블에 적용하였다. 케이블의 동적 거동식은 장력 산정식에 직접적으로 활용되므로, 케이블의 정확한 동적 거동을 표현할 수 있는 식이 필수 불가결하다고 볼 수 있다.

본 연구의 주된 목표는 케이블의 개선된 장력식을 유도하는 것이다. 앞에서 제시한 정적 변위식의 엄밀해 및 개선된 동적 변위식은 개선된 장력식의 유도를 위한 선수 작업과 같다. 부연하여 설명하면, 실제 경사각을 이루는 케이블에 대한 정확한 장력식을 유도하여, 수평 케이블 이론으로 접근한 기존 장력식의 단점을 보완하는 것이 본 연구의 최종 목표이다. 경사각을 고려하고 이 때 기존 케이블 이론으로는 설명될 수 없는

부가장력에 의한 영향 및 복합 모드의 발생과 그에 따른 영향을 케이블의 장력식에 고려함으로서, 더 정확한 케이블의 장력식을 유도하고 기존 실험식이 가지는 까다로운 조건 및 제약 사항을 탈피하여 보다 정확하고 실무에 적용이 용이한 장력식을 만드는 것이 본 연구의 목적이다.

제 2 장   케이블의 운동방정식

2.1   정적 해석

2.1.1   정적 운동 방정식

케이블의 정확한 동적 거동을 예측하기 위해서는 정적거동에 대한 사전 지식이 필요하다. 이는 케이블의 처짐 형상 및 케이블의 경사에 따른 정적 거동이 케이블의 동적 거동에 상당한 영향을 미치기 때문이다.

그림 2-1 은 일반적인 케이블의 형태를 보여주고 있다. 처짐이나 변형이 없는 순수한 케이블의 길이는 L 이며, 양단에 장력 T 가 작용하고 있다. (실제로 양단의 장력이 같지는 않다) 이 케이블의 좌표축은 하단 단부가 원점이 되어 Cartesian 좌표계를 적용, x 축과 y 축이 설정되어 있으며, 케이블은 θ 만큼 경사각을 이루고 있다. 주어진 케이블은 회전 강성(rotational stiffness)이 무시할 수 있을 만큼 매우 작고, 케이블의 양단이 힌지(Hinge)로 고정되어 있으며, 케이블은 xy 평면에서만 변위를 일으킨다고 가정하자.

위와 같은 케이블의 자유 물체도(free-body diagram)는 그림 2 와 같다. 케이블의 미소 절편 ds 는 x 축 방향으로 dx 의 길이와 y 축 방향으로 dy 의 길이를 가지고 있으며, 양단에 장력이 가해지고 있다. 그림 2-2 에서, x 방향으로의 힘의 평형식은 식(2-1)과 같다.

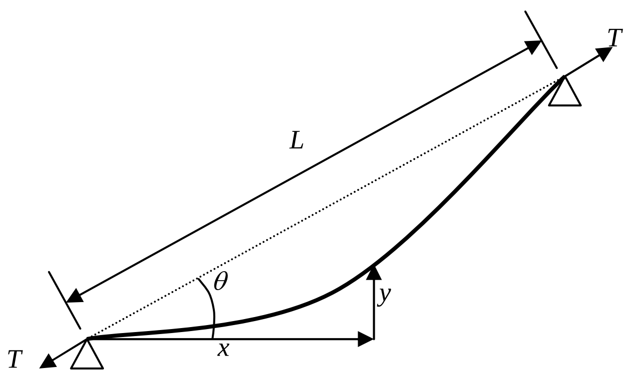

그림 2-1. 케이블의 개략도

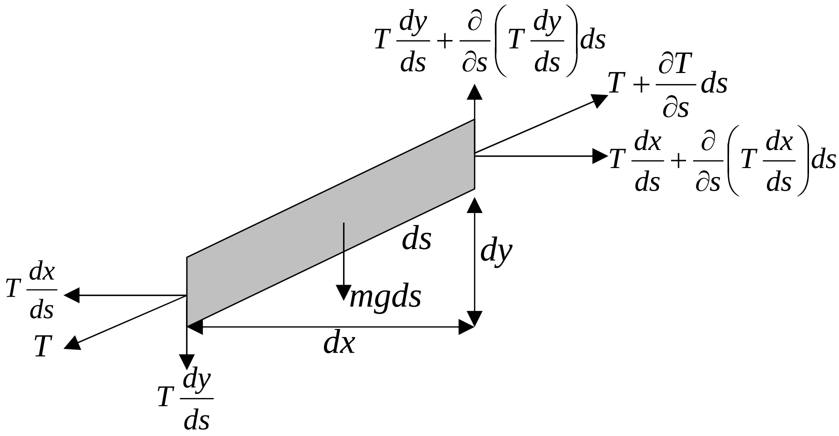

그림 2-2. 케이블의 자유물체도

$$T\frac{dx}{ds}=T\frac{dx}{ds}+\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{dx}{ds}\right)ds \tag{2-1}$$

따라서

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0 \tag{2-2}$$

또한 y 축 방향의 힘의 평형은 식(2-3)과 같다.

$$T\frac{dy}{ds}+mgds-T\frac{dy}{ds}-\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{dy}{ds}\right)ds=0 \tag{2-3}$$

이를 간략히 하면 식(2-4)와 같다.

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{dy}{ds}\right)=mg \tag{2-4}$$

ds 를 소거하기 위해 식(2-5)와 같은 기하학적 관계를 생각해보자.

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \tag{2-5}$$

또한 장력의 수평분력 H 를 생각해보면, T 와 H 의 관계는 다음과 같다.

$$H = T\frac{dx}{ds} \tag{2-6}$$

식(2-6)을 식(2-2)와 식(2-6)에 대입하면 식(2-7), (2-8)이 된다.

$$\frac{\partial H}{\partial s} = 0 \tag{2-7}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(H\frac{dy}{dx}\right) = mg \tag{2-8}$$

식(2-7)을 s 에 대해 적분하면 식(2-9)와 같이 s 에 관계없이 H 는 일정한 값임을 알 수 있다.

$$H = \text{constant} \tag{2-9}$$

식(2-5)에 $(dx)^2$ 을 양변 곱하면 식(2-10)을 얻을 수 있으며, 이를 식(2-8)에 적용하면 식 (2-11)을 얻는다.

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{2-10}$$

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = mg\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{2-11}$$

식(2-11)은 케이블의 정적 운동 방정식이다.

2.1.2 케이블의 처짐 곡선

식(2-11)은 비선형 방정식이므로 특수한 해법이 필요하다. 식(2-11)을 풀기 위해 식(2-12)를 생각해보자.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{2-12}$$

식(2-11)에 포함되어 있는 제곱근을 처리하기 위하여 y 의 x 에 대한 미분을 식(2-13)과 같이 두고 이를 식(2-11)에 대입하면 식(2-14)가 된다.

$$\frac{dy}{dx} = \sinh(Ax+B) \tag{2-13}$$

$$HA\cosh(Ax+B) = mg\cosh(Ax+B) \tag{2-14}$$

따라서 식(2-14)에서 A 값을 구할 수 있다.

$$A = \frac{mg}{H} \tag{2-15}$$

결국 식(2-13)에서 식(2-11)의 일반해는 식(2-16)과 같은 형태를 갖는다.

$$y(x) = \frac{H}{mg}\cosh\left(\frac{mg}{H}x + B\right) + C \tag{2-16}$$

케이블의 경계조건을 양단 힌지로 가정하자.

$$y(0) = 0 \tag{2-17}$$

$$y(L\cos\theta) = L\sin\theta \tag{2-18}$$

식(2-17), (2-18)을 식(2-16)에 대입하면 식(2-19), (2-20)을 얻는다.

$$y(0) = \frac{H}{mg}\cosh(B) + C = 0 \tag{2-19}$$

$$y(L\cos\theta) = \frac{H}{mg}\cosh\left(\frac{mgL\cos\theta}{H} + B\right) + C = L\sin\theta \tag{2-20}$$

식(2-20)에서 (2-19)을 빼면 식(2-21)을 얻는다.

$$\frac{H}{mg}\left[\cosh\left(\frac{mgL\cos\theta}{H} + B\right) - \cosh B\right] = L\sin\theta \tag{2-21}$$

Hyperbolic cosine 함수는 식(2-22)와 같은 관계식을 갖는다.

$$\cosh(P+Q) = \cosh P\cosh Q + \sinh P\sinh Q \tag{2-22}$$

식(2-22)을 사용하여 식(2-21)을 변형하여 보자.

$$\left[\cosh\left(\frac{mgL\cos\theta}{H}\right) - 1\right]\cosh B + \sinh\left(\frac{mgL\cos\theta}{H}\right)\sinh B = \frac{mgL\sin\theta}{H} \tag{2-23}$$

식(2-23)에서 B를 구하기 위해 변형하면 식(2-24)가 된다.

$$\frac{\cosh\Psi-1}{\sqrt{2(\cosh\Psi-1)}}\cosh B+\frac{\sinh\Psi}{\sqrt{2(\cosh\Psi-1)}}\sinh B=\frac{\Psi\tan\theta}{\sqrt{2(\cosh\Psi-1)}} \tag{2-24}$$

여기서 Ψ 는 식(2-25)와 같으며, 이는 케이블의 장력에 대한 케이블의 전체 하중의 비의 의미를 갖는다.

$$\Psi=\frac{mgL\cos\theta}{H} \tag{2-25}$$

식(2-24)를 다른 형태로 다시 쓰면, 식(2-26)과 같다.

$$\sinh\varphi\cosh B+\cosh\varphi\sinh B=\frac{\Psi\tan\theta}{\sqrt{2(\cosh\Psi-1)}} \tag{2-26}$$

여기서,

$$\varphi=\sinh^{-1}\left(\frac{\cosh\Psi-1}{\sqrt{2(\cosh\Psi-1)}}\right)=\cosh^{-1}\left(\frac{\sinh\Psi}{\sqrt{2(\cosh\Psi-1)}}\right) \tag{2-27}$$

식(2-26)에 식(2-22)를 적용하면 식(2-28)을 얻는다.

$$\sinh(\varphi+B)=\frac{\Psi\tan\theta}{\sqrt{2(\cosh\Psi-1)}} \tag{2-28}$$

따라서, 식(2-28)은 식(2-29)로 변형된다.

$$\varphi+B=\sinh^{-1}\left(\frac{\Psi\tan\theta}{\sqrt{2(\cosh\Psi-1)}}\right) \tag{2-29}$$

식(2-29)에 식(2-27),을 대입하여 정리하면 식(2-30)과 같이 B 의 값을 얻을 수 있다.

$$B = \sinh^{-1}\left(\frac{\Psi \tan\theta}{\sqrt{2(\cosh\Psi - 1)}}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{\cosh\Psi - 1}{\sqrt{2(\cosh\Psi - 1)}}\right) \tag{2-30}$$

우변의 두번째 항을 간단히 하기 위해서 이를 a 라고 두자.

$$a = \sinh^{-1}\left(\frac{\cosh\Psi - 1}{\sqrt{2(\cosh\Psi - 1)}}\right) \tag{2-31}$$

따라서 식(2-31)은 식(2-32)와 같이 변형된다.

$$\sinh a = \frac{\cosh\Psi - 1}{\sqrt{2(\cosh\Psi - 1)}} = \sqrt{\frac{\cosh\Psi - 1}{2}} \tag{2-32}$$

식(2-32)의 우변을 exponential 함수의 형태로 고치고 양변을 제곱하면 식(2-33)과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{e^{2a} + e^{-2a} - 2}{4} = \frac{\cosh\Psi - 1}{2} \tag{2-33}$$

식(2-33)을 정리하면 식(2-34)와 같다.

$$\cosh\Psi = \frac{e^{2a} + e^{-2a}}{2} = \cosh 2a \tag{2-34}$$

따라서 a 는 식(2-35)와 같이 구할 수 있다.

$$a = \frac{\Psi}{2} \tag{2-35}$$

식(2-30)은 다음과 같이 간략화된다.

$$B = \sinh^{-1}\left(\frac{\Psi \tan\theta}{\sqrt{2(\cosh\Psi - 1)}}\right) - \frac{\Psi}{2} \tag{2-36}$$

식(2-36)을 식(2-19)에 대입하면, 식(2-37)을 얻는다

$$C = -\frac{1}{\Psi L \cos\theta}\cosh\left[\sinh^{-1}\left(\frac{\Psi \tan\theta}{\sqrt{2(\cosh\Psi - 1)}}\right) - \frac{\Psi}{2}\right] \tag{2-37}$$

따라서 식(2-36), (2-37)을 식(2-16)에 대입하여 정리하면 식(2-38)과 같은 케이블의 정적 거동에 대한 일반식을 얻게 된다.

$$y(x) = \frac{L\cos\theta}{\Psi}\left[\cosh\left(\frac{\Psi x}{L\cos\theta} + B\right) - \cosh B\right] \tag{2-38}$$

2.1.3 케이블의 최대 처짐

식(2-38)은 케이블의 변위를 Cartesian 좌표계에 나타낸 것이므로, 케이블의 x 에 대한 절대 처짐량은 식(2-39)와 같이 나타난다.

$$\delta(x) = x\tan\theta - \frac{L\cos\theta}{\Psi}\left[\cosh\left(\Psi\frac{x}{L\cos\theta} + B\right) - \cosh B\right] \tag{2-39}$$

식(2-39)를 미분하면 식(2-40)을 얻는다.

$$\frac{d\delta}{dx} = \tan\theta - \sinh\left(\frac{\Psi x}{L\cos\theta} + B\right) \tag{2-40}$$

식(2-40)이 0 의 값을 갖는 지점에서 케이블의 처짐 곡선은 극소값을 갖게 되며, 그 관계식은 식(2-41)과 같다.

$$\sinh\left(\frac{\Psi x}{L\cos\theta} + B\right) = \tan\theta \tag{2-41}$$

따라서 식(2-41)을 변형하면 절대 처짐량이 최대인 곳의 x 의 값 $x_{\max}$ 는 식(2-42)와 같이 구할 수 있다.

$$x_{\max} = \frac{L\cos\theta}{\Psi}\left[\sinh^{-1}(\tan\theta) - B\right] \tag{2-42}$$

만일 $\theta = 0$ 이라면 식(2-42)는 식(2-43)과 같이 나타내어진다.

$$x_{\max} = -\frac{BL}{\Psi} \tag{2-43}$$

식(2-36)에서 $\theta = 0$ 일 경우 B 는 식(2-44)와 같으므로, 식(2-44)를 식(2-43)에 대입하면 식(2-45)를 얻는다.

$$B = -\frac{\Psi}{2} \tag{2-44}$$

$$x_{max} = \frac{L}{2} \tag{2-45}$$

식(2-42)를 다시 풀어서 쓰면 식(2-46)과 같다.

$$x_{max} = \frac{L\cos\theta}{2} + \frac{L\cos\theta}{\Psi}\left[\sinh^{-1}(\tan\theta) - \sinh^{-1}\left(\frac{\Psi\tan\theta}{\sqrt{2(\cosh\Psi - 1)}}\right)\right] \tag{2-46}$$

식(2-46)의 우변 첫번째 항은 수직 케이블을 가정하였을 경우 최대 처짐이 발생하는 점이며, 케이블의 기하학적 중심점이다. 따라서 케이블의 최대 처짐이 발생하는 점은 경사각 θ에 따라 변하는 경향을 보인다.

일반적인 케이블의 최대 절대 처짐은 식(2-42)를 식(2-39)에 대입하여 구하면 식(2-47)과 같이 구해진다.

$$\delta_{max} = \frac{L\sin\theta}{\Psi}\left[\sinh^{-1}(\tan\theta) - B\right] - \frac{L\cos\theta}{\Psi}\left[\cosh\left(\sinh^{-1}(\tan\theta)\right) - \cosh B\right] \tag{2-47}$$

$\theta = 0$ 일 경우 케이블의 최대 절대 처짐량은 식(2-48)과 같다.

$$\delta_{max} = \frac{L}{\Psi}\left[\cosh\left(\frac{\Psi}{2}\right) - 1\right] \tag{2-48}$$

따라서 수평케이블의 경우 길이에 대한 처짐의 정도를 나타내는 처짐비(sag-to-span ratio)는 식(2-49)과 같이 나타난다.

$$\gamma = \frac{\delta_{max}}{L} = \frac{1}{\Psi}\left[\cosh\left(\frac{\Psi}{2}\right) - 1\right] \tag{2-49}$$

따라서 식(2-47)을 분석해 보면, 케이블의 경사각은 케이블의 최대 처짐이 발생하는 지점 뿐만 아니라 최대 처짐의 양에도 관계가 있음을 알 수 있다.

2.1.4 케이블의 처짐에 관한 고찰

그림 2-3 은 $\theta = 45^\circ$ 인 경우 식(2-37)의 우변에서 첫번째 항과 두번째 항을 Ψ 에 대한 그래프로 나타낸 것이다. Ψ 는 식(2-25)와 같으며, 케이블의 처짐과 밀접한 관계를 갖는다. 즉, Ψ 의 값이 매우 큰 경우 케이블의 처짐은 무시할 수 없으며, Ψ 의 값이 매우 작은 경우는 케이블의 처짐을 무시할 수 있다.

만일 케이블의 처짐이 작아 Ψ 의 값이 매우 작은 경우에는 식(2-36)에서 우변 첫번째 항에 비하여 두번째 항이 매우 작으므로 B 는 식(2-50)과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$B = \sinh^{-1}\left(\frac{\Psi \tan\theta}{\sqrt{2(\cosh\Psi - 1)}}\right) \tag{2-50}$$

또한 케이블의 처짐이 매우 커 Ψ 의 값이 큰 경우에는 반대로 식(2-36)의 우변 첫째항에 비해 두번째 항이 매우 크므로 식(2-36)은 식(2-51)과 같이 간단히 된다.

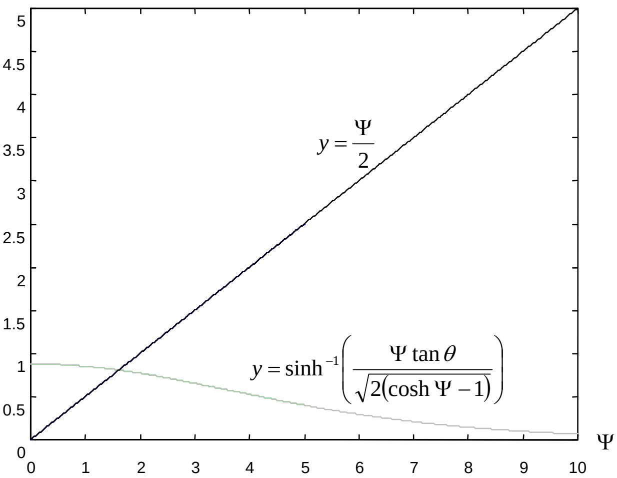

그림 2-3. B 값의 분석을 위한 그래프

$$B = -\frac{\Psi}{2} \tag{2-51}$$

따라서 케이블의 처짐에 따라 정적 변위식은 단순히 표현 될 수 있으며, 간략하게 동적 거동식으로 접근할 수 있다.

제 3 장 케이블의 개선된 장력 산출식

3.1 장력식

현재 장력을 산출하는 방법으로 소개된 방법들은 크게 실험으로서 구하는 방법과 이론식을 바탕으로 구하는 방법으로 나눌 수 있다. 실험이나 현장 테스트를 통해 얻을 수 있는 방법으로는 유압 잭을 이용하거나 로드셀(load cell)을 이용하는 직접적인 방법이 있고, 스트레인 게이지(strain gauge)를 이용하는 간접적인 방법이 있다. 그러나 이러한 방법은 시공시 장력의 도입량을 측정하기 위하여 주로 사용되며, 완공 후 케이블의 유지 및 관리를 위한 방법으로는 사용이 불가능한 단점이 있다.

이론식을 바탕으로 하는 방법은 크게 정적인 방법과 동적인 방법으로 나뉜다. 정적인 방법은 케이블의 물성치를 알 경우 케이블의 처짐 정도를 측정하여 장력을 산출하는 방법이다. 그러나 이 방법은 계측시 오차가 많고 처짐의 측정이 난해하여 잘 사용되지 않는다. 동적인 방법은 케이블의 고유 진동수를 측정한 후, 고유 진동수와 장력과의 관계를 이용하여 장력을 산출하는 방법이다. 이때 사용되는 고유 진동수와 장력과의 관계식을 장력식이라고 한다.

케이블의 비선형성으로 인해 동적 거동의 해석이 난해하기 때문에, 이론적인 케이블의 장력식을 유도하는 것은 상당히 어려운 작업이다. 따라서 장력식의 대부분은 경험식이나 실험식에 기반을 둔 것이다. 또한 현재까지 소개된 이론적인 장력식 역시 경사각이나 부가장력 등 케이블의 여러 조건들을 무시하고 전개한 단순한 이론만을 채택하고 있다.

3.2 제안 장력식

3.2.1 개요

식(2-75)는 케이블의 동적 거동을 나타내는 식으로서 장력식의 유도에 가장 기본이 되는 식이나, 이 식을 직접적으로 사용할 수는 없다. 대부분의 케이블의 물성치는 설계 당시 이미 측정 혹은 지정되었거나 측정 가능하지만, 케이블의 부가장력 $\bar{h}$ 와 동적 거동 $\bar{v}_n(x)$는 측정 불가능하기 때문이다.따라서 케이블의 장력식을 유도하기 위해서는 부가 장력과 동적 거동을 소거해야 하며, 역으로 말해서 부가 장력과 동적 거동을 소거하는 것이 장력식 산출을 위한 유일한 작업이 된다. 앞장에서 소개했던 케이블의 정적 해석이나 동적 해석, 또는 경계 조건등으로 부가 장력과 동적 거동을 소거할 수는 없으므로, 새로운 조건이 필요하게 된다. 이러한 조건으로서 본 논문에서는 변형률 - 변위 관계(strain - displacement relationship)와 Hooke 의 법칙을 사용한다.

3.2.2 변위 변형률 관계 및 Hooke 의 법칙

케이블의 변형률 $\varepsilon(x,t)$는 식(3-1)과 같이 나타내어 진다.

$$\varepsilon(x,t)=\frac{d\bar{s}-ds}{ds} \tag{3-1}$$

여기서 $d\bar{s}$ 는 변형 후 미소 절편의 길이이며, ds 는 원래의 미소 절편의 길이이다.
식(3-1)의 분모와 분자에 모두 $d\bar{s}+ds$ 를 곱하면 식(3-2)를 얻는다.

$$\varepsilon(x,t)=\frac{d\bar{s}^2-ds^2}{dsd\bar{s}+ds^2} \tag{3-2}$$

$dsd\bar{s}\approx ds^2$ 을 가정하면 식(3-2)는 식(3-3)과 같이 변형된다.

$$\varepsilon(x,t)=\frac{d\bar{s}^2-ds^2}{2ds^2} \tag{3-3}$$

만일 시간에 대한 함수를 고려하지 않는다면, 케이블에서의 ds 는 식(2-5)와 같이 나타내어지며, $d\bar{s}$ 는 식(3-4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$d\bar{s}^2 = dx^2 + (dy + d\bar{v})^2 \tag{3-4}$$

식(2-5)와 식(3-4)를 식(3-3)에 대입하면 식(3-5)를 얻는다.

$$\varepsilon(x) = \frac{(dy + d\bar{v})^2 - dy^2}{2ds^2} \tag{3-5}$$

식(3-5)를 풀어 정리하면 식(3-6)이 된다.

$$\varepsilon(x) = \frac{2dyd\bar{v} + d\bar{v}^2}{2ds^2} \tag{3-6}$$

앞 장에서 이미 동적 거동은 정적 변위에 비해 매우 작다고 가정하였으므로, $d\bar{v}^2$ 을 소거할 수 있다. 따라서 식(3-6)을 정리하면 식(3-7)과 같은 케이블의 변형률-변위 관계식을 얻을 수 있다.

$$\varepsilon(x) = \frac{dy}{ds}\frac{\partial\bar{v}}{\partial s} \tag{3-7}$$

케이블에서의 훅의 법칙은 식(3-8)과 같이 쓸 수 있다.

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\tau}{EA} \tag{3-8}$$

여기서 E 는 케이블의 탄성 계수(Young’s modulus), A 는 케이블의 단면적, 그리고 τ 는

케이블의 부가 장력이다.
식(3-8)에 모드 형상을 대입하면 시간에 대한 함수 관계를 소거해도 된다. 따라서 식(3-8)은 식(3-9)와 같이 나타내어 진다.

$$\varepsilon(x) = \frac{\bar{h}}{EA}\frac{ds}{dx} \tag{3-9}$$

3.2.3 부가 장력과 모드 형상의 관계식

식(3-7)과 식(3-9)는 모두 케이블 구조물에서의 변형율을 나타낸 식이다. 따라서 식(3-7)과 식(3-9)를 연립하면 식(3-10)과 같다.

$$\frac{\bar{h}}{EA}\frac{ds}{dx} = \frac{dy}{ds}\frac{d\bar{v}}{ds} \tag{3-10}$$

식(3-10)의 양변에 $(ds/dx)^2$ 을 곱하면 식(3-11)을 얻는다.

$$\frac{\bar{h}}{EA}\left(\frac{ds}{dx}\right)^3 = \frac{dy}{dx}\frac{d\bar{v}}{dx} \tag{3-11}$$

식(3-11)의 양변을 적분하면, 식(3-12)와 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\bar{h}}{EA}\int_0^{L\cos\theta}\left(\frac{ds}{dx}\right)^3 dx = \int_0^{L\cos\theta}\frac{dy}{dx}\frac{d\bar{v}}{dx}dx \tag{3-12}$$

식(3-12)의 좌변을 생각해보자. 만일 케이블의 처짐이 매우 작아 케이블의 처짐 형상을 직선으로 가정한다면, 식(3-13)이 성립한다.

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\theta} \tag{3-13}$$

따라서 좌변은 다음과 같이 변형된다.

$$\frac{\bar{h}}{EA}\int_0^{L\cos\theta}\frac{1}{\cos^3\theta}dx = \frac{\bar{h}L}{EA\cos^2\theta} \tag{3-14}$$

식(3-12)의 우변은 식(3-15)와 같이 변형된다.

$$\int_0^{L\cos\theta}\frac{dy}{dx}\frac{d\bar{v}}{dx}dx = \int_0^{L\cos\theta}\int\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d\bar{v}}{dx}dxdx \tag{3-15}$$

식(3-15)의 중적분항을 다시 적분하여 $\bar{v}$ 의 미분항을 $\bar{v}$ 로 변환하면 식(3-16)과 같다.

$$\int_0^{L\cos\theta}\frac{dy}{dx}\frac{d\bar{v}}{dx}dx = \int_0^{L\cos\theta}\bar{v}(x)\frac{d^2y}{dx^2}dx \tag{3-16}$$

따라서 식(3-14)에 식(3-14)와 식(3-16)을 대입하면 식(3-17)과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\frac{\bar{h}L}{EA\cos^2\theta} = \int_0^{L\cos\theta}\bar{v}(x)\frac{d^2y}{dx^2}dx \tag{3-17}$$

식(3-17)은 부가 장력과 모드 형상간의 관계를 나타내고 있다. 식(3-17)에서 알 수 있듯이, 대칭성을 유지하는 수평 케이블의 경우 처짐 곡선식의 이차 미분이 상수이다. 따

라서 역대칭 모드의 경우 식(3-17)의 오른쪽 항은 0 이 되며, 이 사실로서 역대칭 모드에서의 부가장력 $\bar{h}$ 가 0 이라는 기존의 이론을 확인할 수 있다. 그러나 경사 케이블의 경우, 처짐을 무시하여 처짐 곡선식의 이차 미분을 상수로 가정하더라도 모드 형상 함수 $\bar{v}(x)$ 는 대칭 및 역대칭성이 존재하지 않으므로 부가 장력이 0 이 될 수 없다. 따라서 식(3-17)은 경사 케이블에서 모든 모드에 있어 부가 장력을 고려해야 한다는 사실을 입증하고 있는 셈이다.

3.2.4 개선된 장력식의 유도

식(2-38)을 두번 미분하면 식(3-18)을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Psi}{L\cos\theta}\cosh\left(\frac{\Psi x}{L\cos\theta} + B\right) \tag{3-18}$$

케이블의 처짐이 매우 작다고 가정하면 식(3-18)도 마찬가지로 식(3-19)로 단순하게 표현된다.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Psi}{L\cos\theta}\cosh B \tag{3-19}$$

식(3-18)과 동적 거동식(2-74)를 식(3-17)에 대입하고 정리하면 식(3-20)을 얻을 수 있다.

$$\frac{L}{EA\cos\theta} = \frac{\Psi^2\cosh B}{m\omega^2 L}\frac{1}{\Omega}\left[\Omega - \sin\Omega - (1-\cos\Omega)\tan\frac{\Omega}{2}\right] \tag{3-20}$$

식(2-71)을 양변 제곱하여 변형하면 식(3-21)과 같다.

$$\omega^2 = \frac{\Omega^2 H}{mL^2\cosh B\cos^2\theta} \tag{3-21}$$

식(3-21)을 식(3-20)에 대입하고 정리하면 식(3-22)로 쓸 수 있다.

$$\frac{H}{EA\Psi^2 \cosh^2 B \cos^3 \theta} = \frac{1}{\Omega^3}\left[\Omega - \sin\Omega - (1-\cos\Omega)\tan\frac{\Omega}{2}\right] \tag{3-22}$$

식(3-22)의 우변중 삼각함수 부분은 식(3-23)과 같이 단순화 된다.

$$\Omega - \sin\Omega - (1-\cos\Omega)\tan\frac{\Omega}{2} = \Omega - 2\tan\frac{\Omega}{2} \tag{3-23}$$

따라서 식(3-22)에 식(3-23)을 대입하면 식(3-24)와 같이 정리된다.

$$\tan\frac{\Omega}{2} = \frac{\Omega}{2} - \frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\Omega}{2}\right)^3 \tag{3-24}$$

여기서,

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{H}{EA\Psi^2 \cosh^2 B \cos^3 \theta} \tag{3-25}$$

따라서 측정된 n 번째 고유 진동수에서 장력을 산출하기 위한 식은 식(3-26)과 같이 정리할 수 있다.

$$\tan\frac{\Omega_n}{2} = \frac{\Omega_n}{2} - \frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\Omega_n}{2}\right)^3 \tag{3-26}$$

여기서,

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{H}{EA\Psi^2 \cosh^2 B \cos^3 \theta} \tag{3-25}$$

$$\Omega_n = \omega_n L \cos\theta \sqrt{\frac{m \cosh B}{H}} \tag{2-79}$$

식(3-26)은 모드의 대칭 및 역대칭성이 파괴된 경사 케이블의 부가 장력과 경사각을 모두 고려한 개선식이다. 일반적으로 장력 산출 과정이 중요시 되는 케이블의 경우 케이블의 처짐이 심각하지 않고 자유 진동에 의한 동적 변위가 크지 않으므로 식(3-26)은 장력 산출이 중요시 되는 케이블의 경우 보다 다양한 물성치의 케이블에 대해 장력 산출이 가능하다.

3.3 기존 방법과의 비교

본 연구에서 제시한 개선된 장력식은 케이블의 경사각과 부가 장력을 고려함으로서 기존의 방법이 제한된 범위의 케이블에만 적용되었던 것과는 달리 일반적인 케이블에 대해 장력 측정이 가능하도록 하였다.

본 연구에서 제시한 장력식은 Irvine 의 수평 케이블을 위한 식을 경사 케이블로 확장, 발전시켜 일반적인 경우에도 적용이 가능하도록 개선한 식이므로, 기존의 Irvine 의 식과 비교하여 본 식의 개선 사항과 그 효과에 대해 검증해 보도록 한다.

3.3.1 Irvine 의 식[1]

Irvine 의 식은 수평 케이블에 대해 유도한 식이며 본 연구에서 제시한 식은 이를 경사 케이블로 확장하여 개선한 식이므로 기본적인 운동 방정식은 유사한 형태를 가진다.

정적 변위의 경우 Irvine 은 식(3-27)을 제시하고 있다.

$$z = \frac{H}{mg}\left\{\cosh\left(\frac{mgL}{2H}\right) - \cosh\frac{mg}{H}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right\} \tag{3-27}$$

본 연구에서 유도한 정적 변위식 (2-38)에 $\theta = 0$ 의 조건을 대입하면 식(3-27)과 동일한 식을 얻을 수 있다.

동적 운동 방정식의 경우 Irvine 의 식은 기본적으로 식(3-28)과 같은 형태를 가진다.

$$H\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + h\frac{d^2 y}{dx^2} = m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{3-28}$$

역대칭 모드의 경우 수평 케이블에서는 부가 장력이 없으므로 식(3-29)와 같이 간략화된다.

$$H\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{3-29}$$

식(3-29)를 변수 분리하면 식(3-30)과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$H\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + m\omega^2 \bar{v} = 0 \tag{3-30}$$

수평 케이블의 대칭성을 이용하게 되므로 케이블의 경계 조건은 경사 케이블과는 달리 식(3-31)과 같다.

$$\bar{v}(0) = 0 \tag{3-31a}$$

$$\bar{v}\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \tag{3-31b}$$

따라서 식(3-30)에 식(3-31)을 대입하면 식(3-32)와 같은 역대칭 모드의 고유 진동수 식을 쉽게 얻을 수 있다.

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{H}{m}} \tag{3-32}$$

여기서 n은 역대칭 모드의 모드 번호이다.

식(3-32)로부터 별도의 추가적인 수식 전개 없이 곧바로 장력을 구할 수 있으며, 식(3-33)은 역대칭 모드의 고유 진동수 식으로부터 얻어지는 장력식을 보여준다.

$$H = \frac{m\omega_n^2 L^2}{n^2\pi^2} \tag{3-33}$$

대칭 모드일 경우에는 부가 장력이 소거되지 않으므로 식(3-28)을 그대로 사용한다.
또한 정적 변위식 (3-27)을 동적 방정식에 사용하는 것이 아니라 정적 변위 곡선을 이차 다항식으로 근사한 식(3-34)를 사용한다.

$$y(x) = \frac{mg}{2H} x(L - x) \tag{3-34}$$

식(3-34)를 이차 미분하여 식(3-28)에 대입하고 변수 분리한 식은 식(3-35)와 같다.

$$H \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + m\omega^2 \bar{v} = \frac{mg}{H} \bar{h} \tag{3-35}$$

식(3-35)의 해는 식(3-36)과 같다.

$$\bar{v}(t) = \frac{\bar{h}}{H\Omega^2} \left(1 - \tan\frac{\Omega}{2} \sin\frac{\Omega x}{L} - \cos\frac{\Omega x}{L} \right) \tag{3-36}$$

여기서,

$$\Omega = \omega L \sqrt{\frac{m}{H}} \tag{3-37}$$

식(3-37)에 변형율-변위 관계와 Hooke 의 법칙을 적용하여 장력식을 유도하면 그 결과는 식(2-38)과 같다.

$$\tan\frac{\Omega}{2} = \frac{\Omega}{2} - \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\Omega}{2} \right)^3 \tag{3-38}$$

여기서,

$$\lambda^2 = \frac{EAm^2 g^2 L^3}{H^3 L_e} \tag{3-39}$$

$$L_e = \int_0^L \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 dx \tag{3-40}$$

식(3-38)은 케이블의 대칭 모드에서의 장력식으로서 그 형태는 본 연구에서 제안한 식(3-24)와 같다.

3.3.2 제안식과 Irvine 식의 비교

식(3-38)의 Irvine 의 식과 식(3-24)의 제안식은 동일한 형태를 가지고 있으나 제안식은 부가 장력 및 케이블의 경사각을 포함했으므로 많은 변수들이 더 고려되어 있다. 표 3-1 은 Irvine 식과 제안식의 차이를 보여준다. 가장 큰 차이점은 Irvine 의 식은 역대칭 모드와 대칭 모드를 구분한 반면 제안식 은 하나의 식으로 나타냈다는 점이다. 실제 경사 케이블에서는 역대칭성과 대칭성이 존재하지 않기 때문에 일반적인 케이블에 대한 문제에 접근을 시도할 때 대칭 모드와 역대칭 모드로 나누는 것은 오차를 수반할 소지가 다분하다

표 3.1. Irvine 식과 제안식의 비교

	Irvine 식	제안식
역대칭 모드	$H = \dfrac{m\omega_n^2 L^2}{n^2\pi^2}$	$\tan\dfrac{\Omega_n}{2} = \dfrac{\Omega_n}{2} - \dfrac{4}{\lambda^2}\left(\dfrac{\Omega_n}{2}\right)^3$ $\dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{H}{EA\Psi^2 \cosh^2 B \cos^3\theta}$ $\Omega_n = \omega_n L\cos\theta\sqrt{\dfrac{m\cosh B}{H}}$
대칭 모드	$\tan\dfrac{\Omega_n}{2} = \dfrac{\Omega_n}{2} - \dfrac{4}{\lambda^2}\left(\dfrac{\Omega_n}{2}\right)^3$ $\lambda^2 = \dfrac{EAm^2g^2L^3}{H^3L_e}$ $\Omega_n = \omega_n L\sqrt{\dfrac{m}{H}}$	

또한 케이블의 경사각을 고려하였기 때문에 제안식에는 θ가 포함되어 있으며, 정적 변위 곡선을 엄밀해로서 대입하여 상수화 하였기 때문에 장력식이 $\cosh B$의 함수로 나타내어 지는 것도 Irvine 의 식과의 차이이다.
식(3-27)을 두번 미분하면 (3-41)과 같다.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{mg}{H}\cosh\left(\frac{L}{2} - x\right) \tag{3-41}$$

그러나 실제 장력식의 유도 과정에서 Irvine 의 식은 정적 변위의 이차 미분을 식(3-42)와 같이 가정했다.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{mg}{H} \tag{3-42}$$

따라서 Irvine 의 식은 $x = L/2$인 지점에서의 $\cosh(L/2 - x)$의 값인 1 을 전체 케이블의 대표값으로 설정한 것이다. 하지만 제안식은 수평 케이블과 같은 대칭성 및 비대칭성이 보장되지 않은 경사 케이블에까지의 확장식이므로 Irvine 의 식과 같이 hyperbolic cosine 항을 1 로 치환할 수 없다. 따라서 본 식에서는 케이블의 극소점에서의 이차 미분치인 $\cosh B$를 사용하여 상수화를 수행하였다.

3.3.3 케이블의 특성 곡선을 통한 비교

케이블의 특성 곡선이란 케이블의 물성치에 따른 고유 주파수의 변화를 보여주는 곡선이다. 그러나 일반적으로 특성 곡선은 가로축을 λ^2, 세로축을 Ω로 하며, 식(3-38)을 그래프로 나타낸 것을 의미한다. 식(3-38)에서 Ω는 고유 주파수, λ^2은 물성치의 함수로 나타내어지기 때문에 특성 곡선의 정의에 반하지 않으며 케이블의 특정 물성치가 변함에 따라 케이블의 형상 자체가 변하지 않기 때문에 식(3-38)을 주로 사용하여 도시한다.

Russel 과 Lardner 는 케이블의 특성 곡선을 그림 3-1 과 같이 실험을 통하여 자료를 수집, 분석하여 나타내었다.[3] 이 실험에서 케이블의 경사는 약 44°이므로 두 식의 비

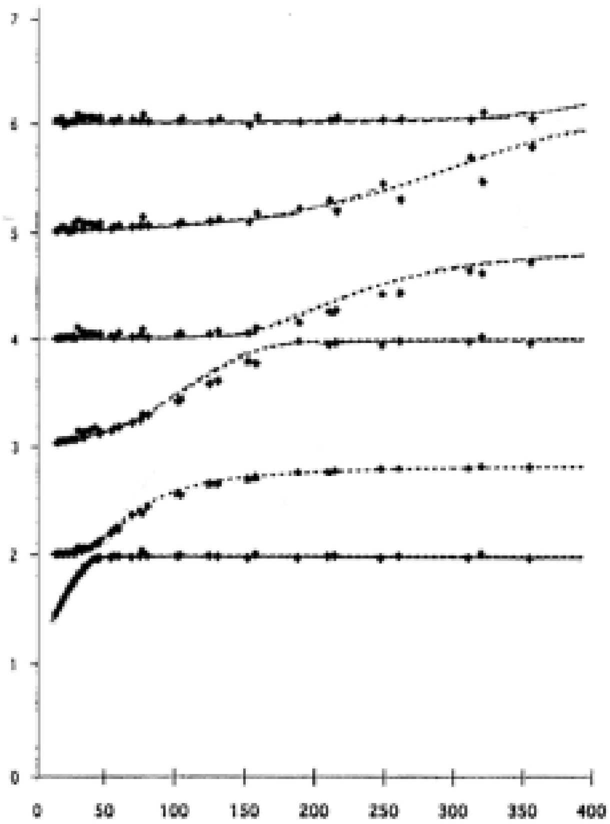

그림 3-1. 실험을 통한 케이블의 특성 곡선

교 대상으로 대단히 적절하다.

그림 3-2 는 Irvine 의 식과 제안식의 특성 곡선을 나타낸 것이다. Irvine 의 식을 도시한 특성 곡선의 경우 특정 물성치에서 대칭 모드와 비대칭 모드간에 중복근이 나타나지만 제안식의 경우는 실험식과 마찬가지로 중복근이 나타나지 않고 약간의 차이를 보임을 알 수 있다.

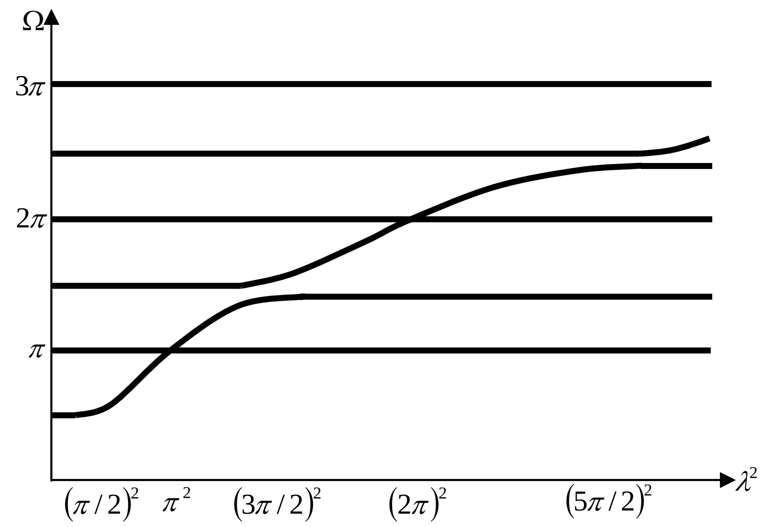

그림 3-2. Irvine 식의 케이블 특성 곡선

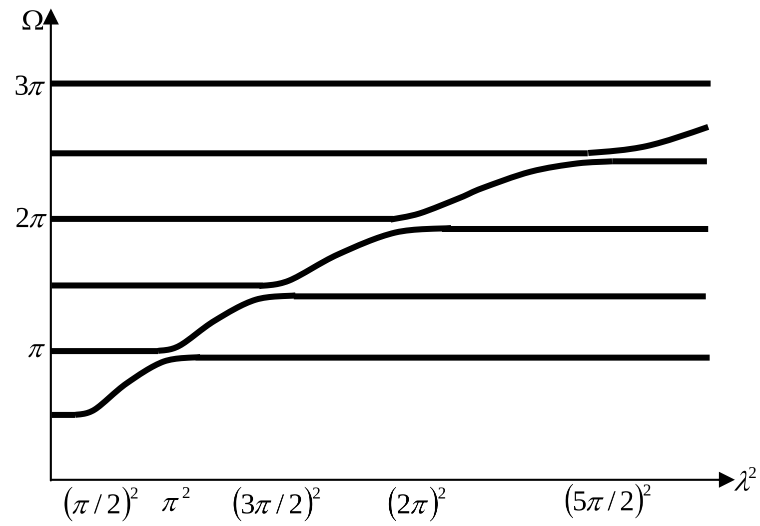

그림 3-3. 제안식의 케이블 특성 곡선

3.4. 수치 해석

본 절에서는 실제 케이블의 실험치를 토대로 수치 해석을 수행, Irvine 의 식과 제안식을 비교하였다. 실험치는 Russel 과 Lardner[3]가 실험한 데이터를 사용하였다. 표 3-2 는 실험에 사용된 케이블의 제원을 보여주고 있으며, 표 3-3 은 케이블의 고유 주파수를 보여준다.

표 3-2. 케이블의 물성치

매개변수	제원
경사각	43.6°
케이블의 길이	11.66m
총 중량	22.29N
최하부의 장력	71.39N
단면적	0.445mm^2
탄성 계수	13.4GPa

표 3-3. 케이블의 고유 주파수

모드 번호	고유진동수(Hz)
1	1.688
2	1.814
3	2.685
4	3.448
5	4.325
6	5.171
7	6.039

표 3-4 는 수치 해석 결과이며 그림 3-4 는 그 결과를 그래프로 나타낸 것이다. 제안식은 전체적으로 고른 분포를 보이며 실험상의 장력값과 잘 나타내고 있지만, Irvine 의 식은 저차 모드로 갈수록 오차가 커지며 첫번째 모드에서는 그 결과를 주지 않고 있다. 전체적으로 제안식에서 평균 0.04%의 오차를 보인 반면, Irvine 의 식은 약 10.32%의 오차를 보여 경사 케이블에서는 많은 오차를 내고 있음을 알 수 있다.

표 3-4. 수치 해석 결과

모드번호	Irvine	제안식	실험치(Russel)
1	-	71.42	
2	65.24	71.25	
3	101.52	71.43	
4	66.42	71.29	
5	89.49	71.45	
6	66.21	71.31	
7	83.66	71.40	
평균	78.76	71.36	71.39

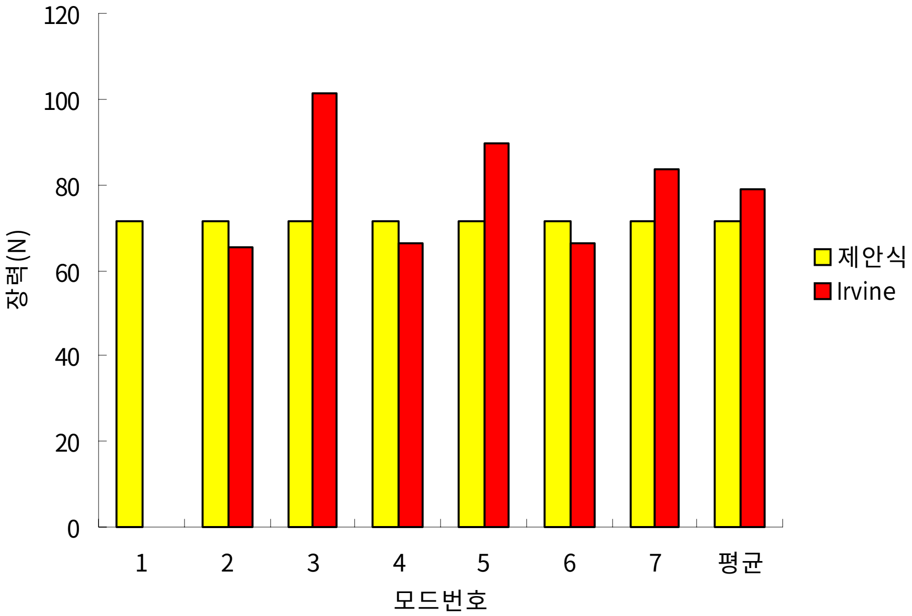

그림 3.4. 수치 해석 결과

제 4 장. 결론

본 연구에서는 부가장력과 경사각을 고려하지 않은 기존의 장력 측정 방법을 개선하여 부가장력과 경사각을 고려한 새로운 장력식을 제안하였다.

장력식의 유도를 위해 경사 케이블 구조물에서의 정적 엄밀해를 유도 하였고, 이를 이용하여 경사 케이블의 경우 케이블의 대칭성을 가정하고 문제에 접근하는 방법에 오류가 있음을 증명하였다. 또한 정적 엄밀해를 사용하여 동적 케이블의 운동 방정식을 유도하였으며, 케이블의 정적 처짐이 작다는 가정 하에서 운동 방정식의 해인 동적 변위식을 유도하였다.

경사 케이블에서는 대칭 모드와 역대칭 모드의 형상이 파괴되기 때문에, 제안식은 기존 장력식과는 달리 대칭 모드와 역대칭 모드를 구분하지 않으며, 모든 모드의 부가 장력을 무시하지 않는다.

부가장력과 경사각을 고려한 제안식은 기존 장력식에 비해 더 정확한 결과를 보였다. 기존 장력식이 저차 7 개 모드에서 평균 10.32%의 오차를 보인 반면, 제안식은 평균 0.04%의 오차를 보였다. 또한 기존 장력식이 저차 모드로 갈수록 그 오차가 커지며 이로 인해 전체적인 장력치의 분산이 커지는 반면, 제안식은 모든 모드에서 고른 값을 나타내었다.

참고 문헌

[1] Irvine, H.M. (1981), *Cable Structures*, MIT Press, Cambridge, Mass.

[2] Triantafyllou, M.S. (1982), "Preliminary Design of Mooring Systems," *Journal of Ship Research*, Vol.26, No.1, pp.25-35.

[3] Russel, J.C., Lardner, T.J. (1998), "Experimental Determination of Frequencies and Tension for Elastic Cables," *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol.124, No.10, pp.1067-1072.

[4] Zui, H., Shinke, T. and Namita, Y.(1996), "Practical Formulas for Estimation of Cable Tension Vibration Method," ASCE Journal of Structural Engineering, Vol.122, No.6, pp.651-656.

[5] Triantafyllou, M.S. (1984), "The Dynamics of Taut Inclined Cables," *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol.37, No.3, pp.421-440.

[6] Triantafyllou, M.S. and Grinfogel, L. (1986), "Natural Frequencies and Modes of Inclined Cable," *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol.112, No.1, pp.139-148.

[7] Irvine, H.M. (1978), "Free Vibrations of Inclined Cable," *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol.104, No.2, pp.343-347.

[8] Irvine, H.M. and Griffin, J.H. (1976), "On the Dynamic Response of a Suspended Cable," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.4, pp.389-402.

[9] Saxon, D.C. and Cahn, A.S. (1953), "Modes of Vibration of a Suspended Chain," *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol.6, No.3, pp.273-285.

[10] Yu, Z., Xu, Y.L. (1998), "Mitigation of Three-Dimensional Vibration of Inclined Sag Cable Using Discrete Oil Dampers – I. Formulation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.214, No.4, pp.659-673.

[11] Bedford, A. and Drumheller, D.S. (1996), *Elastic Wave Propagation*, John Wiley and Sons.

[12] Behbahani-Nejad, M. and Perkins, N.C. (1996), “Freely Propagating Waves in Elastic Cables,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol.196, No.2, pp.189-202.

[13] Koh, C.G., Zhang, Y. and Quek, S.T. (1999), “Low-Tension Cable Dynamics: Numerical and Experimental Studies,” *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.123, No.3, pp.347-354.

[14] Veletsos, A.S. and Darbre, G.R. (1983), “Dynamic Stiffness of Parabolic Cables,” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.11, pp.367-401.

[15] West, H.H. and Geschwindner, L.F. (1975), “Natural Vibrations of Suspension Cable,” *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 101, No.ST11, pp.2277-2291.

감사의 글

지도교수이신 이인원 교수님께 우선 감사드립니다.

저의 하잘 것 없는 논문에 대해 많이 지적해 주시고 관심을 보여 주신 김진근 교수님과 곽효경 교수님께도 감사드립니다. 또한 많은 지도 편달을 아끼시지 않으셨던 오주원 교수님과 박선규 교수님께도 감사의 말씀 드립니다.

또한 이년동안 저를 많이 지도해 주시고 돌봐주신 실험실 선후배 여러분께도 감사드립니다.

저에게 있어 제 2 의 교수님이 되어주셨으며 공학자로서의 안목과 실험실에서 궂은 일에 대처하는 방법등을 기꺼이 가르쳐주신 김동옥 박사님과, 한때 저와 실험실 스포츠 계의 쌍두마차로서 활약하셨던 김만철 박사님께 감사드립니다.

프로젝트니 논문 발표니 해서 저 때문에 많이 고생하셨음에도 불구하고 게으르고 놀기 좋아하는 후배에게 꾸지람 한번 안하시고 잘 다독거려 주신 형조형, 저의 논문에 많이 신경써 주시고 실장 재직시 저 때문에 많이 고생하신 주태형, 언제나 넓은 마음으로 철없는 후배를 대해 주셨던 지성이형, 피곤죽 구타 머신 공포(空砲)의 현택이형, 언제나 성실한 플레이로 저의 귀감만 되어 주셨던 병완이형, 후배의 무차별적인 갈굼에도 한번도 화내지 않으시고 언제나 웃는 얼굴로 편안하게 대해주셨던 상원형(아무래도 저한테 받으셨던 스트레스를 예비 형수님께 푸시는 거 같아 죄송할 따름입니다.)과 언제나 성실한 규식이형, 인생의 절반을 싸우는 데 보내는 엘지 공일구 넘버원 고객이자 법적으로만 총각인 현우에게도 가슴에서 우러나오는 감사의 뜻을 전합니다. 또한 남다른 열의를 보여주는 홍기와, 여자다운 면이라고는 상품 카탈로그 보고 눈 반짝거릴 때 밖에 없는 신양에게도 진심으로 감사하다고 말하고 싶습니다.

언제나 저의 그루터기가 되어 주었던 광주 과학고 8 기 동기 여러분들께도 감사의 말씀을 드립니다. 원중이, 강호, 영은이, 진호, 윤성이, 종서, 선혁이, 형건이, 개, 소, 말, 쏘가리 등 많은 나의 친구들과 성실 탐구 여러분들, 그리고 Creator 여러분들께도 진심으로 감사드립니다.

사랑하는 저의 가족에게도 진심으로 감사드립니다.

이제 저는 6 년동안의 긴 과기원 생활을 접고, 사회로의 날갯짓을 하려고 합니다.

언젠가는 밤새고 공부한 후 기숙사로 돌아갈 때 저를 깜짝 놀라게 하던 검은색 고양이와 시험 볼 때 떨리는 마음으로 받아 들었던 파란 줄 쳐진 회색 갱지도 그리워 질 날이 오겠지만, 과기원이라는 곳에서 부대끼며 살아온 6 년이라는 세월과 그 때 배운 탐구하는 자세는 영원히 저와 함께 있을 것입니다.

이력서

성　　명 : 김 기 영 (金 起 永)
생년월일 : 1975 년 10 월 13 일
출 생 지 : 광주
본　　적 : 광주

학　력

1994. 3. – 1998. 2. 한국과학기술원 과학기술대학 토목공학과 (B.S)
1998. 3. – 2000. 2. 한국과학기술원 토목공학과 (M.S)

연구논문

학위논문

1. 김기영 (2000), “케이블의 개선된 장력 산출 방법”, 석사학위 논문, 한국과학기술원

학술회의 발표 논문

국내 학술 회의

1. 김기영, 고만기, 이인원, "주파수 분석을 이용한 케이블의 장력 측정," *1999 년도 대한토목학회 학술발표회 논문집*, 1999.10. 22, pp. 69 -72.

연구 보고서

1. 김기영, 정형조, 이인원, “장대 교량의 내풍 성능 향상에 관한 연구,” *한국건설기술연구원*, 1999.