석 사 학 위 논 문

감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 민감도

조 홍 기 (趙 洪 基)

토 목 공 학 과

한 국 과 학 기 술 원

2001

감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 민감도

Natural Frequency and Mode Shape Sensitivity of Damped Systems

Natural Frequency and Mode Shape Sensitivity of Damped Systems

Advisor : Professor In-Won Lee

by

Hong-Ki Jo

Department of Civil Engineering
Korea Advanced Institute of Science and Technology

A thesis submitted to the faculty of the Korea Advanced Institute of Science and Technology in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Engineering in the Department of Civil Engineering

Taejon, Korea
2000. 12. 28.
Approved by

Professor In-Won Lee
Major Advisor

감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 민감도

조 홍 기

위 논문은 한국과학기술원 석사학위논문으로 학위논문 심사위원회에서 심사 통과하였음.

2000 년 12 월 28 일

심사 위원장 이 인 원

심 사 위 원 최 창 근

심 사 위 원 윤 정 방

MCE 993537

조홍기. Hong-Ki Jo. Natural Frequency and Mode Shape Sensitivity of Damped Systems. 감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 민감도. Department of Civil Engineering. 2001. 50p. Advisor: Professor In-Won Lee

ABSTRACT

Efficient algebraic methods for calculating eigenpair derivatives of damped system are presented in this paper. The derivatives of eigenvalues and eigenvectors are calculated separately from two equations in Lee et al.'s method, but eigenpair derivatives are obtained from one equation newly developed in proposed method hence proposed method become more efficient.

Proposed method is very efficient in storage capacity and CPU time because the coefficient matrix of proposed equation is symmetric and based on *N-space*. And numerical stability is guaranteed because coefficient matrix of proposed equation is non-singular.

The more large structure, the more limits are present in approximating dynamic behavior of structure using only first sensitivity of eigenpair. Therefore second sensitivity of eigenpair became important and proposed method is so expanded as to obtain second derivatives of eigenvalues and eigenvectors.

Phenomenon that mass, damping and stiffness matrices of structure are asymmetric appears in the case of special structure, for example gyroscopic system. Eigenpair sensitivities of asymmetric system cannot be found with previous sensitivity method for symmetric system. In this paper, methods for calculating the first derivatives and second derivatives of eigenpair of asymmetric damped systems are presented, too.

Numerical stabilities of each proposed method are proved, and numerical examples for the symmetric and asymmetric systems are considered to compare CPU time of proposed method with previous method's. As a result, we can know that proposed methods are more efficient than any other previous method.

목 차

그림 및 표 목록

제 1 장 서론

1.1 연구 배경

현대의 구조물들이 복잡해지고 대형화 됨에 따라 과거의 정적 설계만으로는 더 이상 구조물의 사용성과 안정성을 확보하기 힘들어 졌다. 지진이나 바람을 포함한 동적인 영향이 중요한 설계변수로 인식되고 있으며 이를 고려한 동적해석이 필수적이게 되었다.

구조물의 동적인 거동은 구조물의 고유치문제의 해인 고유진동수와 고유모드를 구함으로서 완전히 결정된다. 하지만 항상 존재하는 불확실한 요인에 의해 구조물의 설계변수는 변화될 수 있으며 이 변화는 고유진동수와 고유모드의 변화로 이어진다. 이렇게 변한 고유진동수와 모드는 구조물의 동적 거동을 변화 시키며 이는 구조물의 안정성에 중요한 영향을 미칠 수 있다.

이에 최근 구조물에 있어 설계 변수의 변화에 따른 고유진동수 및 모드의 변화율을 계산하는 분야가 중요한 연구 분야로 자리잡게 되었는데, 이는 고유진동수 및 모드의 미분을 간단하면서도 빠르고 안정적으로 구하는 것을 목적으로 하는 분야이다.

고유진동수와 모드의 미분 값은 많은 분야에서 사용된다. 구조물의 고유진동수에 대한 최적화, 구조물의 동 응답의 민감도, 설계변수가 바뀐 시스템의 재 모델링 등 고유쌍의 미분이 적용되는 분야는 매우 많다.

고유진동수의 미분은 시스템의 고유치 문제를 설계 변수에 대해 미분 함으로서 계산이 된다. 하지만 고유 모드의 미분은 식의 비정칙성(singularity)문제로 인해 고유치 문제의 미분식에서 직접 구할 수 없다. 이 비정칙성 문제를 해결하기 위하여 지난 30 여년간 많은 연구가 진행되어 왔다.

비감쇠 시스템의 대표적인 연구로 Rudisill 과 Chu[1]가 고유치와 모드의 미분을 대수적으로 구한 방법이 있다. Nelson[2]은 특이해와 비특이해의 합으로 모드의 미분을 구할 수 있는 방법을 제안하였고, Lee 와 Jung[3~4]은 부가조건을 이용해 정칙성을 해

결하였다. 그 외에 고유 모드의 미분을 여러 개의 모드의 합으로 계산한 모드 법[5~7] 과 개선된 모드 법[8~9], iteration 을 통해 근사해를 구하는 반복법[10-12]등이 있다.

감쇠 시스템에 대한 민감도 연구는 모드 법을 중심으로 많은 연구가 진행되고 있다. Zeng[13]이 감쇠 시스템의 고유진동수 및 모드의 민감도를 구하기 위해 수렴 속도가 매우 빠른 모드 법을 제안 하였으며, Adhikari[14]가 비감쇠 시스템의 모드를 사용해 감쇠 시스템의 모드 미분을 근사화 한 모드 법을 제안하였다. 모드 법과 달리 Lee et al.[15-16]은 Lee 와 Jung[3-4]의 방법을 감쇠 시스템까지 확장한 방법을 제안 하였으며, Zimoch[17]는 mechanical system 에만 적용 가능한 민감도 방법을 제안 하였다. 하지만 감쇠 시스템이 있어 이들 모드 법 및 Lee et al.의 방법 Zeng 의 방법은 기존에 비해 향상된 방법이지만 여전히 개선의 여지가 많이 남아 있어 본 연구의 필요성으로 작용한다.

고유쌍의 민감도가 많이 사용되는 분야 중 하나가 변화된 구조물의 고유진동수 및 모드의 근사화 이다. 이 경우 오차가 필연적으로 발생하는데, 이는 구조물이 대형화되고 자유도가 많아 짐에 따라 그 영향은 무시할 수 없게 된다. 이에 고유쌍의 2 차 미분값의 중요성이 부각되고 있다. 이에 대해선 Adelman 과 Haftka[18], Friswell[19] 등이 연구를 했지만 비감쇠 시스템의 경우이고, 감쇠 시스템에 있어서의 고유쌍 2 차 미분값에 대한 효율적인 방법이 필요하다.

고유진동수 및 모드의 민감도에 있어 또 다른 핵심문제가 비대칭 특성행렬을 가지는 시스템의 경우이다. 특수한 경우 구조물은 비대칭인 특성행렬을 가지게 되는데, 이러한 시스템의 경우 기존의 민감도 기법으로는 고유진동수 및 모드의 미분을 구할 수 없다. 이에 Brandon[20] 이 비감쇠 및 감쇠 시스템에 대한 방법을 제안 하였다. 하지만 이는 모드 법에 바탕을 둔 방법이라 모드 법이 가지고 있는 근본적인 문제를 여전히 포함하고 있으며 감쇠 시스템으로 적용시에는 상태공간방정식의 도입이 필요하다. 따라서 본 연구에서 이에 대해 새로운 방법으로 접근하고자 한다.

1.2 연구 목적

비감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 미분을 구하는 방법에 대해선 지난 30 여년간 많은 연구가 진행되어 왔다. 감쇠 시스템의 경우는 최근 시작된 분야로 개선 여지를 많이 가지고 있다. 이에 본 연구에서는 감쇠 시스템의 경우 고유진동수와 모드의 민감도를 계산하기 위한 향상된 식, 특히 가장 효율적인 방법으로 알려진 Lee et al.[15]의 방법을 개선하고자 한다.

고유진동수 및 모드의 2 차 미분의 중요성이 커지고 있다. 하지만 감쇠 시스템의 경우 이에 대한 연구는 아직 미비하며, 비감쇠 시스템의 경우라 할 지라도 기존의 방법들은 안정성 및 효율성이 부족한 방법이라 새로운 개념으로 접근해 효율성 및 안정성에 있어 훨씬 개선된 방법을 제안하고자 한다.

그리고 시스템의 질량, 감쇠, 강성 행렬이 비대칭인 경우 기존의 방법으로 고유쌍의 민감도를 구할 수 없다. 모드 법으로 접근한 방법이 있긴 하나 모드 법이 가지고 있는 근본적인 문제점이 해결되지 않았기에 본 연구에서는 새로운 방법으로 비대칭 행렬을 가지는 시스템의 고유진동수 및 모드의 민감도 문제를 해결하고자 한다.

1.3 연구 범위

본 연구는 감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 미분을 구하는 방법에 대해 다루었다. 먼저 기존 민감도 기법을 소개하고 각 방법의 특징을 설명하였다. 그리고 고유쌍의 민감도를 대수적으로 해결한 Lee et al.[15]의 개선된 방법을 제안하였으며, 이를 확장해 고유쌍의 2 차 민감도를 계산할 수 있게 하였다.

또한 이를 응용해 시스템 행렬이 비대칭인 경우에도 적용할 수 있는 방법을 제안하였으며, 마찬가지로 고유쌍의 2 차 미분도 해결할 수 있게 확장하였다.

각 방법의 수치적 안정성을 증명하였으며 다양한 수치 예제를 통해 기존 방법과 효율성을 비교 하였다.

제 2 장 대칭 시스템의 고유진동수와 모드의 민감도

2.1 이론적 배경

감쇠 시스템의 동적해석에서 일반화된 고유치 문제는 다음과 같다.

$$\left(\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\mathbf{u}_j=\mathbf{0} \tag{2-1}$$

여기서 $\mathbf{M}$는 시스템의 질량행렬, $\mathbf{C}$는 감쇠행렬, $\mathbf{K}$는 강성행렬로서 $\mathbf{M}$는 양의 한정(positive definite) $\mathbf{C}$와 $\mathbf{K}$는 반양의 한정(semi-positive definite)이며 모두 n차의 **대칭행렬**이다. 그리고 λ_j는 시스템의 j번째 고유치이고 $\mathbf{u}_j$는 j번째 고유 모드이다. 감쇠 시스템의 경우 모드는 다음의 상태공간방정식(state space equation)을 사용해 정규화 시킨다.

$$\mathbf{A}\mathbf{z}_j=\lambda_j\mathbf{B}\mathbf{z}_j \tag{2-2}$$

여기서 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-\mathbf{K} & 0\\ 0 & \mathbf{M}\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{M}\\ \mathbf{M} & 0\end{bmatrix}$, $\mathbf{z}_j=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_j\\ \lambda_j\mathbf{u}_j\end{Bmatrix}$이다.

이 식의 고유벡터 $\mathbf{z}_j$를 수정질량 B에 대하여 정규화 시키면 다음과 같다.

$$\mathbf{z}_j^T\mathbf{B}\mathbf{z}_j=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_j\\ \lambda_i\mathbf{u}_j\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{M}\\ \mathbf{M} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_j\\ \lambda_j\mathbf{u}_j\end{Bmatrix}=\mathbf{u}_j^T(2\lambda_i\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j=1 \tag{2-3}$$

고유치의 미분을 구하기 위해 식 (2-1)을 설계변수에 대해 미분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\mathbf{u}_{j,\alpha}=-\left(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C}\right)\mathbf{u}_j\lambda_{j,\alpha}-\left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}_{,\alpha}+\lambda_j\mathbf{C}_{,\alpha}+\mathbf{K}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_j \tag{2-4}$$

여기서 $(\bullet)_{,\alpha}$은 설계변수(α)에 대한 미분을 의미한다. 양변에 $\mathbf{u}_j^T$를 곱해 보자. 그러면 이 식의 좌변은 스칼라(scalar)가 되기 때문에 전치(transpose)시킬 수 있고 시스템 행렬 $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$가 대칭 이므로 다음과 같이 좌변 1은 소거된다.

$$\left[\mathbf{u}_j^T\left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\mathbf{u}_{j,\alpha}\right]^T=\mathbf{u}_{j,\alpha}^T\left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\mathbf{u}_j=0 \tag{2-5}$$

그리고 우변의 고유치 미분의 계수는 정규화 조건에 의해 1 이 되므로 고유치의 미분은 다음과 같이 쉽게 구해진다.

$$\lambda_{j,\alpha}=-\mathbf{u}_j^T\left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}_{,\alpha}+\lambda_j\mathbf{C}_{,\alpha}+\mathbf{K}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_j \tag{2-6}$$

식 (2-4)에서 우변의 $\lambda_{j,\alpha}$ 를 구했으므로 $\mathbf{u}_{j,\alpha}$ 를 구하기 위해선 좌변의 계수행렬인 $\left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)$의 역행렬을 양변에 곱하면 된다. 하지만 λ_j 가 시스템의 고유치이므로 계수행렬은 비정칙 행렬(singular matrix)이 되어 식 (2-4)로부터 직접 $\mathbf{u}_{j,\alpha}$ 을 구할 수 없게 된다.

이에 시스템 고유 모드의 민감도를 구하는 문제가 발생하게 되었고 많은 연구가 진행되어 왔다.

2.2 기존 민감도 기법

2.2.1 Zimoch 의 방법[17]

이 방법은 감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 미분을 구함에 있어 시스템 행렬의 요소에 대한 미분을 구하는 방법이다. 고유쌍의 질량행렬 요소에 대한 미분은 다음과 같이 되고,

$$
\begin{aligned}
&\partial \mathbf{\Lambda} / \partial m_{ij} = \mathbf{diag}\left[-6\lambda_k^2 \mathbf{u}_{ik}\mathbf{u}_{jk}\right],\\
&\partial \mathbf{\Lambda} / \partial m_{ii} = \mathbf{diag}\left[-3\lambda_k^2 \mathbf{u}_{ik}^2\right],\\
&(\boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \mathbf{2}\boldsymbol{n})\\
&\partial \mathbf{\Phi} / \partial m_{ii} = \Phi\left[\lambda_l \mathbf{u}_{ik}\mathbf{u}_{il}(\lambda_l + 2\lambda_k)/(\lambda_k - \lambda_l)\right], \quad (\boldsymbol{l} \neq \boldsymbol{k})\\
&\partial \mathbf{\Phi} / \partial m_{ii} = \Phi\left[\lambda_k \mathbf{u}_{ik}^2\right], \quad (\boldsymbol{l} = \boldsymbol{k})\\
&\partial \mathbf{\Phi} / \partial m_{ij} = \Phi\left[(2\lambda_k\lambda_l + \lambda_l^2)(\mathbf{u}_{il}\mathbf{u}_{jk} + \mathbf{u}_{ik}\mathbf{u}_{jl})/(\lambda_k - \lambda_l)\right], \quad (\boldsymbol{l} \neq \boldsymbol{k})\\
&\partial \mathbf{\Phi} / \partial m_{ij} = \Phi\left[-2\lambda_k \mathbf{u}_{ik}\mathbf{u}_{jk}\right]. \quad (\boldsymbol{l} = \boldsymbol{k})\\
&(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \mathbf{2}\boldsymbol{n})
\end{aligned}
\tag{2-7}
$$

감쇠행렬 및 강성행렬에 대해서도 마찬가지 방법으로 하면 된다. 각각의 미분은 하나의 식과 해당 벡터 만으로 있어 매우 효율적인 방법이다. 하지만 이 방법은 구조물의 면적이나 부 계산이 되므로 계산시간에 재의 길이, 두께, 강성의 변화 등 일반적인 변수를 설계 변수로 사용할 수 없는 단점이 있다. 즉 분할 시스템(discrete system)에만 적용 가능하고 연속 시스템(continuous system)에는 사용할 수 없는 극히 제한된 방법이라 하겠다.

2.2.2 Zeng 의 방법[13]

이 방법은 감쇠시스템의 고유쌍의 미분을 구하기 위해 모드 법이라는 전통적인 방

법을 사용하였다. 이를 위해 다음의 복잡한 식을 제안 하였다.

$$\lambda_{j,\alpha} = -\mathbf{u}_j^T(\lambda_j \mathbf{A}_{,\alpha} + \mathbf{B}_{,\beta})\mathbf{u}_j \tag{2-8}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{j,\alpha} = -\Bigg\{ & (\mathbf{B}+\beta\mathbf{A})^{-1}\sum_{m=0}^{M_a-1}[-(\lambda_j-\beta)\mathbf{A}(\mathbf{B}+\beta\mathbf{A})^{-1}]^m \\ & + \sum_{k=1,k\neq j}^{N}\left[\left(\frac{\lambda_j-\beta}{\lambda_k-\beta}\right)^{M_a}\frac{(\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^T)}{\lambda_j-\lambda_k} + \left(\frac{\lambda_j-\beta}{\lambda_k^*-\beta}\right)^{M_a}\frac{(\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^T)^*}{\lambda_j-\lambda_k^*}\right] \\ & + \left(\frac{\lambda_j-\beta}{\lambda_j^*-\beta}\right)^{M_a}\frac{(\phi_j\phi_j^T)^*}{\lambda_j-\lambda_j^*}\Bigg\}\left(\lambda_j'\mathbf{A}+\lambda_j\mathbf{A}_{,\alpha}+\mathbf{B}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_j - \left(\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j^T\mathbf{A}_{,\alpha}\mathbf{u}_j\right)/2\end{aligned} \tag{2-9}$$

여기서 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 는 감쇠 시스템의 고유치 문제를 상태공간방정식(state space equation)으로 바꾸어 해결할 때 나타나는 수정된 질량행렬(modified mass matrix), 감쇠행렬 (modified stiffness matrix)이고, $(\bullet)^*$ 는 켤레 수(conjugate)를 의미한다.

이 방법의 근본적인 단점은 모드 법이라는 데에서 시작된다. 비록 이 방법이 고유치를 이동시키고(shifted poles with β) M^a 제곱승 만큼 가속화 시켜 수렴되는 속도를 획기적으로 향상 시키긴 했지만 고유 진동수 및 고유모드의 미분을 구하기 위해 해당 고유쌍 외에 다른 여러 개의 고유쌍 정보를 필요로 하기 때문에 계산 시간 및 계산 용량에 있어 많은 시간이 걸리는 단점이 있다. 그리고 감쇠 문제를 해결하기 위하여 상태공간방정식을 이용하였는데, 이에 따른 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 행렬이 결과 식에도 그래도 나타나 결국 ‘*2N–space*’에 근거한 해석이 되어 버렸다. 물론 이에 따른 계산 시간 및 저장 공간에 있어서의 단점은 말할 것도 없다.

2.2.3 Nelson 의 방법[2]

이 방법은 비감쇠 시스템의 고유쌍 민감도를 위해 개발된 방법으로 비감쇠 시스템의 경우 가장 효율적인 방법으로 알려져 있다. 고유진동수의 민감도는 기존 방법에

의해 구하고 고유모드의 미분은 특이해(particular solution)와 비특이해(homogeneous solution)의 합으로 구하는 방법이다. 고유쌍의 미분을 구하는 식은 다음과 같다.

$$\lambda_{j,\alpha} = \mathbf{u}_j{}^T\left(\mathbf{K}_{,\alpha} - \lambda_j \mathbf{M}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_j \tag{2-10}$$

$$\mathbf{u}_{j,\alpha} = v_{j\alpha} + c_{j\alpha}\mathbf{u}_j \tag{2-11}$$

여기서 $c_{j\alpha} = -\mathbf{u}_j{}^T\mathbf{M}v_{j\alpha} - 0.5\mathbf{u}_j{}^T\mathbf{M}_{,\alpha}\mathbf{u}_j$ 이며, $v_{j\alpha}$ 는 다음 식을 통해서 구해진다.

$$\mathbf{D}_j v_{j\alpha} = \mathbf{b}_{j\alpha} \tag{2-12}$$

단 시스템의 j 번째 고유모드의 요소 중에서 가장 큰 값에 해당하는 위치를 k 라 한다면 $\mathbf{D}_j$ 의 k 번째 행과 열을 0 으로 만들고 $\mathbf{D}_j$ 의 (k,k)요소를 1 로 놓고 $\mathbf{b}_{j\alpha}$ 의 k 번째 요소를 0 으로 해서 식 (2-12)을 푼다.
여기서 $\mathbf{D}_j = \left(\mathbf{K} - \lambda_j\mathbf{M}\right)$이며, $\mathbf{b}_{j\alpha} = \lambda_{j,\alpha}\mathbf{M}\mathbf{u}_j - \left(\mathbf{K}_{,\alpha} - \lambda_j\mathbf{M}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_j$ 이다.
이 방법은 비감쇠 시스템을 위해 개발된 방법이다. 감쇠 시스템으로 적용하기 위해선 식 (2-2)와 같은 상태공간방정식이 도입 되어야 한다. 물론 이 경우에는 ‘*2N-space*’ 단점이 발생한다.

2.2.4 Lee et al.의 방법[15]

이 방법은 Lee 와 Jung[3]의 방법을 감쇠시스템까지 확장한 방법이다. 이 방법에서는 고유모드를 구할 때 나타나는 비정칙 문제를 정규화 조건식의 미분을 부가조건으로 이용해 대수적으로 처리한 획기적인 방법이다. 고유진동수의 미분은 기존의 전형적인 방법으로 구하였다.

$$\lambda_{j,\alpha} = -\mathbf{u}_j{}^T\left(\lambda_j^2\mathbf{M}_{,\alpha} + \lambda_j\mathbf{C}_{,\alpha} + \mathbf{K}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_j \tag{2-13}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K} & (2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{j,\alpha} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\lambda_{j,\alpha}(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j-(\lambda_j^2\mathbf{M}_{,\alpha}+\lambda_j\mathbf{C}_{,\alpha}+\mathbf{K}_{,\alpha})\mathbf{u}_j \\ -0.5\,\mathbf{u}_j^T\left[2\left(\lambda_{j,\alpha}\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{M}_{,\alpha}\right)+\mathbf{C}_{,\alpha}\right]\mathbf{u}_j \end{Bmatrix} \tag{2-14}$$

이 방법의 가장 큰 특징은 알고리즘이 매우 간단하며, 고유진동수 및 고유모드의 미분을 구하기 위해 해당 고유쌍의 정보만 필요하다는 것이다. 따라서 계산 시간 및 계산 용량에 있어 매우 효율적이다. 그리고 감쇠문제를 해결하기 위하여 상태공간방정식을 도입하긴 했으나 정규화 시킬 때만 사용되고 결과식에는 나타나지 않아 상태공간방정식의 사용에 따른 단점은 가지지 않는다. 즉 '*N-space*'에 근거한 해석을 유지한다는 것이다. 그리고 이 방법은 근사해가 아닌 정확해를 구하고, 계수 행렬의 정칙성(nonsingularity)까지 보장된 방법이다

2.2.5 Friswell 의 방법[19]

이 방법은 비감쇠 시스템의 고유진동수 및 모드의 2 차 미분을 구하기 위해 개발된 방법으로 Nelson[2]의 방법을 2 차 민감도까지 확장한 방법이다. Nelson 방법과 마찬가지로 특이해와 비특이해의 합으로 고유모드의 2 차 미분을 구하며 비특이해를 구하는 알고리즘도 비슷하다.

$$\lambda_{j,\alpha\beta} = \mathbf{u}_j^T\left(\mathbf{K}_{,\alpha\beta}-\lambda_j\mathbf{M}_{,\alpha\beta}-\lambda_{j,\alpha}\mathbf{M}_{\beta}-\lambda_{j,\beta}\mathbf{M}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_j + \mathbf{u}_j^T\left(\mathbf{K}_{,\alpha}-\lambda_{j,\alpha}\mathbf{M}-\lambda_j\mathbf{M}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_{j,\beta} + \mathbf{u}_j^T\left(\mathbf{K}_{,\beta}-\lambda_{j,\beta}\mathbf{M}-\lambda_j\mathbf{M}_{,\beta}\right)\mathbf{u}_{j,\alpha} \tag{2-15}$$

$$\mathbf{u}_{j,\alpha\beta} = v_{j\alpha\beta} + c_{j\alpha\beta}\mathbf{u}_j \tag{2-16}$$

여기서 $v_{j\alpha\beta}$ 는 다음 식의 해이고,

$$\mathbf{D}_j v_{j\alpha\beta} = \mathbf{b}_{j\alpha\beta} \tag{2-17}$$

$c_{j\alpha\beta}$ 는 다음과 같다.

$$c_{j\alpha\beta} = -0.5\mathbf{u}_j{}^T\mathbf{M}_{,\alpha\beta}\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j{}^T\mathbf{M}_{,\alpha}\mathbf{u}_{j,\beta} - \mathbf{u}_j{}^T\mathbf{M}_{,\beta}\mathbf{u}_{j,\alpha} - \mathbf{u}_{j,\alpha}{}^T\mathbf{M}\mathbf{u}_{j,\beta} - \mathbf{u}_j{}^T\mathbf{M}v_{j\alpha\beta}\,. \tag{2-18}$$

단 $\mathbf{b}_{j\alpha\beta} = -(\mathbf{K} - \lambda_j\mathbf{M})_{,\alpha\beta}\mathbf{u}_j - (\mathbf{K} - \lambda_j\mathbf{M})_{,\alpha}\mathbf{u}_{j,\beta} - (\mathbf{K} - \lambda_j\mathbf{M})_{,\beta}\mathbf{u}_{j,\alpha}$ 이다.

나머지 과정은 Nelson 방법과 비슷하다. 역시 감쇠 시스템으로 적용하기 위해선 상태 공간방정식(*2N-space*)도입이 필요하다.

2.3 제안 방법

2.3.1 제안 방법의 알고리즘

제안 방법은 Lee et al.[15]방법의 개선된 방법이다. Lee et al.방법이 기존 방법에 비해 매우 효율적인 반면 고유진동수와 고유모드의 미분을 분리해서 따로 구한 단점을 지니고 있다. 부가조건을 이용해 대수적으로 비정칙성 문제를 해결할 경우 이들을 하나의 식으로 구할 수 있다. 제안식을 유도해 보자.

우선 동적시스템의 일반화된 공유치 문제는 다시 써보자.

$$\left(\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\mathbf{u}_j=\mathbf{0} \tag{2-19}$$

이를 설계변수(α)에 대해 미분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\mathbf{u}_{j,\alpha}+\left(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C}\right)\mathbf{u}_j\lambda_{j,\alpha}=-\left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}_{,\alpha}+\lambda_j\mathbf{C}_{,\alpha}+\mathbf{K}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_j \tag{2-20}$$

부가 조건으로는 정규화 조건(normalization condition)의 미분을 사용한다. 상태공간방정식을 이용한 감쇠시스템의 고유모드 정규화 조건을 다시 써보면 다음과 같다.

$$\mathbf{z}_j^T\mathbf{B}\mathbf{z}_j=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_j\\ \lambda_i\mathbf{u}_j\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{M}\\ \mathbf{M} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_j\\ \lambda_j\mathbf{u}_j\end{Bmatrix}=\mathbf{u}_j^T(2\lambda_i\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j=1 \tag{2-21}$$

이 식을 설계 변수(α)에 대해 미분하면 다음과 같이 되고,

$$\mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_{j,\alpha}+\mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j\lambda_{j,\alpha}=-0.5\mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}_{,\alpha}+\mathbf{C}_{,\alpha})\mathbf{u}_j \tag{2-22}$$

이 식을 부가조건으로 사용한다.

식 (2-20)와 식 (2-22)를 합쳐 하나의 선형대수방정식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K} & (2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C}) & \mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{j,\alpha} \\ \lambda_{j,\alpha} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} (\lambda_j^2\mathbf{M}_{,\alpha}+\lambda_j\mathbf{C}_{,\alpha}+\mathbf{K}_{,\alpha})\mathbf{u}_j \\ 0.5\mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}_{,\alpha}+\mathbf{C}_{,\alpha})\mathbf{u}_j \end{Bmatrix} \tag{2-23}$$

이 식이 제안 방법의 핵심이다. Lee et al.방법[15]에서는 고유진동수의 미분을 기존의 방법을 그대로 사용해 고유모드의 미분과 따로 구했으나, 본 방법에서는 고유치 문제의 미분식을 재 정리해서 그대로 사용함으로 고유진동수와 모드의 미분을 하나의 식으로 동시에 구할 수 있다. 매우 간단한 식이며, 고유진동수와 모드의 미분을 구하기 위해 해당 고유쌍의 정보만 필요로 한다. 그리고 계수 행렬이 대칭이어서 계산 시간 및 계산 용량에 있어 매우 효율적이며 계수행렬의 정칙성을 지니고 있어 수치적 안정성을 보장한다. 물론 '*N-space*'에 근거한 해석을 유지함은 물론이다. 수치적 안정성에 대한 증명은 2.3.3 절에서 하겠다.

2.3.2 2 차 미분으로의 확장

고유진동수 및 고유모드 2 차 미분의 중요성은 이미 앞에서 설명하였다. 제안한 식을 바탕으로 고유쌍의 2 차 미분을 구할 수 있는 식으로 확장해 보겠다. 이를 위해 본 방법에서는 고유치문제 식(2-19)과 정규화 조건 식(2-21)을 두번 미분한 식을 사용한다. 좀더 일반적인 2 차 미분을 구하기 위해 두개의 설계변수 (α,β)에 대한 미분을 구하겠다. 우선 고유치 문제 식 (2-19)을 미분해 보자. 설계변수 (α,β)에 대해 미분하기 위해 먼저 설계변수 (α)에 대해 미분하면 식 (2-20)가 되고 이를 설계변수 (β)에 대하여 미분하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}(\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K})\mathbf{u}_{j,\alpha\beta}+(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j\lambda_{j,\alpha\beta} &= -\Big[(\tilde{\mathbf{F}}_{j,\beta}+\mathbf{G}_j\lambda_{j,\beta})\mathbf{u}_{j,\alpha} \\ +(\tilde{\mathbf{F}}_{j,\alpha}+\mathbf{G}_j\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\beta} &+\Big\{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{j,\alpha\beta}+(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}+\mathbf{M}\lambda_{j,\alpha})\lambda_{j,\beta}+(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}+\mathbf{M}\lambda_{j,\beta})\lambda_{j,\alpha}\Big\}\mathbf{u}_j\Big]\end{aligned} \tag{2-24}$$

마찬가지로 정규화 조건 식 (2-21)을 설계변수 (α, β)에 대해 미분 하기 위해 우선 설계변수 (α)에 대하여 미분하면 식 (2-22)가 되고, 이를 설계변수 (β)에 대하여 미분하면 다음 식이 된다.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_{j,\alpha\beta}+(\mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j)\lambda_{j,\alpha\beta}=-0.5\Big[\mathbf{u}_{j,\alpha}^T(\mathbf{G}_j+\mathbf{G}_j^T)\mathbf{u}_{j,\beta}\\
&+\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha\beta}+2\mathbf{M}_{,\alpha}\lambda_{j,\beta}+2\mathbf{M}_{,\beta}\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_j+\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}+\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}^T+2\mathbf{M}\lambda_{j,\beta}+2\mathbf{M}^T\lambda_{j,\beta})\mathbf{u}_{j,\alpha}\\
&+\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}+\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}^T+2\mathbf{M}\lambda_{j,\alpha}+2\mathbf{M}^T\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\beta}\Big]
\end{aligned}
\tag{2-25}
$$

여기서 각 항이 의미하는 바는 다음과 같다.

$$
(\bullet)_{,\alpha}=\frac{\partial(\bullet)}{\partial\alpha},\qquad (\bullet)_{,\alpha\beta}=\frac{\partial^2(\bullet)}{\partial\alpha\partial\beta},\qquad \mathbf{F}_j=[\lambda_j{}^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K}]
$$

$$
\tilde{\mathbf{F}}_{j,\alpha}=[\lambda_j{}^2\mathbf{M}_{,\alpha}+\lambda_j\mathbf{C}_{,\alpha}+\mathbf{K}_{,\alpha}],\qquad \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{j,\alpha\beta}=[\lambda_j{}^2\mathbf{M}_{,\alpha\beta}+\lambda_j\mathbf{C}_{,\alpha\beta}+\mathbf{K}_{,\alpha\beta}]
$$

$$
\mathbf{G}_j=[2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C}],\qquad \tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}=[2\lambda_j\mathbf{M}_{,\alpha}+\mathbf{C}_{,\alpha}]
$$

식 (2-24)와 식 (2-25)를 합쳐 하나의 선형대수방정식 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$
\begin{bmatrix}\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K} & (2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j\\ \mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C}) & \mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_{j,\alpha\beta}\\ \lambda_{j,\alpha\beta}\end{Bmatrix}
$$

$$
=-\left\{\begin{matrix}\Big[(\tilde{\mathbf{F}}_{j,\beta}+\mathbf{G}_j\lambda_{j,\beta})\mathbf{u}_{j,\alpha}+(\tilde{\mathbf{F}}_{j,\alpha}+\mathbf{G}_j\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\beta}+\\ \qquad\{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{j,\alpha\beta}+\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}\lambda_{j,\beta}+\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}\lambda_{j,\alpha}\}\mathbf{u}_j+2\lambda_{j,\alpha}\lambda_{j,\beta}\mathbf{M}\mathbf{u}_j\Big]\\ \Big[\mathbf{u}_{j,\alpha}^T\mathbf{G}_j\mathbf{u}_{j,\beta}+\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}+2\mathbf{M}\lambda_{j,\beta})\mathbf{u}_{j,\alpha}+\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}+2\mathbf{M}\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\beta}\\ \qquad+0.5\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha\beta}+2\mathbf{M}_{,\alpha}\lambda_{j,\beta}+2\mathbf{M}_{,\beta}\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_j\Big]\end{matrix}\right\}
\tag{2-26}
$$

이 식이 고유진동수와 모드의 2 차 미분을 구하는 식이다. 1 차 미분을 구하는 식과 비슷한데, 좌변의 계수행렬은 변하지 않고 우변만 달라진다. 제안식의 우변을 보면 고유쌍의 1 차 미분이 필요한 것을 볼 수 있다. 즉 식 (2-23)을 통해 고유쌍의 1 차 미

분을 구한 후 식 (2-26)을 이용해 2 차 미분값을 구할 수 있다는 것이다.

위와 마찬가지로 고유치문제와 정규화 조건의 3 차 미분식을 하나의 선형대수방정식으로 합치면 고유쌍 3 차 미분을 구할 수 있고, 그 이상 고차 미분식에 대해서도 같은 방법으로 확장 적용할 수 있다.

참고로 하나의 설계 변수로 2 차 미분을 구하는 경우 ($\alpha = \beta$), 제안식 (2-26)은 다음과 같이 좀더 간단해 진다.

$$\begin{bmatrix} \lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K} & (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_j^T (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) & \mathbf{u}_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{j,\alpha\alpha} \\ \lambda_{j,\alpha\alpha} \end{Bmatrix}$$
$$= -\begin{Bmatrix} 2(\tilde{\mathbf{F}}_{j,\alpha} + \mathbf{G}_j \lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\alpha} + (\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{j,\alpha\alpha} + 2\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}\lambda_{j,\alpha} + 2\mathbf{M}\lambda_{j,\alpha}^2)\mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_{j,\alpha}^T \mathbf{G}_j \mathbf{u}_{j,\beta} + \mathbf{u}_j^T (2\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha} + 4\mathbf{M}\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\alpha} + 0.5\mathbf{u}_j^T (\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha\alpha} + 4\mathbf{M}_{,\alpha}\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_j \end{Bmatrix} \tag{2-27}$$

2.3.3 수치적 안정성 증명

제안 방법의 수치적 안정성은 제안 식 (2-23)과 (2-24)의 계수행렬 $\mathbf{A}^{\#}$의 정칙성 (non-singularity)을 증명함으로 보장이 된다. 계수 행렬 $\mathbf{A}^{\#}$가 정칙 행렬임을 증명하기 위하여 다음의 성질을 이용한다.

$$\det(\mathbf{Y}^T \mathbf{A}^{\#} \mathbf{Y}) = \det(\mathbf{Y}^T)\det(\mathbf{A}^{\#})\det(\mathbf{Y}) \tag{2-28}$$

즉 $\det(\mathbf{Y}) \neq 0$인 임의의 $\mathbf{Y}$에 대해 $\det(\mathbf{Y}^T \mathbf{A}^{\#} \mathbf{Y}) \neq 0$임을 증명하면 $\det(\mathbf{A}^{\#}) \neq 0$이 증명된다. 이를 위해 정칙 행렬인 임의의 $\mathbf{Y}$를 다음과 같이 정하자.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \Psi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{2-29}$$

여기서 $\Psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \cdots \ \psi_{n-1} \ \mathbf{u}_j]$이고 $\mathbf{u}_j$는 시스템의 j 번째 고유 모드, ψ_k 는 $\mathbf{u}_j$와 서로 독립인 임의의 벡터들이다. $\boldsymbol{\Psi}$는 $n \times n$ 행렬이고 $\mathbf{Y}$는 $(n+1)\times(n+1)$ 행렬이

다.

계수행렬 $\mathbf{A}^{\#}$의 앞뒤에 $\mathbf{Y}^T$와 $\mathbf{Y}$를 곱해 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}^T\mathbf{A}^{\#}\mathbf{Y} &= \begin{bmatrix}\Psi & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}^T \left[\begin{array}{c:c}\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K} & (2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j \\ \hdashline \mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C}) & \mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j\end{array}\right]\begin{bmatrix}\Psi & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c:c}\Psi^T(\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K})\Psi & \Psi^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j \\ \hdashline \mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\Psi & \mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j\end{array}\right]\end{aligned} \tag{2-30}$$

여기서 $\Psi^T(\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K})\Psi$ 의 마지막 행과 열은 $\mathbf{0}$ 이다. 왜냐하면 Ψ 의 마지막 열이 시스템의 고유벡터 $\mathbf{u}_j$ 이기 때문이다. 따라서 행렬 $\Psi^T(\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K})\Psi$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Psi^T(\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K})\Psi = \begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 0\end{bmatrix} \tag{2-31}$$

여기서 $\Psi^T(\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K})\Psi$ 은 $n\times n$ 행렬이고 λ_j 가 서로 다른 고유치란 조건에 의해 이 행렬은 $n-1$ 의 랭크(rank)를 가지게 된다. 따라서 $(n-1)\times(n-1)$ 의 차수를 가지는 행렬 $\tilde{\mathbf{A}}$ 는 정칙 행렬(non-singular matrix)가 된다. 즉 $\det(\tilde{\mathbf{A}})\neq 0$ 이다.

그리고 정규화 조건에 의해 식 (2-30)의 $\Psi^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j$ 와 $\mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\Psi$ 의 마지막 행과 열은 1 이 된다.

$$\Psi^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j = \begin{Bmatrix}\tilde{\mathbf{b}}\\ 1\end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\Psi = \begin{Bmatrix}\tilde{\mathbf{b}}^T & 1\end{Bmatrix} \tag{2-32}$$

여기서 $\tilde{\mathbf{b}}$ 은 영행렬이 아니다. 따라서 식 (2-30)는 다음과 같이 정리 된다.

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{A}^{\#}\mathbf{Y} = \left[\begin{array}{c:cc}\tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}} \\ \hdashline \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \tilde{\mathbf{b}}^T & 1 & \mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j\end{array}\right] \tag{2-33}$$

이 행렬의 determinant 를 구하기 위해 다음의 분할된 행렬의 determinant 성질을 이용한다.

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}\right) = \det \mathbf{A} \times \det(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) \tag{2-34}$$

이를 이용해 식 (2-33)의 determinant 를 구하면 다음과 같이 된다.

$$\det(\mathbf{Y}^T \mathbf{A}^{\#} \mathbf{Y}) = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mathbf{u}_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j \end{bmatrix} \det\left(\tilde{\mathbf{A}} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mathbf{u}_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{b}}^T \end{bmatrix}\right) \tag{2-35}$$

여기서 $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mathbf{u}_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{b}}^T \end{bmatrix} = 0$, 그리고 $\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mathbf{u}_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j \end{bmatrix} = -1$ 이므로 위 식은 다음과 같이 간략화 되고,

$$\det(\mathbf{Y}^T \mathbf{A}^{\#} \mathbf{Y}) = -\det(\tilde{\mathbf{A}}) \neq 0 \tag{2-36}$$

$\det(\mathbf{A}^{\#}) \neq 0$, 즉 $\mathbf{A}^{\#}$ 는 정칙 행렬임이 증명 되었다.

2.4. 수치 예제

제안 방법의 효율성과 적용성을 검증하기 위하여 수치 예제를 수행 하였다. 비비례 감쇠 시스템의 예제로서 집중 감쇠기가 설치된 외팔 보(cantilever beam)를 선정하였다.

우선 고유치 해석을 통해 시스템의 고유진동수와 모드를 구했으며 제안 방법을 이용해 고유진동수와 모드의 미분과 그의 2 차 미분을 구했다. 그리고 기존의 방법과의 계산 시간 비교를 통해 제안 방법의 우수성을 검증하였다.

비감쇠 시스템과 달리 감쇠 시스템의 고유쌍 민감도에 대한 연구는 그리 많지 않다. 모드 법 중에서 가장 대표적인 Zeng[13]의 방법과 본 연구의 기본이 되는 Lee et al.[15]의 방법을 비교 대상 방법으로 정하였고, 비감쇠 시스템의 민감도 기법 중 가장 효율적인 방법으로 알려진 Nelson[2]의 방법을 운동방정식의 상태 공간 형식을 이용해 감쇠 시스템으로 적용해 비교 하였다. 물론 감쇠 시스템에 적용함에 있어 비감쇠 시스템의 Nelson[2]방법의 식을 그대로 사용하기 때문에 '*2N-space*'에 근거한 해석이 되는 단점이 존재한다. 이에 본 연구에서 '*N-space*'에 근거해 감쇠 시스템의 고유쌍 민감도를 풀 수 있는 방법을 제안한다.

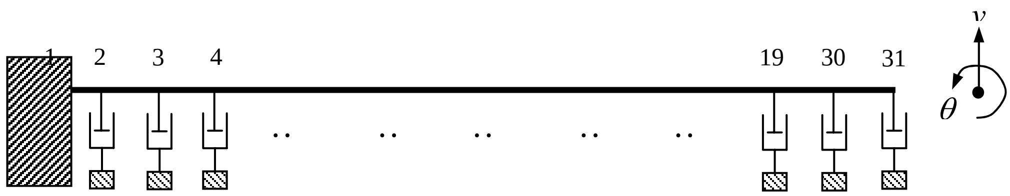
감쇠 시스템의 2 차 민감도에 대한 연구도 정확히 비교될 만한 방법은 아직 없다. 역시 비감쇠 시스템의 경우에 개발된 2 차 민감도 식을 상태 공간 방정식을 이용해 감쇠 시스템에 적용하는 경우인데 본 연구와 가장 비교 될 만한 방법은 Nelson[2] 방법을 2 차 민감도 까지 확장한 Friswell[19]의 방법이다.

2.4.1 집중 감쇠기가 설치된 외팔 보

서로 다른 고유치를 가지는 감쇠 시스템의 예제로 그림 2.1 과 같이 집중 감쇠기가 설치된 외팔 보를 선정하였다. 집중 감쇠기로 인해 비비례 시스템이 된다.

30 개의 요소로 구성된 FEM 모델이며 31 개의 절점으로 이루어져 있다. 절점당 2 개의 자유도(수직 변위 v, 회전 변위 θ)를 가진다. 감쇠 행렬은 $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M}$ 와 같이 시스템 자체의 Rayleigh damping 을 고려하고 추가로 집중 감쇠를 고려 하였다. 설계 변수는 보의 두께(h)로서, 이 시스템의 경우 고유쌍의 민감도는 보의 두께(h)가 변함에 따른 보의 고유진동수와 고유모드의 변화율을 의미한다.

해석에 사용한 컴퓨터는 RAM 64Mega, CPU capacity 266Hz 를 가지는 펜티엄 컴퓨터이다.



System Data
Number of nodes: 31
Number of elements: 30
Number of DOF: 60

Design parameter: thickness of beam

Material Properties
Young's Modulus E: 1000
Mass density ρ: 1
Tangential damper c: 0.3
Cross sectional area A: 1
Cross sectional inertia I: 1

그림 2.1 두께를 설계 변수로 가지는 외팔 보 구조물 예제

시스템의 고유치 해석과 제안 방법에 의한 민감도 해석 결과 일부를 표 2.1 과 표 2.2 에 나타내었다. 표 2.1 은 시스템의 고유치와 그의 미분값을 나타냈으며, 표 2.2 는 시스템의 첫번째 고유벡터와 그의 미분값을 나타내었다.

제안 방법의 효율성은 계산 시간 비교를 통해 확인 하였으며 특히 모드 법 중 가장 효율적인 방법으로 알려진 Zeng[13]의 방법과 Nelson[2]방법을 감쇠 시스템에 적용한 것, 본 방법의 모태가 된 Lee et al.방법[15]과 비교 하였다. 결과를 그림 2.2 를 통해 나타내었다. 그림 2.2.b 은 Zeng[13]의 방법을 제외한 나머지 부분을 확장한 그림이다.

감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 2 차 미분을 위해 발표된 방법은 아직 없다. 하지만 비감쇠 시스템의 경우에는 존재하는데 그 중 가장 비교가 될 만한 Friswell[19]의 방법과 제안 방법을 비교 하였다. 결과는 그림 2.3 를 통해 나타내었다.

표 2.1 에서 보다시피 감쇠 시스템의 고유치는 켤레복소수 형태로 나타난다. 제안 방법의 계수행렬이 대칭 이므로 고유치의 미분도 켤레 복소수 행태를 나타낸다.

그림 2.2~2.3 를 보자. 제안 방법은 CPU time 에 있어 기존의 민감도 방법보다 훨씬 우수함을 볼 수 있다. 60 개의 고유진동수와 모드의 미분을 구하기 위해 걸린 CPU time(sec)은 Zeng 의 방법의 경우 251.4 초, Nelson 방법은 9.66 초, Lee et al.의 방법은 2.08 초 그리고 제안 방법에 의해선 1.72 초 걸렸다. Zeng 의 방법은 모드 법 중에서 가장 개선된 방법이기는 하나, 모드 법이라는 단점으로 비감쇠 시스템을 위해 개발된 Nelson 의 방법보다도 효율성이 떨어진다. 이 예제의 경우 제안 방법은 기존 Lee et al.의 방법에 비해 약 17.3% 개선 효과를 보이며, Nelson 방법에 비해선 약 82% 계산 속도가 빠르다. 다른 방법과 비교해서 Zeng 의 방법은 계산 시간에 있어 매우 비 효율적임을 보인다.

2 차 민감도에 있어서도 제안 방법은 Frisewell 의 방법보다 효율적임을 알 수 있다. 60 개의 고유진동수와 모드의 2 차 미분을 구하기 위해 Friswell 방법의 경우 14.17 초, 제안 방법의 겨우 2.91 초 걸렸다. CPU time 에 있어 제안 방법은 Frisewell 의 방법에 비해 약 80% 향상되었다. 물론 제안 방법에 의한 결과는 근사값이 아닌 정확해 이며 수치적으로도 안정한 값이다.

표 2.1 시스템의 고유진동수와 고유진동수의 1, 2 차 민감도

Mode Number	Eigenvalues	First Derivatives	Second Derivatives
1	-2.3427e-03 -1.0868e+00i	6.6237e-04 -2.9972e-01i	-3.9638e-04 +1.1647e-02i
2	-2.3427e-03 +1.0868e+00i	6.6231e-04 +2.9972e-01i	-3.9635e-04 -1.1647e-02i
3	-1.4162e-02 -6.0514e+00i	4.5231e-03 -1.3173e+00i	-3.0123e-03 +2.7938e-01i
4	-1.4162e-02 +6.0514e+00i	4.5266e-03 +1.3173e+00i	-3.0138e-03 -2.7938e-01i
5	-3.1855e-02 -1.4703e+01i	8.2032e-03 -2.4536e+00i	-7.5447e-03 +8.4295e-01i
6	-3.1855e-02 +1.4703e+01i	8.2040e-03 +2.4536e+00i	-7.5429e-03 -8.4295e-01i
7	-5.8513e-02 -2.4733e+01i	1.0219e-02 -3.1193e+00i	-1.2168e-02 +1.4016e+00i
8	-5.8513e-02 +2.4733e+01i	1.0245e-02 +3.1193e+00i	-1.2185e-02 -1.4016e+00i
9	-9.5243e-02 -3.5359e+01i	1.0631e-02 -3.4198e+00i	-1.5130e-02 +1.8168e+00i
10	-9.5243e-02 +3.5359e+01i	1.0656e-02 +3.4198e+00i	-1.5161e-02 -1.8168e+00i

표 2.2 시스템의 첫번째 고유모드와 고유모드의 1, 2 차 민감도

DOF Number	Eigenvector	First Derivative	Second Derivative
1	-5.6474e-04 -5.6364e-04i	1.7040e-04 +1.6942e-04i	-9.6908e-05 -9.5764e-05i
2	-3.3629e-03 -3.3565e-03i	1.0142e-03 +1.0085e-03i	-5.7681e-04 -5.7018e-04i
3	-2.2249e-03 -2.2208e-03i	6.7061e-04 +6.6697e-04i	-3.8145e-04 -3.7721e-04i
4	-6.5726e-03 -6.5612e-03i	1.9789e-03 +1.9688e-03i	-1.1259e-03 -1.1141e-03i
5	-4.9294e-03 -4.9209e-03i	1.4842e-03 +1.4766e-03i	-8.4445e-04 -8.3556e-04i
⋮	⋮	⋮	⋮
57	-2.8334e-01 -2.8342e-01i	8.3339e-02 +8.3414e-02i	-4.7665e-02 -4.7756e-02i
58	-4.1107e-02 -4.1162e-02i	1.1937e-02 +1.1988e-02i	-6.8476e-03 -6.9073e-03i
59	-2.9705e-01 -2.9714e-01i	8.7318e-02 +8.7410e-02i	-4.9948e-02 -5.0059e-02i
60	-4.1111e-02 -4.1167e-02i	1.1937e-02 +1.1988e-02i	-6.8475e-03 -6.9079e-03i

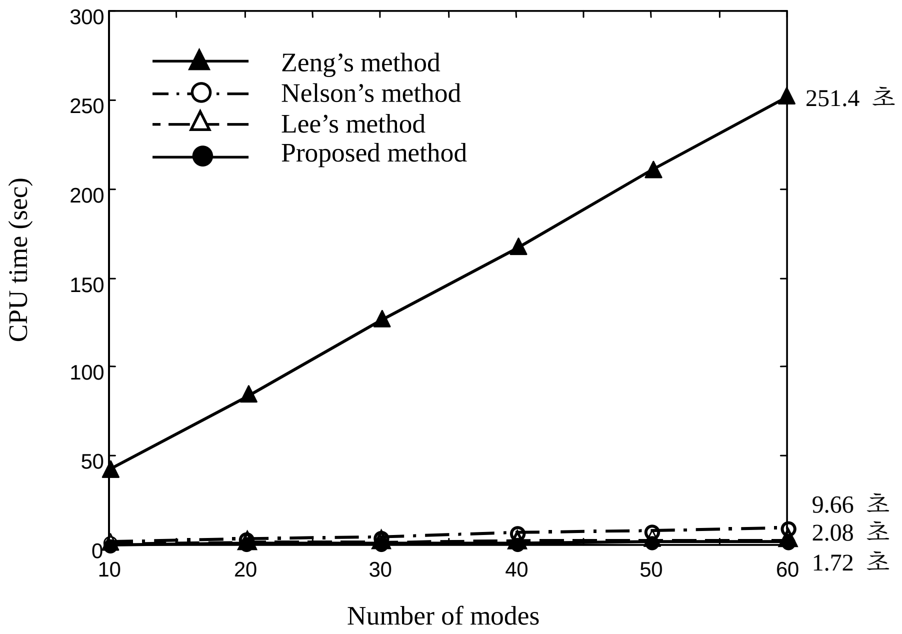


그림 2.2.a 기존 방법과의 CPU time 비교

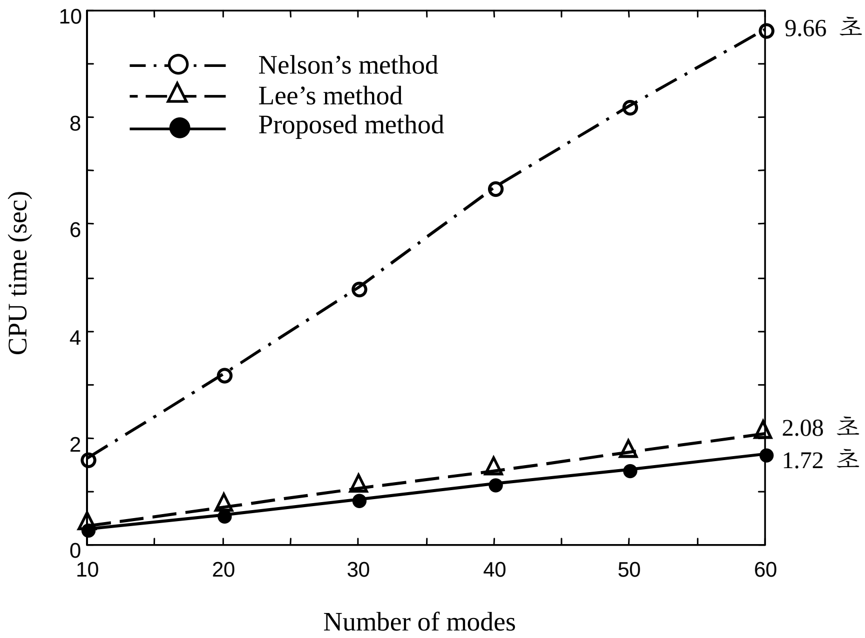


그림 2.2.b 기존 방법과의 CPU time 비교 (Zeng's method 제외한 나머지 방법)

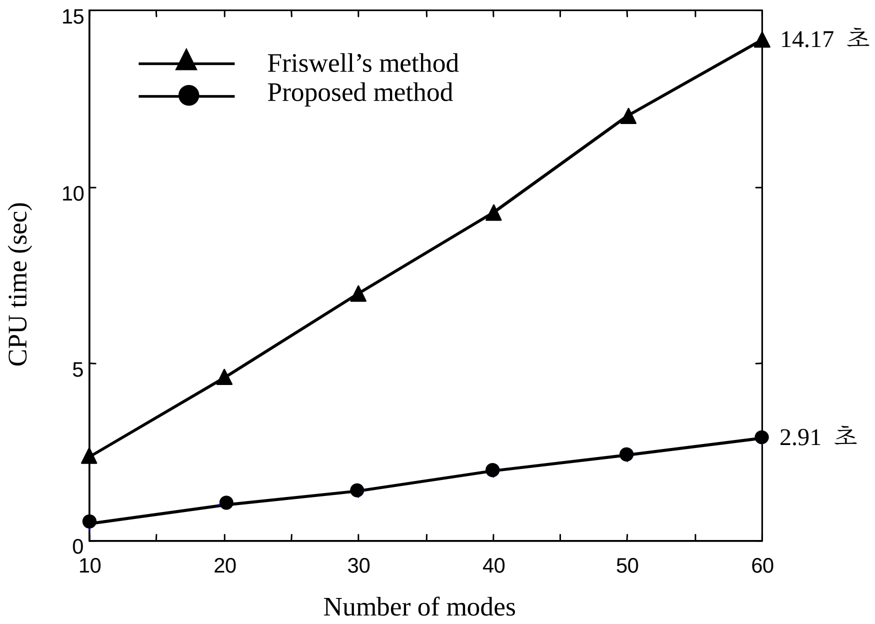


그림 2.3. 기존 방법과의 CPU time 비교 (2 차 민감도)

제 3 장 비대칭 시스템의 고유진동수와 모드의 민감도

3.1 이론적 배경

대부분의 구조물은 시스템의 질량, 감쇠, 강성 행렬이 대칭(symmetric)이다. 하지만 특수한 경우의 구조물은 비대칭(asymmetric)인 시스템 행렬을 가지게 되는데, 이러한 시스템의 경우 기존의 민감도 기법으로는 고유진동수 및 모드의 미분을 구할 수 없다. 비대칭 시스템의 경우 왜 이런 현상이 발생 하는지 살펴보도록 하자.

비대칭 감쇠 시스템의 일반화된 고유치 문제는 대칭 시스템의 경우와 같다.

$$\left(\lambda_j^2\mathbf{M} + \lambda_j\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\mathbf{u}_j = \mathbf{0} \tag{3-1}$$

단 시스템의 질량행렬 $\mathbf{M}$, 감쇠행렬 $\mathbf{C}$, 강성행렬 $\mathbf{K}$ 이 **비대칭**(asymmetric)이라는 점이 달라진다. 즉 $\mathbf{M}^T \neq \mathbf{M}$, $\mathbf{C}^T \neq \mathbf{C}$, $\mathbf{K}^T \neq \mathbf{K}$ 이다.

식 (3-1)을 설계 변수에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\mathbf{u}_{j,\alpha} = -\left(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C}\right)\mathbf{u}_j\lambda_{j,\alpha} - \left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}_{,\alpha}+\lambda_j\mathbf{C}_{,\alpha}+\mathbf{K}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_j \tag{3-2}$$

여기까지는 대칭 시스템의 방법과 같다. 고유진동수의 미분 $\lambda_{j,\alpha}$ 를 구하기 위해 양변에 $\mathbf{u}_j^T$ 를 곱해 보자. 이때 좌변은 스칼라(scalar)가 되기 때문에 전치(transpose)시킬 수 있다. 하지만 $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ 가 비대칭 이기 때문에 다음과 같이 우변이 소거되지 못한다.

$$\left[\mathbf{u}_j^T\left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\mathbf{u}_{j,\alpha}\right]^T = \mathbf{u}_{j,\alpha}^T\left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}^T+\lambda_j\mathbf{C}^T+\mathbf{K}^T\right)\mathbf{u}_j \neq 0 \tag{3-3}$$

따라서 두개의 미지수 $\lambda_{j,\alpha}$, $\mathbf{u}_{j,\alpha}$ 에 대해 하나의 방정식만 존재하므로 둘 중 어느 것도 구할 수 없게 된다. 이에 비대칭 감쇠 시스템의 고유쌍 민감도 문제가 발생 하게 됐으며 이에 대한 연구가 필요하게 되었다.

3.2 기존 민감도 기법

3.2.1 Brandon 의 방법[18]

비대칭 감쇠시스템의 고유진동수와 모드의 민감도를 위한 방법은 아직 개발되지 못했다. 비감쇠 시스템의 경우는 몇몇 방법이 있는데 가장 대표적인 방법이 Brandon[18]의 방법이다. 이 방법은 기본적으로 모드 법에 근거한 방법이다. 시스템 행렬의 비대칭 특성을 시스템의 왼쪽 고유벡터를 도입함으로서 해결한 방법이다. 이 방법에서 고유진동수 및 모드의 민감도는 다음과 같다.

$$\lambda_{j,\alpha} = \frac{-\mathbf{v}_j^T\left(\mathbf{A}_{,\alpha} + \lambda_j \mathbf{B}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_j}{\mathbf{v}_j^T \mathbf{B}\,\mathbf{u}_j} \tag{3-4}$$

$$\mathbf{u}_{j,\alpha} = \sum_{i=1, i\neq j}^{n} a_{ij}\mathbf{u}_i \tag{3-5}$$

여기서 $a_{ij} = \dfrac{-\mathbf{v}_i^T\left(\mathbf{A}_{,\alpha} + \lambda_j \mathbf{B}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_j}{\left(\lambda_j - \lambda_i\right)\mathbf{v}_i^T \mathbf{B}\,\mathbf{u}_i}$ 이고, $\mathbf{v}_j$ 와 $\mathbf{u}_j$ 는 다음을 만족한다.

$$\left(\mathbf{A} + \lambda_j \mathbf{B}\right)\mathbf{u}_j = 0, \tag{3-6}$$

$$\mathbf{v}_j^T\left(\mathbf{A} + \lambda_j \mathbf{B}\right) = 0. \tag{3-7}$$

이 방법이 감쇠 시스템에 적용되기 위해선 상태공간방정식(*2N-space*)이 도입되어야 하므로 그에 따른 단점이 존재한다.

3.2.2 Brandon 의 방법(2 차 민감도)[18]

같은 논문에서 Brandon 은 비대칭 비감쇠 시스템의 고유쌍 2 차 민감도를 구할 수 있는 식을 제안했다. 1 차 민감도 식의 확장된 방법이다.

$$\lambda_{j,\alpha\alpha} = -2\frac{\lambda_{j,\alpha}\mathbf{v}_j{}^T\mathbf{B}_{,\alpha}\mathbf{u}_j + \mathbf{v}_j{}^T\left(\mathbf{A}_{,\alpha} + \lambda_j\mathbf{B}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_{j,\alpha}}{\mathbf{v}_j{}^T\mathbf{B}\,\mathbf{u}_j} \tag{3-8}$$

$$\mathbf{u}_{j,\alpha\alpha} = \sum_{i=1, i\neq j}^{n} b_{ij}\mathbf{u}_i \tag{3-9}$$

여기서

$b_{ij} = -2\dfrac{\lambda_{j,\alpha}\mathbf{v}_i{}^T\mathbf{B}_{,\alpha}\mathbf{u}_j + \mathbf{v}_i{}^T\left(\mathbf{A}_{,\alpha} + \lambda_j\mathbf{B}_{,\alpha} + \lambda_{j,\alpha}\mathbf{B}\right)\mathbf{u}_{j,\alpha}}{\left(\lambda_j - \lambda_i\right)\mathbf{v}_i{}^T\mathbf{B}\,\mathbf{u}_i}$ 이다.

마찬가지로 감쇠 시스템에 적용하기 위해선 상태공간방정식을 도입해야 하는 단점을 지닌다.

3.3 제안 방법

3.3.1 제안 방법의 알고리즘

비대칭 감쇠시스템의 고유진동수와 모드의 민감도를 구하기 위한 본 방법은 2 장에서 대칭 감쇠시스템의 경우 제안했던 식을 발전 시킨 것이다. 기존 Lee et al.[15]방법은 고유진동수의 미분을 전통적인 방법으로 고유 모드의 미분과 분리해서 구했는데 이 경우 비대칭 시스템의 문제는 해결 할 수가 없었다. 하지만 고유진동수와 고유모드의 미분을 하나의 선형대수방정식으로 동시에 구할 경우 비대칭 문제를 해결 할 수 있다. 그 알고리즘을 유도해 보자.

사용되는 고유치 문제와 정규화 조건은 대칭 시스템의 경우와 같다. 고유치 문제의 미분 식 (2-20)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\mathbf{u}_{j,\alpha}+\left(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C}\right)\mathbf{u}_j\lambda_{j,\alpha}=-\left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}_{,\alpha}+\lambda_j\mathbf{C}_{,\alpha}+\mathbf{K}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_j \qquad (3\text{-}10)$$

비정칙성 문제를 해결하기 위한 부가조건으로 정규화 조건 식 (2-21)의 미분을 사용하는데 여기서 대칭 시스템의 경우와 다른점이 나타난다. 즉 시스템 행렬 $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$가 비대칭 이므로 식 (2-21)을 설계 변수에 대해 미분하면 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+2\lambda_j\mathbf{M}^T+\mathbf{C}+\mathbf{C}^T)\mathbf{u}_{j,\alpha}+2\mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j\lambda_{j,\alpha}=-\mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}_{,\alpha}+\mathbf{C}_{,\alpha})\mathbf{u}_j \qquad (3\text{-}11)$$

위의 식 (3-10)과 (3-11)를 하나의 선형대수방정식 형태로 합치면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K} & (2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+2\lambda_j\mathbf{M}^T+\mathbf{C}+\mathbf{C}^T) & 2\mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_{j,\alpha} \\ \lambda_{j,\alpha}\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}(\lambda_j^2\mathbf{M}_{,\alpha}+\lambda_j\mathbf{C}_{,\alpha}+\mathbf{K}_{,\alpha})\mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}_{,\alpha}+\mathbf{C}_{,\alpha})\mathbf{u}_j\end{Bmatrix} \qquad (3\text{-}12)$$

이 식에 비대칭 감쇠시스템의 고유진동수와 모드의 민감도를 구하기 위한 제안식이다.

3.3.2 2 차 미분으로의 확장

감쇠 시스템과 마찬가지로 비감쇠 시스템의 경우의 제안 방법도 고유진동수와 모드의 2 차 미분을 구할 수 있는 식으로 확장 가능하다. 유도과정은 감쇠 시스템의 방식과 비슷하다.

고유치 문제를 설계 변수 (α)에 대해 미분한 식은 식 (3-10)이며 이를 또 다른 설계변수 (β)에 대해 미분하면 다음과 같고, 이는 식 (2-24)와 같은 식이다.

$$(\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K})\mathbf{u}_{j,\alpha\beta}+(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j\lambda_{j,\alpha\beta}=-\Big[(\tilde{\mathbf{F}}_{j,\beta}+\mathbf{G}_j\lambda_{j,\beta})\mathbf{u}_{j,\alpha} + (\tilde{\mathbf{F}}_{j,\alpha}+\mathbf{G}_j\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\beta}+\Big\{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{j,\alpha\beta}+(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}+\mathbf{M}\lambda_{j,\alpha})\lambda_{j,\beta}+(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}+\mathbf{M}\lambda_{j,\beta})\lambda_{j,\alpha}\Big\}\mathbf{u}_j\Big] \quad (3\text{-}13)$$

마찬가지로 부가조건으로 정규화 조건의 미분을 사용한다. 정규화 조건을 설계변수 (α)에 대해 미분한 식은 식 (3-11)이며 이를 설계변수 (β)에 대해 다시 한번 미분하면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+2\lambda_j\mathbf{M}^T+\mathbf{C}+\mathbf{C}^T)\mathbf{u}_{j,\alpha\beta}+(2\mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j)\lambda_{j,\alpha\beta}=-\Big[\mathbf{u}_{j,\alpha}^T(\mathbf{G}_j+\mathbf{G}_j^T)\mathbf{u}_{j,\beta} + \mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha\beta}+2\mathbf{M}_{,\alpha}\lambda_{j,\beta}+2\mathbf{M}_{,\beta}\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_j+\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}+\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}^T+2\mathbf{M}\lambda_{j,\beta}+2\mathbf{M}^T\lambda_{j,\beta})\mathbf{u}_{j,\alpha} + \mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}+\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}^T+2\mathbf{M}\lambda_{j,\alpha}+2\mathbf{M}^T\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\beta}\Big] \quad (3\text{-}14)$$

식 (3-13)과 식 (3-14)을 하나의 선형대수방정식으로 합치면 다음과 같고,

$$\begin{bmatrix} \lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K} & (2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+2\lambda_j\mathbf{M}^T+\mathbf{C}+\mathbf{C}^T) & 2\mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_{j,\alpha\beta} \\ \lambda_{j,\alpha\beta}\end{Bmatrix}$$

$$=-\begin{Bmatrix} \Big[(\tilde{\mathbf{F}}_{j,\beta}+\mathbf{G}_j\lambda_{j,\beta})\mathbf{u}_{j,\alpha}+(\tilde{\mathbf{F}}_{j,\alpha}+\mathbf{G}_j\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\beta}+\{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{j,\alpha\beta}+\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}\lambda_{j,\beta}+\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}\lambda_{j,\alpha}\}\mathbf{u}_j+2\lambda_{j,\alpha}\lambda_{j,\beta}\mathbf{M}\mathbf{u}_j\Big] \\ \Big[\mathbf{u}_{j,\alpha}^T(\mathbf{G}_j+\mathbf{G}_j^T)\mathbf{u}_{j,\beta}+\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}+\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}^T+2\mathbf{M}\lambda_{j,\beta}+2\mathbf{M}^T\lambda_{j,\beta})\mathbf{u}_{j,\alpha} + \mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}+\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}^T+2\mathbf{M}\lambda_{j,\alpha}+2\mathbf{M}^T\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\beta}+\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha\beta}+2\mathbf{M}_{,\alpha}\lambda_{j,\beta}+2\mathbf{M}_{,\beta}\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_j\Big] \end{Bmatrix} \quad (3\text{-}15)$$

이 식이 비대칭 감쇠시스템의 고유진동수와 모드의 2 차 미분을 구하는 식이다. 마찬가지로 비대칭의 경우도 3차, 4차 등 고차 미분으로 적용이 가능하다.

하나의 설계 변수에 대한 2 차 미분을 구하는 경우 ($\alpha = \beta$), 제안식 (3-15)은 다음과 같이 좀더 간단해 진다.

$$\begin{bmatrix} \lambda_j^2\mathbf{M} + \lambda_j\mathbf{C} + \mathbf{K} & (2\lambda_j\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M} + 2\lambda_j\mathbf{M}^T + \mathbf{C} + \mathbf{C}^T) & 2\mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{j,\alpha\alpha} \\ \lambda_{j,\alpha\alpha} \end{Bmatrix}$$
$$= -\begin{Bmatrix} \left[2(\tilde{\mathbf{F}}_{j,\alpha} + \mathbf{G}_j\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\alpha} + (\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{j,\alpha\alpha} + 2\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha} + 2\mathbf{M}\lambda_{j,\alpha}^2)\mathbf{u}_j \right] \\ \left[2\mathbf{u}_{j,\alpha}^T\mathbf{G}_j\mathbf{u}_{j,\alpha} + \mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha\alpha} + 4\mathbf{M}_{,\alpha}\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_j \right. \\ \left. + 2\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha} + \tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}^T + 2\mathbf{M}\lambda_{j,\alpha} + 2\mathbf{M}^T\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\alpha} \right] \end{Bmatrix} \qquad (3\text{-}16)$$

3.3.3 수치적 안정성 증명

대칭 시스템과 비슷한 방법으로 증명이 된다. 제안 식 (3-12)와 (3-15)의 계수행렬 $\mathbf{A}^*$의 정칙성 증명으로 수치적 안정성이 보장된다. $\mathbf{A}^*$는 대칭시스템의 제안식의 계수행렬 $\mathbf{A}^\#$와 약간 다른 형태를 띄는데 이에 증명 과정에 사용되는 변수도 약간씩 달라진다. 계수행렬 $\mathbf{A}^*$이 정칙 행렬임을 증명하기 위하여 다음의 성질을 이용한다.

$$\det(\mathbf{X}^T\mathbf{A}^*\mathbf{Y}) = \det(\mathbf{X}^T)\det(\mathbf{A}^*)\det(\mathbf{Y}) \qquad (3\text{-}17)$$

$\det(\mathbf{A}^*) \neq 0$를 증명하기 위해 임의의 정칙행렬 $\mathbf{X}$와 $\mathbf{Y}$를 다음과 같이 정한다.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \Psi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}18)$$

여기서 $\Gamma = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \cdots \ \varphi_{n-1} \ \mathbf{v}_j]$, $\Psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \cdots \ \psi_{n-1} \ \mathbf{u}_j]$이고 $\mathbf{v}_j$는 시스템의 j 번째 왼쪽 고유벡터, $\mathbf{u}_j$는 시스템의 j 번째 오른쪽 고유벡터 이다. 즉 $\mathbf{v}_j$와 $\mathbf{u}_j$는 다음을 만족하는 모드이다.

$$(\lambda_j{}^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K})\mathbf{u}_j=0,\qquad \mathbf{v}_j^{\mathrm{T}}(\lambda_j{}^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K})=0 \tag{3-19}$$

그리고 φ_k 와 ψ_k 는 각각 $\mathbf{v}_j$ 와 $\mathbf{u}_j$ 에 서로 독립인 임의의 벡터들이다.

계수행렬 $\mathbf{A}^*$ 의 앞뒤에 $\mathbf{X}^T$ 와 $\mathbf{Y}$ 를 곱해 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^*\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K} & (2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j\\ \mathbf{u}_j{}^T(2\lambda_j\mathbf{M}+2\lambda_j\mathbf{M}^{\mathrm{T}}+\mathbf{C}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}) & 2\mathbf{u}_j{}^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{\Psi} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3-20}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}(\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K})\mathbf{\Psi} & \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\,\mathbf{u}_j\\ \mathbf{u}_j{}^T(\,2\lambda_j\mathbf{M}+2\lambda_j\mathbf{M}^{\mathrm{T}}+\mathbf{C}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}})\mathbf{\Psi} & 2\mathbf{u}_j{}^T\mathbf{M}\,\mathbf{u}_j\end{bmatrix}$$

여기서 $\Gamma^T(\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K})\Psi$ 을 정리하면 마지막 행과 열이 $\mathbf{0}$ 이 되는데 이는 Γ 와 Ψ 의 마지막 열이 시스템의 고유벡터 $\mathbf{v}_j$ 와 $\mathbf{u}_j$ 이기 때문이다.

$$\Gamma^T(\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K})\Psi=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 0\end{bmatrix} \tag{3-21}$$

그리고 위 식에서 λ_j 는 시스템의 서로 다른 고유치(distinct eigenvalue)이므로 $(n-1)\times(n-1)$ 차수를 가지는 $\tilde{\mathbf{B}}$ 는 정칙행렬이 된다. 즉 $\det(\tilde{\mathbf{B}})\neq 0$ 이다.

정규화 조건에 의해 식 (3-12)의 $\mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+2\lambda_j\mathbf{M}^T+\mathbf{C}+\mathbf{C}^T)\Psi$ 의 마지막 열은 2 가 되고,

$$\mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+2\lambda_j\mathbf{M}^T+\mathbf{C}+\mathbf{C}^T)\Psi=\{\tilde{\mathbf{d}}^T\quad 2\} \tag{3-22}$$

$\Gamma^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j$ 은 다음과 같이 된다.

$$\Gamma(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j=\begin{Bmatrix}\tilde{\mathbf{c}}\\ c\end{Bmatrix} \tag{3-23}$$

여기서 $\tilde{\mathbf{d}}$ 와 $\tilde{\mathbf{c}}$ 는 영행렬이 아니며 $c=\mathbf{v}_j^T\mathbf{G}_j\mathbf{u}_j$ 이다. 따라서 식 (3-20)는 다음과 같이 정리 될 수 있다.

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{*}\mathbf{Y}=\left[\begin{array}{c:cc}\tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{c}} \\ \hdashline \mathbf{0} & 0 & c \\ \tilde{\mathbf{d}}^{\mathrm{T}} & 2 & 2\mathbf{u}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}_j\end{array}\right] \tag{3-24}$$

분할된 행렬의 determinant 성질을 이용해 식 (3-24)의 determinant 를 구해보면 다음과 같이 간략화 되고,

$$\det(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{*}\mathbf{Y})=\det(\tilde{\mathbf{B}})\times\det\left(\begin{bmatrix}0 & c \\ 2 & 2\mathbf{u}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}_j\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{d}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\left[\tilde{\mathbf{B}}\right]^{-1}\left[\mathbf{0} \quad \tilde{\mathbf{c}}\right]\right) \tag{3-25}$$
$$=-2b\det(\tilde{\mathbf{A}}) \neq 0$$

$\det(\mathbf{A}^{*})\neq 0$, 즉 $\mathbf{A}^{*}$ 는 정칙 행렬임이 증명 되었다.

3.4. 수치 예제

비대칭 감쇠 시스템의 경우 제안 방법의 효율성과 적용성을 검증하기 위하여 수치 예제를 수행 하였다. 일종의 자이로스코픽 시스템으로 감쇠, 강성행령에 비대칭 현상이 나타나는 예제이다.

고유치 해석을 통해 시스템의 고유진동수와 고유 모드를 구했으며 제안 방법을 이용해 비대칭 감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 미분과 그 2 차 미분을 구하였다.

비대칭 시스템의 경우 대칭 시스템과 마찬가지로 감쇠 시스템의 고유쌍 민감도를 구하기 위한 방법은 아직 발표된 것이 없다. 비감쇠 시스템의 방법은 몇몇 존재 하는데 이를 상태공간방정식을 이용해 감쇠 시스템으로 확장하는 것이 현재까지 비대칭 시스템의 고유쌍 민감도를 구하는 방법이다. 물론 이 경우 ‘*2N-space*’에서 문제를 풀기 때문에 그에 따른 단점이 있다. 이에 본 연구에서 ‘*N-space*’에 근거해 비대칭 감쇠 시스템의 고유쌍 민감도를 풀 수 있는 방법을 제안한다.

비감쇠 시스템의 경우 기존 방법 중 Brandon[20]의 방법이 제안 방법과 가장 비교할 만하며 이 방법은 2 차 미분도 구할 수 있는 방법이다.

3.4.1 회전 보[21] (The whirling beam)

서로 다른 고유치를 가지는 비대칭 감쇠 시스템의 예제로 그림 3.1 과 같이 회전하는 빔을 선정하였다. 빔의 양 지지단은 횡 방향 움직임은 고정되어 있고 축 방향 움직임은 허용한다. 불확정적으로 가지고 있는 빔의 편심에 의해 빔은 회전 속도에 따라 휨의 정도가 달라지게 되며 이는 움직이는 양 지지단이 허락하게 된다. 빔은 이러한 휨에 대한 복원력을 가지고 있는데 이는 회전 빔의 자이로스코픽 성질에 의해 특별한 현상을 가지게 되며, 이는 강성행렬의 비대칭 특성으로 나타난다. 마찬가지로 회전축에 대한 상대 속도에 비례하는 내부 소산특성도 감쇠 행렬의 비대칭으로 나타난다.

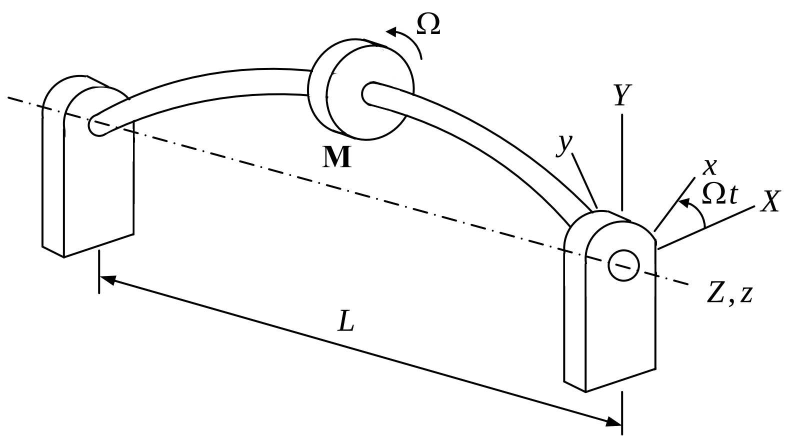


그림 3.1 길이(L)를 설계 변수로 가지는 회전 보 예제 (gyroscopic system)

이와 같은 자이로스코픽 시스템의 운동방정식은 다음과 같이 나타난다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)+(\mathbf{C}+\mathbf{G})\dot{\mathbf{u}}(t)+(\mathbf{K}+\mathbf{H})\mathbf{u}(t)=\mathbf{F}(t) \tag{3-26}$$

여기서 **M, C, K, F** 는 우리가 알고 있는 시스템의 질량, 감쇠, 강성, 하중 행렬이

며 **G, H** 가 시스템 행렬을 비대칭으로 만드는 gyroscopic matrix, circulatory matrix 이다. 이 예제의 경우 각각의 계수행렬은 다음과 같으며,

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{M_{11}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M_{22}}\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{C_{11}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C_{22}}\end{bmatrix},\quad \mathbf{G}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{G_{12}}\\ -\mathbf{G_{12}} & \mathbf{0}\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K_{11}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K_{22}}\end{bmatrix},\quad \mathbf{H}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{H_{12}}\\ -\mathbf{H_{12}} & \mathbf{0}\end{bmatrix}, \qquad (3\text{-}27)$$

각 부분 행렬은 다음으로 주어진다.

$$[\mathbf{M}_{11}]_{ij}=[\mathbf{M}_{22}]_{ij}=m_0L\delta_{ij}+2\mathbf{M}\sin(i\pi/2)\sin(j\pi/2),$$

$$[\mathbf{G}_{12}]_{ij}=-2\Omega[\mathbf{M}_{11}]_{ij},$$

$$[\mathbf{C}_{11}]_{ij}=[\mathbf{C}_{22}]_{ij}=(c+h)L\delta_{ij},$$

$$[\mathbf{K}_{11}]_{ij}=2(\mathbf{K}_1+\mathbf{K}_2\cos(i\pi)\cos(j\pi))(i\pi/L)(j\pi/L)$$
$$+\mathbf{EI_x}(i\pi/L)^2(j\pi/L)^2L\delta_{ij}-\Omega^2[\mathbf{M}_{11}]_{ij},$$

$$[\mathbf{K}_{22}]_{ij}=2(\mathbf{K}_1+\mathbf{K}_2\cos(i\pi)\cos(j\pi))(i\pi/L)(j\pi/L)$$
$$+\mathbf{EI}_y(i\pi/L)^2(j\pi/L)^2L\delta_{ij}-\Omega^2[\mathbf{M}_{22}]_{ij},$$

$$[\mathbf{H}_{12}]_{ij}=-h\Omega L\delta_{ij},\qquad i,j=1,2,\cdots,p.\qquad (2p=n)$$

시스템의 각 물성치는 다음을 사용한다.

$$m_0=1\,kg/m,\quad \mathbf{M}=1\,kg,\quad L=1\,m,\quad \mathbf{K}_1=\mathbf{K}_2=L^2/20\;Nm,\quad c=h=1/4\;Nsm^{-1},$$
$$\mathbf{EI}_x=4\,L^3/5\pi^2\;Nm^2,\quad \mathbf{EI}_y=9\,L^3/5\pi^2\;Nm^2,\quad \Omega=\sqrt{21.6}\pi\;\mathrm{rad}\,s^{-1},$$

20 개의 자유도를 가지는 구조물이며 해석에 사용한 컴퓨터는 RAM 64Mega, CPU capacity 266Hz 를 가지는 펜티엄 컴퓨터 이다.

시스템의 고유치 해석과 제안 방법에 의한 민감도 해석 결과 일부를 표 3.1 과 표 3.2 에 나타내었다. 표 3.1 에서는 시스템의 고유치와 그 미분값을 나타냈으며, 표 3.2 에서는 시스템의 첫번째 고유벡터와 그 미분값을 나타내었다.

비교된 방법은 Brandon[20]의 방법이며 2 차 민감도의 경우도 Brandon[20]의 방법과 비교 하였다. 비교 결과는 그림 3.2 와 그림 3.3 을 통해 나타내었다. 그림 3.2 는 1 차 미분의 경우 계산 시간을 비교한 것이고, 그림 3.3 은 2 차 미분의 경우 계산시간을 비교한 내용이다.

표 3.1 에서 보면 고유치는 켤레 복소수 형태로 나타난다. 하지만 비대칭 시스템의 경우 고유치의 미분은 켤레 복소수 형태로 나타나지 않는다.

그림 3.2~3.3 에서 보다시피 제안 방법은 기존 Brandon 의 방법보다 계산 시간에 있어 훨씬 효율적임을 알 수 있다. 20 개의 고유진동수 및 모드의 민감도를 구하기 위해 Brandon 방법은 4.06 초의 CPU time 이 필요하며, 제안 방법의 경우 1.37 초 소요된다. 고유쌍 2 차 분의 경우 Brandon 의 방법은 5.66 초, 제안 방법은 1.76 초 걸란다. 1 차 미분의 경우 Brandon 의 방법보다 약 66 % 계산 시간 절감되며 2 차 미분의 경우 약 69%정도 향상된다. 물론 제안 방법에 의한 결과는 근사값이 아닌 정확해이며 수치적으로도 안정한 값이다.

표 3.1 시스템의 고유진동수와 고유진동수의 1, 2 차 민감도

Mode Number	Eigenvalues	First Derivatives	Second Derivatives
1	-1.1356e+00 -1.1408e+01i	-3.0082e-09 +2.1311e-10i	2.1467e+07 +8.5867e+07i
2	-1.1356e+00 +1.1408e+01i	8.8348e-09 -6.0626e-09i	-2.6885e+07 -3.8440e+07i
3	1.1126e+00 -1.3261e+01i	-1.1967e-02 -8.4261e-03i	5.4992e+12 -1.3533e+13i
4	1.1126e+00 +1.3261e+01i	-5.5286e-02 -1.2195e-01i	-1.1823e+14 -8.6019e+13i
5	-2.7342e-04 -1.4600e+01i	2.5504e-01 +2.1754e-01i	-4.6795e+14 -3.3751e+14i
6	-2.7204e-04 +1.4601e+01i	-1.7576e-01 -1.1484e-01i	-5.5494e+13 -2.2026e+15i
7	2.7342e-04 -1.4601e+01i	4.9825e-11 -3.0310e-10i	1.0686e+10 -2.3221e+10i
8	2.7203e-04 +1.4601e+01i	1.8721e-12 -2.8702e-12i	-6.6278e+09 +8.6565e+09i
9	-1.0641e+01 -1.0838e+01i	1.4353e-07 +5.2867e-08i	-1.3271e+07 -1.0548e+08i
10	-1.0641e+01 +1.0838e+01i	1.6002e-07 -2.5249e-07i	4.1335e+08 -3.2507e+08i

표 3.2 시스템의 첫번째 고유모드와 고유모드의 1, 2 차 민감도

DOF Number	Eigenvector	First Derivative	Second Derivative
1	-1.1492e-04 -6.6953e-05i	-1.9913e-07 +1.5279e-05i	-1.6999e-01 +5.9919e-02i
2	1.8527e-04 +1.6207e-04i	1.7145e-06 -2.2992e-05i	3.2893e-01 -5.2418e-02i
3	3.9180e-04 +2.1666e-04i	3.9476e-05 -4.6514e-05i	4.9679e-01 -1.0855e-01i
4	3.9067e-02 +3.2630e-02i	3.9253e-03 -6.0064e-03i	6.2569e+01 -1.6712e+01i
5	-3.5695e-04 -2.4295e-04i	-4.0335e-05 +4.1658e-05i	-4.9644e-01 +6.3090e-02i
⋮	⋮	⋮	⋮
17	-2.4687e-06 +1.0521e-05i	3.6401e-07 -3.2894e-07i	1.6519e-02 +5.9837e-03i
18	-1.2820e-05 +1.1512e-06i	1.0737e-07 +2.2836e-06i	-1.3264e-02 +1.5145e-02i
19	7.6513e-06 -3.6451e-06i	-2.9985e-07 -1.5134e-06i	4.4274e-03 -1.3227e-02i
20	9.9973e-07 +1.6952e-06i	1.4645e-07 +2.0957e-07i	1.5433e-03 +3.4188e-03i

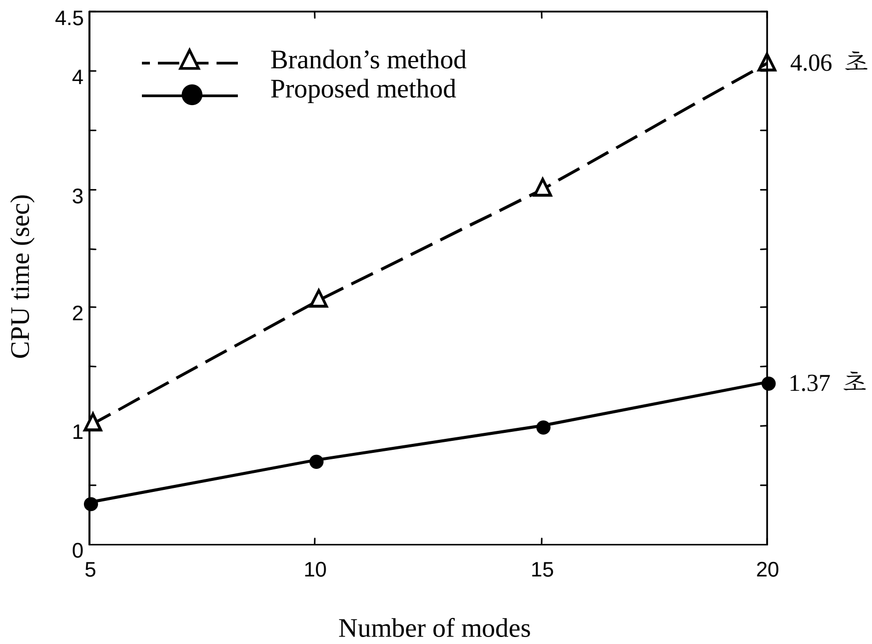


그림 3.2. 기존 방법과의 CPU time 비교

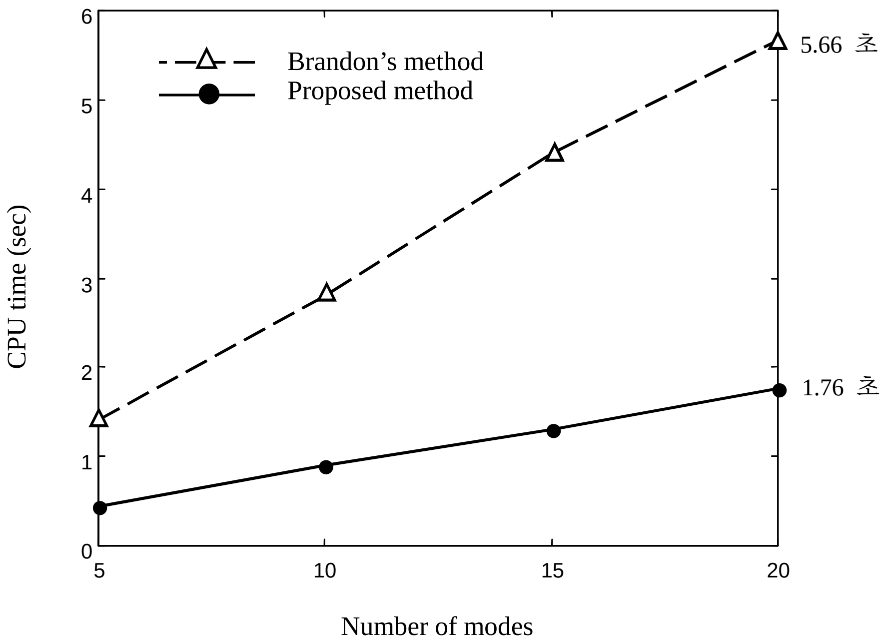


그림 3.3. 기존 방법과의 CPU time 비교 (2 차 민감도)

제 4 장 결론

본 연구에서는 감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 민감도를 구하기 위한 대수적인 방법을 제안 하였으며 수치예제를 통해 제안 방법의 효율성을 기존 방법과 비교 검증하였다. 본 연구의 결과를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 기존의 다른 방법과 달리 고유진동수와 고유모드의 민감도를 하나의 식으로 구함으로서 더 효율적이게 되었다.
둘째, 감쇠 시스템의 고유쌍 2 차 민감도 뿐 아니라 비대칭 감쇠 시스템의 고유쌍 민감도와 그 2 차 민감도까지 구할 수 있도록 제안방법을 확장하였다.
셋째, 제안 방법은 수치적으로 안정할 뿐만 아니라 정확해를 준다.
넷째, '*N-space*'에 바탕을 둔 방법이며, 대칭 감쇠 시스템의 경우 제안식의 계수행렬이 대칭이므로 계산 시간 및 저장 용량에 있어 매우 효율적인 방법이다.

수치예제를 통해 기존 다른 민감도 방법들과 비교해 봐도 제안 방법의 우수성은 증명이 되었다. 모드 법의 경우 기본적으로 여러 개의 모드정보를 필요로 하는 방법이라 계산 시간 및 저장 용량에 있어 효율적이지 못하며 이를 개선하기 위해 모드를 생략할 경우 정확해를 주지 못한다는 단점이 있다. Nelson 방법을 비롯해 많은 방법들이 비감쇠 시스템을 위해 개발된 방법이어서 감쇠 시스템으로 적용하기 위해선 상태공간방정식(*2N-space*)을 도입해야 하는 단점이 존재한다. 반면 제안 방법은 감쇠 시스템의 고유진동수 및 모드의 민감도를 구함에 있어 해당 고유쌍 정보만 필요로 하고 '*N-space*'에 근거한 방법이므로 다른 방법에 비해 매우 효율적인 방법이다.

참고 문헌

[1] C. S. Rudisill, "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors for a General Matrix", *AIAA Journal*, **12**, 721-722 (1974).

[2] R. B. Nelson, "Simplified Calculations of Eigenvector Derivatives", *AIAA Journal*, **14**, 1201-1205 (1976).

[3] I. W. Lee and G. H. Jung, "An Efficient Algebraic Method for Computation of Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities: Part I, Distinct Natural Frequencies", *Computers and Structures*, **62**(3), 429-435 (1997).

[4] I. W. Lee and G. H. Jung, "An Efficient Algebraic Method for Computation of Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities: Part II, Multiple Natural Frequencies", *Computers and Structures*, **62**(3), 437-443 (1997).

[5] J. N. Juang, P. Ghaemmaghami and K. B. Lim, "Eigenvalue and Eigenvector Derivatives of a Nondefective Matrix", *Journal of Guidance, Control Dynamics*, **12,** 480-486 (1989).

[6] D. V. Murthy and R. T. Haftka, "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors for a General Complex Matrix", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **26**, 293-311 (1988).

[7] K. B. Lim and J. L. Junkins, "Re-examination of Eigenvector Derivatives", *Journal of Guidance*, **10**, 581-587 (1987).

[8] B. P. Wang, "Improved Approximate Method for Computing Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics", *AIAA Journal*, **29,** 1018-1020 (1985).

[9] Z. S. Liu, S. H. Chen and Y. Q. Zhao, "An Accurate Method for Computing Eigenvector Derivatives for Free-Free Structures", *Computers and Structures*, **52**, 1135-1143 (1994).

[10] A. L. Andrew, "Convergence of an Iterative Method for Derivatives of Eigensystems", *Journal of Comput. Phys.*, **26**, 107-112 (1978).

[11] R. C. E. Tan, "Accelerating the Convergence of an Iterative Method for Derivatives of Eigensystems", *Journal of Comput. Phys.*, **67**, 230-235 (1986).

[12] I. W. Lee and G. H. Jung, "Numerical Method for Sensitivity Analysis of Eigensystems with

Nonrepeated and Repeated Eigenvalues", *Journal of Sound and Vibration*, **195**(1), 17-32 (1996).

[13] Q. H. Zeng, "Highly Accurate Modal Method for Calculating Eigenvector Derivatives in Viscous Damping System," *AIAA Journal*, **33**(4), 746-751 (1995).

[14] S. Adhikari, "Calculation of Derivative of Complex Modes Using Classical Normal Modes," *Computer & Structures*, **77**(6), 625-633 (2000).

[15] I. W. Lee and D. O. Kim, "Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities of Damped Systems: Part I, Distince Natural Frequencies", *Journal of Sound and Vibration*, **223**(3), 399-412 (1999).

[16] I. W. Lee and D. O. Kim, "Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities of Damped Systems: Part II, Multiple Natural Frequencies", *Journal of Sound and Vibration*, **223**(3), 413-424 (1999).

[17] Z. Zimoch, "Sensitivity Analysis of Vibrating Systems," *Journal of Sound and Vibration*, **117**, 447-458 (1987).

[18] H. M. Adelman and R. T. Haftka, "Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems," *AIAA Journal*, **24**(5), 823-832 (1986).

[19] M. I. Friswell, "Calculation of Second and Higher Order Eigenvector Derivatives," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **18**(4), 919-921 (1995).

[20] J. A. Brandon, "Second-Order Design Sensitivities to Assess the Applicability of Sensitivity Analysis," *AIAA Journal*, **29**(1), 135-139 (1991).

[21] L. Meirovitch and G. Ryland, "A Perturbation Technique for Gyroscopic Systems with Small Internal and External Damping," *Journal of Sound and Vibration*, **100**(3), 393-408 (1985).

부 록

A. 중복근을 가지는 시스템

시스템의 고유치가 중복이 되는 경우 기존의 방법으로는 풀 수가 없다. 하지만 Lee et al.[15]의 방법은 중복근을 가지는 시스템에 대해서도 풀 수 있는 방법이고 이는 본 제안방법의 경우에도 그대로 적용된다. 즉 제안 방법은 중복근을 가지는 시스템의 경우에도 풀 수 있다.

중복근을 가지는 시스템의 경우 고유쌍 민감도를 구하기 위해선 고유벡터를 그대로 사용하지 않고 근접벡터(adjacent eigenvector)를 사용한다. 고유치가 반복(중복)되는 경우 그에 해당되는 고유벡터는 일정한 벡터가 아니라 수없이 많은 방향을 가지는 벡터가 가능하게 된다. 이러한 고유벡터를 사용한다는 것은 해석의 불안정을 일으키게 되므로 고유벡터에 수치적으로 무리가 없는 변화를 가한 근접 벡터를 사용하는 것이다. 이 근접벡터는 다음과 같이 해당 고유벡터 집합에 직교변환행렬을 곱해 구한다.

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{\Phi}_m \mathbf{T} \tag{a-1}$$

여기서 직교변환행렬 $\mathbf{T}$ 는 다음의 특성 고유치 문제를 풀어서 구한다.

$$\mathbf{DT} = \mathbf{ET\Lambda}_{m,\alpha} \tag{a-2}$$

여기서 각 항이 의미하는 바는 다음과 같다.

$$\mathbf{D} = -\mathbf{\Phi}_m{}^T \left(\lambda_m{}^2 \mathbf{M}_{,\alpha} + \lambda_m \mathbf{C}_{,\alpha} + \mathbf{K}_{,\alpha}\right) \mathbf{\Phi}_m, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{\Phi}_m{}^T \left(2\lambda_m \mathbf{M} + \mathbf{C}\right) \mathbf{\Phi}_m = -\mathbf{I}_m,$$

$$\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{\Lambda}_m}{\partial \alpha}, \quad \mathbf{\Lambda}_m = \lambda_m \mathbf{I}_m .$$

λ_m 은 중복근이고 $\mathbf{\Phi}_m$ 는 중복근 λ_m 에 해당하는 고유벡터의 집합 행렬이다.
중복근을 가지는 대칭 감쇠 시스템과 비대칭 감쇠 시스템의 고유쌍 민감도, 2 차 민감도를 위한 식은 다음과 같다.

첫째, 중복근을 가지는 대칭 감쇠 시스템의 고유쌍 민감도를 위한 제안식은

$$\begin{bmatrix} \lambda_m^2\mathbf{M}+\lambda_m\mathbf{C}+\mathbf{K} & (2\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{X}_m \\ \mathbf{X}_m^T(2\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C}) & \mathbf{X}_m^T\mathbf{M}\mathbf{X}_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_{m,\alpha} \\ \mathbf{\Lambda}_{m,\alpha} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} (\lambda_m^2\mathbf{M}_{,\alpha}+\lambda_m\mathbf{C}_{,\alpha}+\mathbf{K}_{,\alpha})\mathbf{X}_m \\ 0.5\mathbf{X}_m^T(2\lambda_m\mathbf{M}_{,\alpha}+\mathbf{C}_{,\alpha})\mathbf{X}_m \end{Bmatrix}, \tag{a-3}$$

둘째, 중복근을 가지는 대칭 감쇠 시스템의 고유쌍 2차 민감도를 위한 제안식은

$$\begin{bmatrix} \lambda_m^2\mathbf{M}+\lambda_m\mathbf{C}+\mathbf{K} & (2\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{X}_m \\ \mathbf{X}_m^T(2\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C}) & \mathbf{X}_m^T\mathbf{M}\,\mathbf{X}_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_{m,\alpha\beta} \\ \mathbf{\Lambda}_{m,\alpha\beta} \end{Bmatrix}$$

$$= -\left\{\begin{matrix} \Big[(\tilde{\mathbf{F}}_{m,\beta}+\mathbf{G}_m\mathbf{\Lambda}_{m,\beta})\mathbf{X}_{m,\alpha}+(\tilde{\mathbf{F}}_{m,\alpha}+\mathbf{G}_m\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_{m,\beta}+ \\ \{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{m,\alpha\beta}+\tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha}\mathbf{\Lambda}_{m,\beta}+\tilde{\mathbf{G}}_{m,\beta}\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha}\}\mathbf{X}_m+2\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha}\mathbf{\Lambda}_{m,\beta}\mathbf{M}\mathbf{X}_m\Big] \\ \Big[\mathbf{X}_{m,\alpha}^T\mathbf{G}_m\mathbf{X}_{m,\beta}+\mathbf{X}_m^T(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\beta}+2\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}_{m,\beta})\mathbf{X}_{m,\alpha}+\mathbf{X}_m^T(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha}+2\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_{m,\beta} \\ +0.5\mathbf{X}_m^T(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha\beta}+2\mathbf{M}_{,\alpha}\mathbf{\Lambda}_{m,\beta}+2\mathbf{M}_{,\beta}\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_m\Big] \end{matrix}\right\}, \tag{a-4}$$

셋째, 중복근을 가지는 비대칭 감쇠 시스템의 고유쌍 민감도를 위한 제안식은

$$\begin{bmatrix} \lambda_m^2\mathbf{M}+\lambda_m\mathbf{C}+\mathbf{K} & (2\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{X}_m \\ \mathbf{X}_m^T(2\lambda_m\mathbf{M}+2\lambda_m\mathbf{M}^T+\mathbf{C}+\mathbf{C}^T) & 2\mathbf{X}_m^T\mathbf{M}\,\mathbf{X}_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_{m,\alpha} \\ \mathbf{\Lambda}_{m,\alpha} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} (\lambda_m^2\mathbf{M}_{,\alpha}+\lambda_m\mathbf{C}_{,\alpha}+\mathbf{K}_{,\alpha})\mathbf{X}_m \\ \mathbf{X}_m^T(2\lambda_m\mathbf{M}_{,\alpha}+\mathbf{C}_{,\alpha})\mathbf{X}_m \end{Bmatrix}, \tag{a-5}$$

넷째, **중복근을 가지는 비대칭 감쇠 시스템의 고유쌍 2 차 민감도**를 위한 제안식은

$$\begin{bmatrix} \lambda_m^2\mathbf{M}+\lambda_m\mathbf{C}+\mathbf{K} & (2\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{X}_m \\ \mathbf{X}_m^T(2\lambda_m\mathbf{M}+2\lambda_m\mathbf{M}^T+\mathbf{C}+\mathbf{C}^T) & 2\mathbf{X}_m^T\mathbf{M}\mathbf{X}_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_{m,\alpha\beta} \\ \mathbf{\Lambda}_{m,\alpha\beta} \end{Bmatrix}$$
$$= -\begin{Bmatrix} \Big[(\tilde{\mathbf{F}}_{m,\beta}+\mathbf{G}_m\mathbf{\Lambda}_{m,\beta})\mathbf{X}_{m,\alpha}+(\tilde{\mathbf{F}}_{m,\alpha}+\mathbf{G}_m\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_{m,\beta}+ \\ \{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{m,\alpha\beta}+\tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha}\mathbf{\Lambda}_{m,\beta}+\tilde{\mathbf{G}}_{m,\beta}\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha}\}\mathbf{X}_m+2\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha}\mathbf{\Lambda}_{m,\beta}\mathbf{M}\mathbf{X}_m\Big] \\ \Big[\mathbf{X}_{m,\alpha}^T(\mathbf{G}_m+\mathbf{G}_m^T)\mathbf{X}_{m,\beta}+\mathbf{X}_m^T(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\beta}+\tilde{\mathbf{G}}_{m,\beta}^T+2\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}_{m,\beta}+2\mathbf{M}^T\mathbf{\Lambda}_{m,\beta})\mathbf{X}_{m,\alpha} \\ +\mathbf{X}_m^T(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha}+\tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha}^T+2\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha}+2\mathbf{M}^T\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_{m,\beta}+\mathbf{X}_m^T(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha\beta}+2\mathbf{M}_{,\alpha}\mathbf{\Lambda}_{m,\beta}+2\mathbf{M}_{,\beta}\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_m\Big] \end{Bmatrix}. \tag{a-6}$$

이상의 제안식은 서로 다른 고유치를 가지는 시스템의 제안식과 마찬가지 방식으로 전개한 식이다. 결국 제안식에서 고유치를 중복근 λ_m 또는 $\mathbf{\Lambda}_m$, 고유벡터를 근접벡터(adjacent eigenvector) $\mathbf{X}_m$ 로 바꾼 결과이다.

B. 감쇠 시스템에서의 Nelson 방법

1 차 민감도

비감쇠 시스템의 고유쌍 민감도 기법 중 가장 효율적인 방법으로 알려진 방법 중 하나가 Nelson 방법이다. 하지만 비감쇠 시스템을 위해 개발된 방법이고 이를 감쇠 시스템으로 적용하기 위해선 상태공간방정식의 도입이 필요하다. 이는 *'2N-space'*에 바탕을 둔 접근이므로 효율성이 매우 떨어지게 된다. 이에 *'N-space'*에 바탕을 둔 새로운 Nelson 방법을 제안해 보고자 한다. 적용되는 기본 알고리즘은 비감쇠 시스템의 Nelson 방법과 같다.

기본적으로 감쇠 시스템의 고유치 문제와 정규화 조건을 이용한다. 이를 써보면 다음과 같다.

$$\left(\lambda_j^2\mathbf{M} + \lambda_j\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\mathbf{u}_j = \mathbf{0} \tag{b-1}$$

$$\mathbf{u}_j^T(2\lambda_i\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{u}_j = 1 \tag{b-2}$$

정규화 조건을 설계 변수에 대해 미분하면

$$\left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\mathbf{u}_{j,\alpha} = -\left(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C}\right)\mathbf{u}_j\lambda_{j,\alpha} - \left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}_{,\alpha}+\lambda_j\mathbf{C}_{,\alpha}+\mathbf{K}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_j \tag{b-3}$$

이고, 이 식의 양변에 $\mathbf{u}_j^T$ 를 곱해서 정리하면 고유치의 미분이 나온다.

$$\lambda_{j,\alpha} = -\mathbf{u}_j^T\left(\lambda_j^2\mathbf{M}_{,\alpha} + \lambda_j\mathbf{C}_{,\alpha} + \mathbf{K}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_j \tag{b-4}$$

이는 기존 다른 방법에서와 같은 방법이다. 고유벡터의 미분은 특이해(particular solution)와 비특이해(homogeneous solution)의 합으로 구한다.

$$\mathbf{u}_{j,\alpha} = v_{j\alpha} + c_{j\alpha}\mathbf{u}_j \tag{b-5}$$

여기서 $v_{j\alpha}$ 는 특이해로서 다음 식을 이용하여 구한다.

$$\mathbf{D}_j v_{j\alpha} = \mathbf{b}_{j\alpha} \tag{b-6}$$

여기서 $\mathbf{D}_j$ 는 식 (b-3) 좌변의 계수행렬 이고 $\mathbf{D}_j = \left(\lambda_j^{\,2}\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)$, $\mathbf{b}_{j\alpha}$ 는 식 (b-3)의 우변이다. 즉 $\mathbf{b}_{j\alpha} = -\left(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C}\right)\mathbf{u}_j\lambda_{j,\alpha} - \left(\lambda_j^{\,2}\mathbf{M}_{,\alpha}+\lambda_j\mathbf{C}_{,\alpha}+\mathbf{K}_{,\alpha}\right)\mathbf{u}_j$.

식 (b-6)에서 $v_{j\alpha}$ 는 유일하지 않다. 이를 해결하기 위해 해당 고유벡터의 요소 중 제일 큰 값을 가지는 위치를 k 라 하자. $\mathbf{D}_j$ 행렬의 k 번째 행과 열을 0 으로 만들고 $\mathbf{D}_j$ 의 (k,k)요소를 1 로 놓은 다음 $\mathbf{b}_{j\alpha}$ 의 k 번째 요소를 0 으로 해서 식 (b-6)을 다시 푼다. 즉 다음 식을 통해 $v_{j\alpha}$ 를 구한다.

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{D}_j]_{11} & \mathbf{0} & [\mathbf{D}_j]_{13} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ [\mathbf{D}_j]_{31} & \mathbf{0} & [\mathbf{D}_j]_{33} \end{bmatrix} v_{j\alpha} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{b}_{j\alpha}\}_1 \\ \mathbf{0} \\ \{\mathbf{b}_{j\alpha}\}_3 \end{Bmatrix} \tag{b-7}$$

정규화 조건 식 (b-2)를 설계변수에 대해 미분하면 다음과 같고,

$$\mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_{j,\alpha} = -\mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j\lambda_{j,\alpha} - 0.5\mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}_{,\alpha}+\mathbf{C}_{,\alpha})\mathbf{u}_j \tag{b-8}$$

식 (b-5)를 식 (b-8)에 대입해 $c_{j\alpha}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$c_{j\alpha} = -0.5\mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}_{,\alpha}+\mathbf{C}_{,\alpha})\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})v_{j\alpha} - \mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j\lambda_{j,\alpha} \tag{b-9}$$

즉 식 (b-4)를 통해 고유치의 미분을 구하고 식 (b-5)를 통해 고유벡터의 미분을 구하는데 (b-5)의 $v_{j\alpha}$ 와 $c_{j\alpha}$ 는 식 (b-7)과 식 (b-9)를 이용해 구한다.

2 차 민감도

고유치 문제와 정규화 조건의 2 차 미분식을 기본으로 한다. 고유치 문제의 2 차 미분식을 써보면 다음과 같다.

$$(\lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K})\mathbf{u}_{j,\alpha\beta}=-(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j\lambda_{j,\alpha\beta}-\Big[(\tilde{\mathbf{F}}_{j,\beta}+\mathbf{G}_j\lambda_{j,\beta})\mathbf{u}_{j,\alpha} \\ +(\tilde{\mathbf{F}}_{j,\alpha}+\mathbf{G}_j\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\beta}+\Big\{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{j,\alpha\beta}+(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}+\mathbf{M}\lambda_{j,\alpha})\lambda_{j,\beta}+(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}+\mathbf{M}\lambda_{j,\beta})\lambda_{j,\alpha}\Big\}\mathbf{u}_j\Big] \quad \text{(b-10)}$$

이 식의 양변에 $\mathbf{u}_j^T$를 곱해 정리하면 고유치의 2차 미분이 구해진다.

$$\lambda_{j,\alpha\beta}=-\mathbf{u}_j^T\Big[(\tilde{\mathbf{F}}_{j,\beta}+\mathbf{G}_j\lambda_{j,\beta})\mathbf{u}_{j,\alpha}+(\tilde{\mathbf{F}}_{j,\alpha}+\mathbf{G}_j\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\beta} \\ +\Big\{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{j,\alpha\beta}+(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}+\mathbf{M}\lambda_{j,\alpha})\lambda_{j,\beta}+(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}+\mathbf{M}\lambda_{j,\beta})\lambda_{j,\alpha}\Big\}\mathbf{u}_j\Big]$$

(b-11)

고유벡터의 2차 미분은 다음식과 같으며,

$$\mathbf{u}_{j,\alpha\beta}=v_{j\alpha\beta}+c_{j\alpha\beta}\mathbf{u}_j \quad \text{(b-12)}$$

$v_{j\alpha\beta}$는 다음식으로 구한다.

$$\mathbf{D}_j v_{j\alpha\beta}=\mathbf{b}_{j\alpha\beta} \quad \text{(b-13)}$$

여기서 $\mathbf{D}_j=\left(\lambda_j{}^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)$이며,

$$\mathbf{b}_{j\alpha\beta}=-(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_j\lambda_{j,\alpha\beta}-\Big[(\tilde{\mathbf{F}}_{j,\beta}+\mathbf{G}_j\lambda_{j,\beta})\mathbf{u}_{j,\alpha}+(\tilde{\mathbf{F}}_{j,\alpha}+\mathbf{G}_j\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\beta} \\ +\Big\{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{j,\alpha\beta}+(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}+\mathbf{M}\lambda_{j,\alpha})\lambda_{j,\beta}+(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}+\mathbf{M}\lambda_{j,\beta})\lambda_{j,\alpha}\Big\}\mathbf{u}_j\Big]$$ 이다.

1차 미분과 마찬가지로 식 (b-13)의 해는 유일하지 않기 때문에 다음식을 통해 $v_{j\alpha\beta}$를 구한다.

$$\begin{bmatrix}[\mathbf{D}_j]_{11} & \mathbf{0} & [\mathbf{D}_j]_{13}\\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0}\\ [\mathbf{D}_j]_{31} & \mathbf{0} & [\mathbf{D}_j]_{33}\end{bmatrix}v_{j\alpha\beta}=\begin{Bmatrix}\{\mathbf{b}_{j\alpha\beta}\}_1\\ \mathbf{0}\\ \{\mathbf{b}_{j\alpha\beta}\}_3\end{Bmatrix} \quad \text{(b-14)}$$

정규화 조건의 2차 미분식은 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{u}_{j,\alpha\beta} = -(\mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j)\lambda_{j,\alpha\beta} - 0.5\Big[\mathbf{u}_{j,\alpha}^T(\mathbf{G}_j+\mathbf{G}_j^T)\mathbf{u}_{j,\beta}$$
$$+\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha\beta}+2\mathbf{M}_{,\alpha}\lambda_{j,\beta}+2\mathbf{M}_{,\beta}\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_j+\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}+\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}^T+2\mathbf{M}\lambda_{j,\beta}+2\mathbf{M}^T\lambda_{j,\beta})\mathbf{u}_{j,\alpha}$$
$$+\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}+\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}^T+2\mathbf{M}\lambda_{j,\alpha}+2\mathbf{M}^T\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\beta}\Big]$$

(b-15)

식 (b-12)를 식 (b-15)에 대입하여 $c_{j\alpha\beta}$를 구하면 다음과 같다.

$$c_{j\alpha\beta} = -\mathbf{u}_j^T(2\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})v_{j\alpha\beta} - (\mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_j)\lambda_{j,\alpha\beta} - 0.5\Big[\mathbf{u}_{j,\alpha}^T(\mathbf{G}_j+\mathbf{G}_j^T)\mathbf{u}_{j,\beta}$$
$$+\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha\beta}+2\mathbf{M}_{,\alpha}\lambda_{j,\beta}+2\mathbf{M}_{,\beta}\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_j+\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}+\tilde{\mathbf{G}}_{j,\beta}^T+2\mathbf{M}\lambda_{j,\beta}+2\mathbf{M}^T\lambda_{j,\beta})\mathbf{u}_{j,\alpha}$$
$$+\mathbf{u}_j^T(\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}+\tilde{\mathbf{G}}_{j,\alpha}^T+2\mathbf{M}\lambda_{j,\alpha}+2\mathbf{M}^T\lambda_{j,\alpha})\mathbf{u}_{j,\beta}\Big]$$

(b-16)

즉 식 (b-11)을 통해 고유치의 2 차 미분을 구하고 (b-12)를 통해 고유벡터의 2 차 미분을 구한다. (b-12)의 $v_{j\alpha\beta}$와 $c_{j\alpha\beta}$는 식 (b-14)와 (b-16)를 이용해 구한다.

이상과 같이 유도된 식은 감쇠 시스템에 있어 Nelson 방법을 적용 시 상태공간방정식을 사용하는 것이 아니라 직접 '*N-space*'에 바탕을 두고 고유쌍의 미분을 구한다는 데 있어 중요한 의미를 지닌다. 이 방법의 효율성 검증은 추후 연구과제로 남긴다. 참고로 이상에서 사용된 각 기호는 본 논문의 2 장과 3 장에서 사용된 기호와 같다.

감사의 글

제 인생의 가장 소중한 시기였던 한국과학기술원에서 보낸 6 년을 마무리 하며 지금의 저를 있게 해준 많은 분들께 감사 드리고저 합니다.

먼저 서툴기 만한 저에게 학문과 인생에 있어 크나 큰 가르침을 주신 이인원 교수님께 깊은 감사를 드립니다. 세심한 심사와 조언으로 부족한 논문을 더욱 빛나게 해주신 최창근 교수님과 윤정방 교수님께 감사 드립니다. 또한 훌륭하고 성실한 강의를 통해 제게 토목의 길을 열어주신 신항식 교수님, 구자공 교수님, 김진근 교수님, 이승래 교수님, 박희경 교수님, 김동수 교수님, 곽효경 교수님께 감사 드립니다. 매주 세미나에 참석하셔서 훌륭한 조언을 해주신 한남대학교 오주원 교수님, 성균관대학교 박선규 교수님 그리고 젊은 날의 가장 중요한 시절을 이곳에서 공부할 수 있게 해준 한국과학기술원과 국민 여러분께 감사 드립니다.

대학원 생활동안 제게 또 다른 가족이 되어 준 구조동역학 및 진동제어연구실 사람들 모두에게 깊은 감사를 드립니다. 지금은 미국에 있지만 제게 고유치의 진리를 깨우쳐 주신 형조형, 풍부하며 세심한 지성 속에 엄청난 유머의 소유자 동현이형, 꿈 많은 소년 같으며 항상 저를 과대 평가 해주시는 지성이형, 엄청난 맷집 웃는 오뚜기 현택이형, 6 삭동이 아빠이자 최고의 인격자 병완이형, 외모도 둥글 성격도 둥글 연구실 안방 마님 상원이형, 부족한 저로 인해 많이 고생하신 규식이형에게 감사 드리며, 야참 때의 라면과 출근 시 얼굴의 크기와의 상관관계를 효과적으로 설명해주었으며 나와 많은 고민을 함께 했던 랩메이트 혜린이, 엉성한 선배를 믿고 따라준 두 후배 썰렁한 귀영둥이 착한 강민이와 사춘기 지난 늙은 반항아 영종이에게도 고마움을 전합니다. 그리고 짧은 시간이나마 연구원으로 계시면서 컨트롤에 대한 가르침을 주신 시대의 방랑아 심규홍 박사님께 감사 드립니다.

KAIST 토목과 동기이자 토목의 동반자 진국, 제국, 자인, 용석, 현기, 기수, 태근, 형석, 민영, 영미, 동희, 은석, 위용, 동은이에게도 과기원 생활동안 배풀어 준 관심과 사랑에 고마움을 전하며, 수많은 밤을 같이 보내며 고민과 기쁨을 같이 나누었던 나의 룸메이트이자 실속 없는 바람둥이 조성호, 카이스트 최고의 신랑감 서윤이 그리고 제게 변함없는 친절을 베풀어 준 그의 가족들에게 감사를 표합니다. 학부시절 대학생활의 큰 버팀목이었던 디딤돌 선후배 여러분과 저의 정신적 지주 종구형께도 감사 드리며, 저의 족구 탁구 실력 향상에 많은 도움을 준 토

목과 체육인 상훈이와 세택이, 형일이, 준희 후배에게도 고마움을 전합니다.

저의 단짝이며 항상 저에게 친구의 소중함을 잊지 않게 해주는 용선이와 지훈이, 철 없던 어린 시절을 더욱 값지게 만들어 주는 변함없는 나의 죽마고우 재연, 용석, 근영, 삼수, 종천, 승준, 종성, 귀성, 명화, 은아, 은정, 기옥, 미정, 유정, 은미, 현옥, 미경이에게도 감사의 마음을 전합니다. 이제는 대학생이 된 나의 제자 준호와 승훈이 그리고 항상 저를 아들같이 대해주신 그 가족들에게도 감사 드리며, 제 인생에 굵직한 모범이 되셨던 보문 고등학교 이석구 선생님께 감사의 인사를 드립니다. 영욱이형 찬호형을 비롯한 보문고 헵타바인 선후배 여러분께도 죄송함과 더불어 저에 대한 관심에 감사 드립니다.

아프신 몸에도 늘 자상하신 성품으로 저를 따듯이 대해 주시고 격려를 해주신 작은 고모와 고모부, 큰 고모와 고모부, 큰 아버지와 큰 어머니 그리고 사촌 형들과 조카들에게도 감사드리며 이 논문이 가문의 발전에 조금이나마 보탬이 되었으면 합니다.

끝으로 보잘 것 없는 저를 믿고 따라준 동생 영순이와 형철이, 저를 낳아주시고 길러주시고 제 인생의 변함없는 후원자이시며 편안한 안식처가 되어준 아버지(趙命容)와 어머니(朴贊順)께 그 무엇으로도 보상해 드릴 수 없지만 이 작은 결실로 감사의 마음을 대신하며 저희 가족에게 이 논문을 바칩니다.

이 력 서

성　　명 :　　조 홍 기

생년월일 :　　1976 년 12 월 7 일

출 생 지 :　　대전광역시

본　　적 :　　대전광역시 동구 가양동 283-15

학　　력

1995.3 – 1999.2　한국과학기술원 토목공학과 학사과정 (B. S.)

1999.3 – 2001.2　한국과학기술원 토목공학과 석사과정 (M. S.)

연 구 논 문

학위논문

1. 조홍기,(2001), “감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 민감도,” 석사학위 논문, 한국과학기술원.

저널 논문

1. 조홍기, 박선규, 이인원, "감쇠시스템의 고유진동수와 모드의 개선된 민감도 기법," 대한토목학회 논문집. (accepted)

학술회의 발표 논문

1. Hong-Ki Jo, Sun-Kyu Park and In-Won Lee, (2000), "Simplified Algebraic Method for Computing Eigenpair Sensitivities of Damped Systems," *ECCOMAS 2000, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Spain, September 11-14, 2000, pp. 1102.
2. Hong-Ki Jo, Kyu-Sik Park, Hye-Rin Shin & In-Won Lee, (2000), "Improved Algebraic Method for Computing Eigenpair Sensitivities of Damped Systems," *The 13th KKNN Symposium on Civil Engineering*, Taipei, Taiwan, December 7-8, 2000, pp. 35-42.
3. 조홍기, 박선규, 이인원, (2000), "감쇠시스템의 고유진동수와 모드의 민감도를 계산하기 위한 대수적 방법의 개선," 2000 년도 춘계 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 2000.4.8, pp. 277-285.
4. 조홍기, 오주원, 이인원, (2000), "감쇠시스템의 고유진동수와 모드의 민감도," 2000 년도 한국강구조학회 학술발표회 논문집, 2000.6.3, pp. 340-349.

5. 조홍기, 고만기, 이인원, (2000), "감쇠시스템의 고유진동수와 모드의 미분을 구하기 위한 대수적 방법의 개선," 2000 년도 한국소음진동공학회 학술발표회 논문집, 2000.6.23, pp. 501-507.
6. 조홍기, 고만기, 이인원, (2000), "감쇠시스템의 고유진동수와 모드의 개선된 민감도 기법," 2000 년도 한국지진공학회 추계 학술발표회 논문집, 2000. 9. 29-30, pp.176-183.
7. 조홍기, 박선규, 이인원, (2000), "고유진동수와 모드의 개선된 민감도 기법," 2000 년도 대한토목학회 학술발표회 논문집, 2000. 10. 27-28, pp. 621-624.