석 사 학 위 논 문

중복근을 갖는 감쇠 시스템의 고유쌍의 민감도를 계산하기 위한 대수적 방법

최 강 민 (崔 剛 敏)

토 목 공 학 과

한 국 과 학 기 술 원

2002

중복근을 갖는 감쇠 시스템의 고유쌍의 민감도를 계산하기 위한 대수적 방법

Algebraic Method for Computation of Eigenpair Sensitivities of Damped Systems with Repeated Eigenvalues

Algebraic Method for Computation of Eigenpair Sensitivities of Damped Systems with Repeated Eigenvalues

Advisor : Professor In-Won Lee

by

Kang-Min Choi
Department of Civil Engineering
Korea Advanced Institute of Science and Technology

A thesis submitted to the faculty of the Korea Advanced Institute of Science and Technology in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Engineering in the Department of Civil Engineering

Taejon, Korea
2001. 12. 17.
Approved by

Professor In-Won Lee
Major Advisor

중복근을 갖는 감쇠 시스템의 고유쌍의 민감도를 계산하기 위한 대수적 방법

최 강 민

위 논문은 한국과학기술원 석사학위논문으로 학위논문 심사위원회에서 심사 통과하였음.

2001 년 12 월 17 일

심사 위원장 이 인 원 (인)

심 사 위 원 윤 정 방 (인)

심 사 위 원 곽 효 경 (인)

MCE
20003546

최강민. Kang-Min Choi. Algebraic Method for Computation of Eigenpair Sensitivities of Damped Systems with Repeated Eigenvalues. 중복근을 갖는 감쇠 시스템의 고유쌍의 민감도를 계산하기 위한 대수적 방법

Department of Civil Engineering. 2002. 38p. Advisor : Professor In-Won Lee

ABSTRACT

A simplified method is presented for the computation of eigenvalue and eigenvector derivatives of damped systems with repeated eigenvalues. In the proposed method, adjacent eigenvectors and orthonormal conditions are used to compose an algebraic equation whose order is $(n+m)\times(n+m)$, where n is the number of coordinates and m is the number of multiplicity of repeated eigenvalues. One algebraic equation developed can be computed eigenvalue and eigenvector derivatives simultaneously.

Since the coefficient matrix of the proposed equation is symmetric and based on N-space, this method is very efficient compared to previous methods. Moreover the numerical stability of the method is guaranteed because the coefficient matrix of the proposed equation is non-singular.

The more large structure, the more limits are present in approximation dynamic behavior of structure using only first sensitivities of eigenpair. Therefore the second sensitivities of eigenpair become important and the proposed method is so expanded as to obtain the second derivatives of eigenvalue and eigenvector of damped systems with repeated eigenvalues.

This method can be consistently applied to both structural systems with structural design parameters and mechanical systems with lumped design parameters. To verify the effectiveness of the proposed method, the finite element model of the cantilever beam and a 5-DOF mechanical system in the case of a non-proportionally damped system are considered as numerical examples. The design parameter of the cantilever beam is its width, and that of the 5-DOF mechanical system is a spring.

목 차

그림 및 표 목록

제 1 장 서론

1.1 연구 배경

과거에는 구조물의 규모가 작았고 바람이나 지진의 영향이 현재처럼 구조물 설계의 중요한 요소가 아니었다. 즉, 정적 하중에 대한 해석만으로도 안정성을 확보한 설계를 할 수 있었다. 그러나 현대의 구조물들은 구조가 복잡해지고 대형화되고 있으며, 지진이나 바람을 포함한 동적인 영향이 설계의 중요한 요소로 인식되고 있기 때문에 구조물의 사용성과 안정성을 확보하기 위해 감쇠력이 큰 제어 시스템들을 도입하고 있다. 따라서 구조물을 보다 안전하고 효율적으로 설계하기 위해서는 동적 해석이 필수적이다.

구조물의 거동은 고유치 문제의 해, 즉 고유치와 고유벡터를 구함으로써 완전히 결정된다. 하지만 항상 존재하는 불확실한 요인에 의해 구조물의 설계 변수는 변화될 수 있으며, 이 변화는 고유치와 고유벡터의 변화로 이어진다. 이렇게 변한 고유치와 고유벡터는 구조물의 동적 거동을 변화시키며, 이는 구조물의 안정성에 중요한 영향을 미칠 수 있다.

이에 최근 구조물에 있어 설계 변수의 변화에 따른 고유치와 고유벡터의 변화율을 계산하는 분야가 중요한 연구 분야로 자리잡게 되었는데, 이는 고유치와 고유벡터의 미분을 간단하면서도 빠르고 안정적으로 구하는 것을 목적으로 하는 분야이다.

고유치와 고유벡터의 미분값은 많은 분야에서 사용된다. 구조물의 고유치에 대한 최적화, 구조물의 동응답의 민감도, 설계 변수가 바뀐 시스템의 재 모델링 등 고유쌍의 미분이 적용되는 분야는 매우 많다.

특히, 일반적인 구조물은 구조적인 대칭성으로 인해 많은 중복된 고유치 또는 거의 같은 고유치가 이어지는 경우가 존재한다. 그래서 중복된 고유치를 갖는 경우에 고유치와 고유벡터의 미분을 구하는 것이 최근의 연구 과제이다.

중복된 고유치를 가지는 구조물의 경우 고유치와 고유벡터의 민감도를 구하기 위해서는 고유벡터를 그대로 사용하지 않고 근접벡터(adjacent eigenvector)를 사용한다. 구조물의 고유치가 *m* 번 중복되는 경우, 설계 변수가 변함에 따라 중복되었던 *m* 개의 고유치가 서로 다른 고유치로 갈라지게 된다. 이 경우 *m* 개의 서로 다른 고유치에 대응하는 고유벡터들을 구할 수 있다. 그러나 중복된 고유치를 갖는 고유 부공간(eigen-subspace)에서는 그에 해당되는 고유벡터는 일정한 벡터가 아니라 수없이 많은 방향을 가지는 임의의 벡터가 모두 가능하게 된다. 이러한 고유벡터를 사용한다는 것은 해석의 불안정을 일으키게 되므로 고유벡터에 수치적으로 무리가 없는 변화를 가한 근접벡터를 사용하는 것이다.[3]

고유치의 미분은 구조물의 고유치 문제를 설계 변수에 대해 미분함으로써 구할 수 있다. 하지만 고유벡터의 미분은 식의 비정칙성(singularity)문제로 인해 고유치 문제의 미분식에서 직접 구할 수 없다. 중복된 고유치를 가지는 경우도 동일하게 이러한 문제가 발생한다. 이러한 문제를 해결하기 위한 많은 연구가 진행되어 왔다.

참고문헌 [1-10]까지 중복된 고유치를 갖는 경우에 고유치와 고유벡터의 민감도를 구하는 방법이 소개되어 있다. 비감쇠 시스템의 대표적인 연구로 Ojalvo[1]가 Nelson[11]의 방법을 개선하여 중복된 고유치를 갖는 경우에도 가능한 방법이 있다. 이는 Mills-Curren[2]에 의해 수정되었고 최종적으로 Dailey[3]가 수정, 보완한 개선된 방법이 있다. 이러한 방법들은 Nelson[11]의 알고리즘을 기본으로 한 방법이기 때문에 고유 벡터의 미분치를 구하기 위해서는 복잡하고 프로그래밍하기에 아주 불편하다. 그리고 다른 효율적인 방법으로 Lee 와 Jung[7, 8]이 부가 조건을 이용해 정칙성(non-singularity)을 해결하였다.

감쇠 시스템의 중복된 고유치를 갖는 경우에 대한 연구는 아주 미비하다. 비감쇠 시스템의 중복된 고유치를 갖는 경우에 대한 Lee 와 Jung[8]의 방법을 감쇠 시스템으로 확장한 Lee et al.(1999)[10]방법이 있다. 이 방법은 기존에 비해

향상된 방법이지만, 여전히 개선의 여지가 남아 있어 본 연구의 필요성으로 작용한다.

고유쌍의 민감도가 많이 사용되는 분야 중 하나가 변화된 구조물의 고유치와 고유벡터의 근사화이다. 이 경우 오차가 필연적으로 발생하는데, 이는 구조물이 대형화되고 자유도가 많아짐에 따라 그 영향은 무시할 수 없게 된다. 이에 고유쌍의 2 차 미분값의 중요성이 부각되고 있다. 서로 다른 고유치를 갖는 비감쇠 시스템의 경우 Adelman 과 Haftka[12], Friswell[13] 등이 연구를 했고, 서로 다른 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 경우 Lee et al.(1999)[9]방법을 확장시킨 Lee et al.(2001)[14]방법이 있다. 감쇠 시스템에 있어서의 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 고유쌍 2 차 미분값에 대한 효율적인 방법이 필요하다.

1.2 연구 목적 및 범위

중복된 고유치를 갖는 비감쇠 시스템의 고유치와 고유벡터의 미분을 구하는 방법에 대해서는 많은 연구가 진행되어 왔으나, 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 민감도 해석에 대한 연구는 상당히 미비하다. 이에 본 연구에서는 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 경우 고유쌍의 민감도를 계산하기 위한 향상된 식을 제안하고자 한다. 먼저 기존 민감도 기법을 소개하고 각 방법의 특징을 설명하였다. 그리고 중복된 고유치를 갖는 비감쇠 시스템의 고유쌍의 민감도를 구하기 위해 가장 효율적인 Lee 와 Jung[8]방법에 Lee et al.(2001)[14]에서 제안한 방법의 알고리즘을 적용하여 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 경우로 확장하였다.

고유치와 고유벡터의 2 차 미분의 중요성이 커지고 있다. 하지만 감쇠 시스템의 경우에 대한 연구는 아직 미비하다. 서로 다른 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 경우 Lee et al.(2001)[14]방법에서 이미 적용하였으나 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템에 대한 연구는 아직 없다. 이에 본 연구에서 중복된 고유치를

갖는 감쇠 시스템의 고유쌍의 1 차 민감도를 구하는 방법을 확장하여 고유쌍의 2 차 민감도를 구하는 방법을 계산할 수 있게 하였다. 이를 더 확장하면 고유쌍의 고차 민감도를 구하는 방법까지도 확장할 수 있도록 하였다.

제안 방법의 수치적 안정성을 증명하였으며, 다양한 수치 예제를 통해 본 연구의 효율성과 적용성을 검증하였다.

제 2 장 중복근을 갖는 감쇠 시스템의 고유쌍 민감도 해석

2.1 기존 민감도 기법

2.1.1 Dailey 의 방법[3]

이 방법은 중복된 고유치를 갖는 비감쇠 시스템의 고유쌍 민감도를 위해 개발된 방법으로 비감쇠 시스템의 경우 가장 효율적인 방법으로 알려져 있다. 이는 Ojalvo[1]의 방법을 수정, 보완한 방법이다. 앞에서도 언급하였듯이 중복된 고유치를 갖는 경우에는 고유벡터를 그대로 사용하지 않고 수치적으로 무리가 없는 변화를 가한 근접벡터(adjacent eigenvector)를 사용한다. 그래서 먼저 이러한 근접벡터를 구하기 위해서 다음과 같은 고유치 문제를 고려한다.

$$\mathbf{K\Psi} = \mathbf{M\Psi\Lambda} \tag{2-1}$$

위 식에서 $\mathbf{\Psi}$ 는 m 개의 고유벡터로 이루어진 $(n\times m)$ 행렬이며, $\mathbf{\Lambda}$ 는 $\mathbf{\Psi}$ 로 기술되는 고유 부공간(eigen-subspace)의 m 차 중복된 고유치인 λ_m 으로 구성된 $(m\times m)$ 대각 행렬이다. 즉, $\mathbf{I}_m$ 를 m 차 단위 행렬이라 할 때 $\mathbf{\Lambda} = \lambda_m\mathbf{I}_m$ 이며, $\mathbf{\Psi}^\mathrm{T}\mathbf{M\Psi} = \mathbf{I}_m$ 이다. 또한 근접벡터로 이루어진 행렬은 직교변환(orthogonal transformation)에 의해 $\mathbf{\Psi}$ 의 항으로 표시될 수 있다.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{\Psi\Gamma} \tag{2-2}$$

여기서, $\mathbf{\Gamma}$ 는 $(m\times m)$ 직교변환행렬이다.

$$\mathbf{Z}^\mathrm{T}\mathbf{MZ} = \mathbf{\Gamma}^\mathrm{T}\mathbf{\Psi}^\mathrm{T}\mathbf{M\Psi\Psi} = \mathbf{\Gamma}^\mathrm{T}\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}_m \tag{2-3}$$

고유벡터의 미분을 구하기 위해서 먼저 직교변환행렬 $\mathbf{\Gamma}$ 를 계산해야 한다.

설계 변수가 변함에 따라 중복되었던 고유치는 서로 다른 m 개의 값을 갖게 되기 때문에, $\mathbf{\Lambda}' = \partial\mathbf{\Lambda} / \partial p = \mathbf{diag}(\lambda_1', \cdots, \lambda_m')$ 로 쓸 수 있다. $\mathbf{\Gamma}$ 를 구하기 위하여 근접벡터로 이루어진 행렬 $\mathbf{Z}$ 로 구성된 고유치 문제를 고려하면 식 (2-4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{KZ} = \mathbf{MZ\Lambda} \tag{2-4}$$

식 (2-4)를 설계 변수에 대해 미분하고 정리하면 다음과 같다.

$$(\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M})\mathbf{Z}' = -(\mathbf{K}' - \lambda_m \mathbf{M}')\mathbf{Z} + \mathbf{MZ\Lambda}' \tag{2-5}$$

식 (2-5)의 양변의 앞에 $\mathbf{\Psi}^\mathbf{T}$ 를 곱하고, $\mathbf{D} \equiv [\mathbf{\Psi}^\mathbf{T}(\mathbf{K}' - \lambda_m \mathbf{M}')\mathbf{\Psi}]$ 와 $\mathbf{Z} = \mathbf{\Psi\Gamma}$ 를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{D\Gamma} = \mathbf{\Gamma\Lambda}' \tag{2-6}$$

새로운 고유치 문제인 식 (2-6)을 풀면 직교변환행렬 $\mathbf{\Gamma}$ 를 구할 수 있다. 그러므로 식 (2-2)에 의해 근접벡터로 이루어진 행렬 $\mathbf{Z}$ 를 구할 수 있다. $\mathbf{Z}'$ 을 구하기 위하여 식 (2-5)의 우변을 $\mathbf{F} \equiv -\left(\mathbf{K}' - \lambda_m \mathbf{M}'\right)\mathbf{Z} + \mathbf{MZ\Lambda}'$ 라고 하면 다음과 같다.

$$(\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M})\mathbf{Z}' = \mathbf{F} \tag{2-7}$$

식 (2-7)의 계수 행렬 $\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M}$ 의 랭크는 (n-m)이므로 정칙 행렬이 아니다. 그러므로 식 (2-7)을 이용하여 $\mathbf{Z}'$ 을 직접 구할 수는 없다. 다음은 $\mathbf{Z}'$ 을 구하는 과정을 정리한 것이다.

만일 $\mathbf{V}$ 가 $(\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M})\mathbf{V} = \mathbf{F}$ 의 해이면, $\mathbf{V} + \mathbf{ZC}$ 도 해가 된다. 여기서, $\mathbf{C}$ 는 $(m \times m)$ 계수 행렬이다. 식 (2-7)에 Nelson[11]의 알고리즘을 적용하면 $\mathbf{V}$ 를 구할 수 있다.

이제 계수 행렬 $\mathbf{C}$ 의 대각 요소를 구하기 위해 정규화조건 $\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{MZ}=\mathbf{I}_m$ 를 설계 변수에 대해 미분한 다음, $\mathbf{Z}'=\mathbf{V}+\mathbf{ZC}$ 를 대입하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{Q}\equiv\mathbf{C}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}=-\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{MZ}-\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{MV}-\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}'\mathbf{Z} \tag{2-8}$$

즉,

$$\mathbf{c}_{ii}=\mathbf{0.5q}_{ii} \tag{2-9}$$

$\mathbf{C}$ 의 비대각 요소는 고유치 문제 $\mathbf{KZ}=\mathbf{MZ\Lambda}$ 를 두 번 미분함으로써 구할 수 있다. 일단 식 (2-4)를 설계 변수에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}'\mathbf{Z}+\mathbf{KZ}'-\mathbf{M}'\mathbf{Z\Lambda}-\mathbf{MZ}'\mathbf{\Lambda}-\mathbf{MZ\Lambda}'=\mathbf{0} \tag{2-10}$$

식 (2-10)을 한 번 더 미분하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&(\mathbf{K}''-\lambda_m\mathbf{M}'')\mathbf{Z}+\mathbf{2}(\mathbf{K}'-\lambda_m\mathbf{M}')\mathbf{Z}'+(\mathbf{K}-\lambda_m\mathbf{M})\mathbf{Z}''\\&\quad-\mathbf{2M}'\mathbf{Z\Lambda}'-\mathbf{2MZ}'\mathbf{\Lambda}'-\mathbf{MZ\Lambda}''=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{2-11}$$

식 (2-11)의 앞에 $\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}$ 를 곱하고, $\mathbf{Z}'=\mathbf{V}+\mathbf{ZC}$ 를 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{K}''-\lambda_m\mathbf{M}'')\mathbf{Z}+\mathbf{2Z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{K}'-\lambda_m\mathbf{M}')\mathbf{V}+\mathbf{2Z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{K}'-\lambda_m\mathbf{M}')\mathbf{ZC}\\&\quad\mathbf{MZ\Lambda}'-\mathbf{2Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{MV\Lambda}'-\mathbf{2Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{MZC\Lambda}'-\mathbf{\Lambda}''=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{2-12}$$

식 (2-12)에 $\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{K}'-\lambda_m\mathbf{M}')\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}[-(\mathbf{K}-\lambda_m\mathbf{M})\mathbf{Z}'+\mathbf{MZ\Lambda}']=\mathbf{\Lambda}'$ 과 $\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{MZ}=\mathbf{I}_m$ 인 관계를 이용하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}&\equiv\mathbf{C\Lambda}'-\mathbf{\Lambda}'\mathbf{C}+\mathbf{0.5\Lambda}''\\&=\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{K}'-\lambda_m\mathbf{M}')\mathbf{V}-\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{M}'\mathbf{Z}+\mathbf{MV})\mathbf{\Lambda}'+\mathbf{0.5Z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{K}''-\lambda_m\mathbf{M}'')\mathbf{Z}\end{aligned} \tag{2-13}$$

식 (2-13)에서 $\boldsymbol{\Lambda}''$ 는 대각 행렬이고, $\mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}' - \boldsymbol{\Lambda}'\mathbf{C}$ 는 대각 요소가 $\mathbf{0}$ 인 행렬이기 때문에 $\mathbf{C}$ 와 $\boldsymbol{\Lambda}''$ 를 이 식에서 개별적으로 구할 수 있다. $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_{ij}]$, $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_{ij}]$, $\Lambda' = \partial\Lambda / \partial p = \mathbf{diag}(\lambda_1', \cdots, \lambda_m')$ 그리고 $\Lambda'' = \mathbf{diag}(\lambda_1'', \cdots, \lambda_m'')$ 이므로 다음과 같이 $\mathbf{r}_{ij}$ 를 구할 수 있다.

$$\mathbf{r}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{c}_{ij}(\lambda_j' - \lambda_i') & \text{if } j \neq i \\ \mathbf{0.5}\lambda_i'' & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2-14}$$

그러므로, $\lambda_j' \neq \lambda_i'$ 이면 $\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{r}_{ij} / (\lambda_j' - \lambda_i')$ 이고 식 (2-9)에서 $\mathbf{c}_{ii} = \mathbf{0.5q}_{ii}$ 이다. 중복된 고유벡터의 미분값이 존재할 때, 즉 $\lambda_j' = \lambda_i' (j \neq i)$ 이면, 설계 변수가 변해도 원래의 m 차원 고유 부공간은 m 개의 서로 다른 고유치로 변하지 않는다. 이 경우 고유벡터의 미분이 유일하지 않기 때문에 계수 행렬 $\mathbf{C}$ 가 제한조건 $\mathbf{c}_{ij} + \mathbf{c}_{ji} = \mathbf{q}_{ij} = \mathbf{q}_{ji}$ 을 만족하면, $\mathbf{Z}' = \mathbf{V} + \mathbf{ZC}$ 의 어떠한 행도 고유벡터의 미분으로써 유효하다.

이 방법은 정확한 해를 구하고, 중복된 고유치에 해당하는 고유벡터의 미분을 구하기 위해 중복된 고유쌍만이 필요하다는 장점을 가지고 있다. 그렇지만, 알고리즘이 복잡해서 계산 시간이 많이 걸릴 뿐만 아니라, 결정적으로 $\mathbf{K}''$ 과 $\mathbf{M}''$ 의 계산이 필요하게 된다.

2.1.2 Lee et al.(2001)의 방법[14]

이 방법은 Lee et al.(1999)[9] 방법에서 고유치의 미분을 기존의 방법을 그대로 사용해 고유벡터의 미분과 따로 구했으나, Lee et al.(2001)[14] 방법에서는 서로 다른 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 경우 고유치 문제의 미분식을 재정리하여 그대로 사용함으로써 고유치와 고유벡터의 미분을 하나의 식으로 동시에 구할 수 있는 아주 효율적인 방법이다.

감쇠 시스템의 동적 해석에서 일반화된 고유치 문제는 다음과 같다.

$$(\lambda_j^2\mathbf{M} + \lambda_j\mathbf{C} + \mathbf{K})\phi_j = \mathbf{0} \tag{2-15}$$

여기서 $\mathbf{M}$ 은 시스템의 질량 행렬, $\mathbf{C}$ 는 감쇠 행렬 그리고 $\mathbf{K}$ 는 강성 행렬로써 $\mathbf{M}$ 은 양의 한정(positive definite), $\mathbf{C}$ 와 $\mathbf{K}$ 는 반양의 한정(semi-positive definite)이며 모두 n 차의 대칭 행렬이다. 그리고 λ_j 는 시스템의 j 번째 고유치이고, ϕ_j 는 j 번째 고유벡터이다.

감쇠 시스템의 경우 고유벡터는 다음의 상태 공간 방정식(state space equation)을 사용해 정규화 시킨다.

$$\mathbf{A}\mathbf{z}_j = \lambda_j\mathbf{B}\mathbf{z}_j \tag{2-16}$$

여기서 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 그리고 $\mathbf{z}_j = \begin{Bmatrix} \phi_j \\ \lambda_j\phi_j \end{Bmatrix}$ 이다.

식 (2-16)의 고유벡터 $\mathbf{z}_j$ 를 수정 질량 $\mathbf{B}$ 에 대하여 정규화 시키면 다음과 같다.

$$\mathbf{z}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{z}_j = \begin{Bmatrix} \phi_j \\ \lambda_j\phi_j \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_j \\ \lambda_j\phi_j \end{Bmatrix} = \phi_j^{\mathrm{T}}(\mathbf{2}\lambda_j\mathbf{M} + \mathbf{C})\phi_j = \mathbf{1} \tag{2-17}$$

일반화된 고유치 문제 식 (2-15)를 설계 변수에 대해 미분하여 정리하면 다음과 같다.

$$(\lambda_j^{\mathbf{2}}\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K})\,\phi_j'+(\mathbf{2}\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\,\phi_j\lambda_j'=-(\lambda_j^2\mathbf{M}'+\lambda_j\mathbf{C}'+\mathbf{K}')\phi_j \tag{2-18}$$

부가 조건으로는 정규화 조건(normalization condition)의 미분을 사용한다. 정규화 조건 식 (2-17)을 설계 변수에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\phi_j^{\mathbf{T}}(\mathbf{2}\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\phi_j'+\phi_j^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\phi_j\lambda_j'=-\mathbf{0.5}\phi_j^{\mathbf{T}}(\mathbf{2}\lambda_j\mathbf{M}'+\mathbf{C}')\phi_j \tag{2-19}$$

식 (2-18)과 식 (2-19)를 합쳐 하나의 선형대수방정식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \lambda_j^2\mathbf{M}+\lambda_j\mathbf{C}+\mathbf{K} & (\mathbf{2}\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C})\phi_j \\ \phi_j^{\mathbf{T}}(\mathbf{2}\lambda_j\mathbf{M}+\mathbf{C}) & \phi_j^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\phi_j \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi_j' \\ \lambda_j' \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} (\lambda_j^2\mathbf{M}'+\lambda_j\mathbf{C}'+\mathbf{K}')\phi_j \\ \mathbf{0.5}\phi_j^{\mathbf{T}}(\mathbf{2}\lambda_j\mathbf{M}'+\mathbf{C}')\phi_j \end{Bmatrix} \tag{2-20}$$

이 식이 Lee et al.(2001)[14]방법의 핵심이다. Lee et al.(1999)[9]방법에서는 고유치의 미분을 기존의 방법을 그대로 사용해 고유벡터의 미분과 따로 구했으나, 이 방법에서는 고유치 문제의 미분식을 재 정리해서 그대로 사용함으로써 고유치와 고유벡터의 미분을 하나의 식으로 동시에 구할 수 있다. 매우 간단한 식이며, 고유치와 고유벡터의 미분을 구하기 위해 해당 고유쌍의 정보만을 필요로 한다. 그리고 계수 행렬이 대칭이어서 계산 시간 및 계산 용량에 있어 매우 효율적이며, 계수 행렬의 정칙성을 지니고 있어

수치적 안정성을 보장한다. 물론 ‘N-space’에 근거한 해석을 유지함은 물론이다. Lee et al.(2001)[14]방법은 서로 다른 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 민감도를 구하기 위한 가장 효율적인 방법이다.

2.1.3 Friswell 의 방법[13]

이 방법은 서로 다른 고유치를 갖는 비감쇠 시스템의 고유치와 고유벡터의 2 차 미분을 구하기 위해 개발된 방법으로 Nelson[11]의 방법을 2 차 민감도까지 확장한 방법이다. Nelson[11]의 방법을 간단하게 살펴보면 다음과 같다.

고유치의 미분은 기존 방법에 의해 구하고 고유벡터의 미분은 특이해(particular solution)와 비특이해(homogeneous solution)의 합으로 구하는 방법이다. 고유쌍의 미분을 구하는 식은 다음과 같다.

$$\lambda_j' = \phi_j^{\mathbf{T}} (\mathbf{K}' - \lambda_j \mathbf{M}') \phi_j \tag{2-21}$$

$$\phi_j' = \mathbf{v}_j + \mathbf{c}_j \phi_j \tag{2-22}$$

여기서, $\mathbf{c}_j = -\phi_j^{\mathbf{T}} \mathbf{M} \mathbf{v}_j - \mathbf{0.5} \phi_j^{\mathbf{T}} \mathbf{M}' \phi_j$ 이며 $\mathbf{v}_j$ 는 다음 식을 통해서 구해진다.

$$\mathbf{D}_j \mathbf{v}_j = \mathbf{b}_j \tag{2-23}$$

단, 시스템의 j 번째 고유벡터의 요소 중에서 가장 큰 값에 해당하는 위치를 k 라 한다면 $\mathbf{D}_j$ 의 k 번째 행과 열을 0 으로 만들고 $\mathbf{D}_j$ 의 (k, k)요소를 1 로 놓고 $\mathbf{b}_j$ 의 k 번째 요소를 0 으로 해서 식 (2-23)을 푼다.

여기서, $\mathbf{D}_j = (\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M})$ 이며 $\mathbf{b}_j = \lambda_j' \mathbf{M} \phi_j - (\mathbf{K}' - \lambda_j \mathbf{M}') \phi_j$ 이다.

비감쇠 시스템의 고유쌍의 2 차 민감도를 구하기 위한 Friswell[13]방법은 Nelson[11]방법과 마찬가지로 특이해와 비특이해의 합으로 고유벡터의 2 차 미분을 구하며 비특이해를 구하는 알고리즘도 비슷하다.

$$\lambda_{j,\alpha\beta} = \phi_j^{\mathbf{T}}(\mathbf{K}_{,\alpha\beta} - \lambda_j \mathbf{M}_{,\alpha\beta} - \lambda_{j,\alpha}\mathbf{M}_{,\beta} - \lambda_{j,\beta}\mathbf{M}_{,\alpha})\phi_j + \phi_j^{\mathbf{T}}(\mathbf{K}_{,\alpha} - \lambda_{j,\alpha}\mathbf{M} - \lambda_j \mathbf{M}_{,\alpha})\phi_{j,\beta} + \phi_j^{\mathbf{T}}(\mathbf{K}_{,\beta} - \lambda_{j,\beta}\mathbf{M} - \lambda_j \mathbf{M}_{,\beta})\phi_{j,\alpha} \quad (2\text{-}24)$$

$$\phi_{j,\alpha\beta} = \mathbf{v}_{j\alpha\beta} + \mathbf{c}_{j\alpha\beta}\phi_j \quad (2\text{-}25)$$

여기서, $\mathbf{v}_{j\alpha\beta}$ 는 다음 식의 해이다.

$$\mathbf{D}_j \mathbf{v}_{j\alpha\beta} = \mathbf{b}_{j\alpha\beta} \quad (2\text{-}26)$$

그리고, $\mathbf{c}_{j\alpha\beta}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{c}_{j\alpha\beta} = -\mathbf{0.5}\phi_j^{\mathbf{T}}\mathbf{M}_{,\alpha\beta}\phi_j - (\mathbf{K} - \lambda_j\mathbf{M})_{,\alpha}\phi_{j,\beta} - (\mathbf{K} - \lambda_j\mathbf{M})_{,\beta}\phi_{j,\alpha} \quad (2\text{-}27)$$

단, $\mathbf{b}_{j\alpha\beta} = -(\mathbf{K} - \lambda_j\mathbf{M})_{,\alpha\beta}\phi_j - (\mathbf{K} - \lambda_j\mathbf{M})_{,\alpha}\phi_{j,\beta} - (\mathbf{K} - \lambda_j\mathbf{M})_{,\beta}\phi_{j,\alpha}$ 이다.

나머지 과정은 Nelson[11]의 방법과 비슷하다. 감쇠 시스템으로 적용하기 위해선 상태공간방정식(2N-space)도입이 필요하다.

2.2 제안 방법

2.2.1 제안 방법의 알고리즘

제안 방법은 중복된 고유치를 갖는 비감쇠 시스템의 고유쌍의 민감도를 구하기 위한 가장 효율적인 Lee 와 Jung[8]방법을 기본으로 Lee et al.(2001)[14]에서 제안한 방법을 적용하여 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 민감도를 구하기 위한 방법으로 확장한 방법이다. 제안식을 유도해 보자.

감쇠 시스템의 고유치 문제는 다음과 같다.

$$(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K})\phi = \mathbf{0} \tag{2-28}$$

근접벡터를 구하기 위해서 먼저 중복된 고유치에 해당되는 고유벡터로 이루어진 행렬 $\mathbf{\Phi}_m$을 구성하면, 고유치 문제는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{M\Phi}_m\mathbf{\Lambda}_m^2 + \mathbf{C\Phi}_m\mathbf{\Lambda}_m + \mathbf{K\Phi}_m = \mathbf{0} \tag{2-29}$$

여기서, $\mathbf{\Lambda}_m = \lambda_m\mathbf{I}_m$ 그리고 $\mathbf{\Phi}_m = [\phi_{i+1}\ \phi_{i+2}\ \cdots\ \phi_{i+m}]$.

$\mathbf{I}_m$은 m차 단위 행렬이고, λ_m은 m차 중복된 고유치이다.

(i+1)번째 고유벡터에 대한 정규화 조건은 다음과 같다.

$$\phi_{i+1}^{\mathbf{T}}(2\lambda_{i+1}\mathbf{M} + \mathbf{C})\phi_{i+1} = \mathbf{1} \tag{2-30}$$

고유벡터로 이루어진 행렬 $\mathbf{\Phi}_m$에 해당되는 정규화 조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{\Phi}_m^{\mathbf{T}}(2\lambda_m\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{\Phi}_m = \mathbf{I}_m \tag{2-31}$$

근접벡터로 이루어진 행렬은 직교변환(orthonormal transformation)에 의해 $\mathbf{\Phi}_m$의 항으로 표시하여 구할 수 있다.

$$\mathbf{X}_m = \boldsymbol{\Phi}_m \mathbf{T} \tag{2-32}$$

여기서, **T** 는 $(m \times m)$ 직교변환행렬이다.

$$\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \mathbf{I}_m \tag{2-33}$$

근접벡터로 이루어진 행렬 $\mathbf{X}_m$ 또한 정규화 조건을 만족한다.

$$\mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}(\mathbf{2}\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{X}_m = \mathbf{T}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Phi}_m^{\mathbf{T}}(\mathbf{2}\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\boldsymbol{\Phi}_m\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \mathbf{I}_m \tag{2-34}$$

근접벡터로 이루어진 행렬 $\mathbf{X}_m$ 를 구하기 위해서는 먼저 직교변환행렬 **T** 를 구해야 한다. 직교변환행렬 **T** 를 구하기 위해 다음과 같은 고유치 문제를 생각해 보자.

$$\mathbf{M}\mathbf{X}_m\boldsymbol{\Lambda}_m^{\mathbf{2}} + \mathbf{C}\mathbf{X}_m\boldsymbol{\Lambda}_m + \mathbf{K}\mathbf{X}_m = \mathbf{0} \tag{2-35}$$

여기서, 근접벡터로 이루어진 행렬 $\mathbf{X}_m$ 의 차수는 $(n \times m)$ 이고, Λ_m 의 차수는 $(m \times m)$이다.

고유치 문제 식(2-35)를 설계 변수에 대해 미분한 후 정리하면 다음과 같다.

$$(\lambda_m^{\mathbf{2}}\mathbf{M}+\lambda_m\mathbf{C}+\mathbf{K})\mathbf{X}_m' + (\mathbf{2}\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{X}_m\boldsymbol{\Lambda}_m' = -(\lambda_m^{\mathbf{2}}\mathbf{M}'+\lambda_m\mathbf{C}'+\mathbf{K}')\mathbf{X}_m \tag{2-36}$$

식 (2-36)의 양변에 $\boldsymbol{\Phi}_m^{\mathbf{T}}$ 를 곱하고, $\mathbf{X}_m = \boldsymbol{\Phi}_m\mathbf{T}$ 를 대입하여 정리하면 다음과 같은 새로운 고유치 문제를 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{D}\mathbf{T} = \mathbf{E}\mathbf{T}\boldsymbol{\Lambda}_m' \tag{2-37}$$

여기서, $\mathbf{D} = \boldsymbol{\Phi}_m^{\mathbf{T}}(\lambda_m^{\mathbf{2}}\mathbf{M}'+\lambda_m\mathbf{C}'+\mathbf{K}')\boldsymbol{\Phi}_m$ 그리고 $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\Phi}_m^{\mathbf{T}}(\mathbf{2}\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\boldsymbol{\Phi}_m = -\mathbf{I}_m$

식 (2-37)을 풀면 직교변환행렬 **T** 를 구할 수 있고, 이를 사용하여 근접 벡터로 이루어진 행렬 $\mathbf{X}_m$ 를 식 (2-32)에 의해 구할 수 있다.

정규화 조건 식 (2-34)을 설계 변수에 대해 미분한 후 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}(\mathbf{2}\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{X}'_m+\mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_m\Lambda'_m=-\mathbf{0.5}\mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{2}\lambda_m\mathbf{M}'+\mathbf{C}'\right)\mathbf{X}_m \tag{2-38}$$

식 (2-36)와 식 (2-38)를 합쳐 하나의 선형대수방정식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\lambda_m^2\mathbf{M}+\lambda_m\mathbf{C}+\mathbf{K} & (\mathbf{2}\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{X}_m \\ \mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}(\mathbf{2}\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C}) & \mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{X}'_m \\ \Lambda'_m\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-(\lambda_m^2\mathbf{M}'+\lambda_m\mathbf{C}'+\mathbf{K}')\mathbf{X}_m \\ -\mathbf{0.5}\mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}(\mathbf{2}\lambda_m\mathbf{M}'+\mathbf{C}')\mathbf{X}_m\end{bmatrix} \tag{2-39}$$

이 식이 제안방법의 핵심이다. 중복된 고유치를 갖는 비감쇠 시스템의 고유쌍의 민감도를 구하기 위한 가장 효율적인 Lee 와 Jung[8]방법을 기본으로 Lee et al.(2001) 방법에서의 고유치 문제의 미분식을 재 정리해서 그대로 사용함으로써 고유치와 고유벡터의 미분을 하나의 식으로 동시에 구할 수 있는 알고리즘을 사용하여 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 경우로 확장한 방법이다. 매우 간단한 식이며, 고유치와 고유벡터의 미분을 구하기 위해 해당 고유쌍의 정보만을 필요로 한다. 그리고 계수 행렬이 정칙성을 지니고 있어 수치적 안정성을 보장한다. 물론 ‘N-space’에 근거한 해석을 유지함은 물론이다. 수치적 안정성에 대한 증명은 2.2.3 절에서 하겠다.

2.2.2 2 차 미분으로의 확장

고유치와 고유벡터 2 차 미분의 중요성은 이미 앞에서 설명하였다. 제안한 식을 바탕으로 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 고유쌍의 2 차 미분을 구할 수 있는 식으로 확장해 보겠다. 이를 위해 본 방법에서는 고유치 문제 식 (2-35)과 정규화 조건 식 (2-34)을 두 번 미분한 식을 사용한다. 좀 더 일반적으로 고유쌍의 2 차 미분을 구하기 위해 두 개의 설계 변수 (α, β)에 대한 미분을 구하겠다. 우선 고유치 문제 식 (2-35)을 미분해 보자. 설계 변수 (α, β)에 대해 미분하기 위해 먼저 설계 변수 (α)에 대해 미분하면 식 (2-36)이 되고, 이를 설계 변수 (β)에 대하여 한 번 더 미분하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_m^2\mathbf{M} + \lambda_m\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{X}_{m,\alpha\beta} + (2\lambda_m\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{X}_m\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha\beta} = \\
&\qquad -(\tilde{\mathbf{F}}_{m,\beta} + \mathbf{G}_m\mathbf{\Lambda}_{m,\beta})\mathbf{X}_{m,\alpha} + (\tilde{\mathbf{F}}_{m,\alpha} + \mathbf{G}_m\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_{m,\beta} \\
&\qquad + (\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{m,\alpha\beta} + \tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha}\mathbf{\Lambda}_{m,\beta} + \tilde{\mathbf{G}}_{m,\beta}\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_m + 2\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha}\mathbf{\Lambda}_{m,\beta}\mathbf{M}\mathbf{X}_m
\end{aligned}
\tag{2-40}
$$

마찬가지로 정규화 조건 식 (2-34)을 설계 변수 (α, β)에 대해 미분하기 위해 우선 설계 변수 (α)에 대하여 미분하면 식 (2-38)가 되고, 이를 설계 변수 (β)에 대하여 한 번 더 미분하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{X}_m^{\mathrm{T}}(2\lambda_m\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{X}_{m,\alpha\beta} + \mathbf{X}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_m\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha\beta} = \\
&\qquad -\mathbf{X}_{m,\alpha}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_m\mathbf{X}_{m,\beta} + \mathbf{X}_m^{\mathrm{T}}(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\beta} + 2\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}_{m,\beta})\mathbf{X}_{m,\alpha} + \mathbf{X}_m^{\mathrm{T}}(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha} + 2\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_{m,\beta} \\
&\qquad + 0.5\mathbf{X}_m^{\mathrm{T}}(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha\beta} + 2\mathbf{M}_{,\alpha}\mathbf{\Lambda}_{m,\beta} + 2\mathbf{M}_{,\beta}\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_m
\end{aligned}
\tag{2-41}
$$

여기서, 각 항이 의미하는 바는 다음과 같다.

$$\mathbf{F}_m = [\lambda_m^2\mathbf{M} + \lambda_m\mathbf{C} + \mathbf{K}], \qquad \tilde{\mathbf{F}}_{m,\alpha} = [\lambda_m^2\mathbf{M}_{,\alpha} + \lambda_m\mathbf{C}_{,\alpha} + \mathbf{K}_{,\alpha}],$$
$$\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{m,\alpha\beta} = [\lambda_m^2\mathbf{M}_{,\alpha\beta} + \lambda_m\mathbf{C}_{,\alpha\beta} + \mathbf{K}_{,\alpha\beta}]$$
$$\mathbf{G}_m = [2\lambda_m\mathbf{M} + \mathbf{C}], \qquad \tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha} = [2\lambda_m\mathbf{M}_{,\alpha} + \mathbf{C}_{,\alpha}],$$
$$\tilde{\tilde{\mathbf{G}}}_{m,\alpha\beta} = [2\lambda_m\mathbf{M}_{,\alpha\beta} + \mathbf{C}_{,\alpha\beta}]$$

식 (2-40)과 식 (2-41)을 합쳐 하나의 선형대수방정식 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \lambda_m^2\mathbf{M} + \lambda_m\mathbf{C} + \mathbf{K} & (2\lambda_m\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{X}_m \\ \mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}(2\lambda_m\mathbf{M} + \mathbf{C}) & \mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_{m,\alpha\beta} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{m,\alpha\beta} \end{Bmatrix}$$
$$= -\begin{Bmatrix} (\tilde{\mathbf{F}}_{m,\beta} + \mathbf{G}_m\boldsymbol{\Lambda}_{m,\beta})\mathbf{X}_{m,\alpha} + (\tilde{\mathbf{F}}_{m,\alpha} + \mathbf{G}_m\boldsymbol{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_{m,\beta} \\ \quad + (\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{m,\alpha\beta} + \tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_{m,\beta} + \tilde{\mathbf{G}}_{m,\beta}\boldsymbol{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_m + \mathbf{2}\boldsymbol{\Lambda}_{m,\alpha}^2\boldsymbol{\Lambda}_{m,\beta}^2\mathbf{M}\mathbf{X}_m \\ \mathbf{X}_{m,\alpha}^{\mathbf{T}}\mathbf{G}_m\mathbf{X}_{m,\beta} + \mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\beta} + \mathbf{2M}\boldsymbol{\Lambda}_{m,\beta})\mathbf{X}_{m,\alpha} + \mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha} + \mathbf{2M}\boldsymbol{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_{m,\beta} \\ \quad + \mathbf{0.5}\mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}(\tilde{\tilde{\mathbf{G}}}_{m,\alpha\beta} + \mathbf{2M}_{,\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_{m,\beta} + \mathbf{2M}_{,\beta}\boldsymbol{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_m \end{Bmatrix}$$

(2-42)

식 (2-42)가 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 고유치와 고유벡터의 2 차 미분을 구하는 식이다. 1 차 미분을 구하는 식과 비슷한데, 좌변의 계수 행렬은 변하지 않고 우변만 달라진다. 제안식의 우변을 보면 고유쌍의 1 차 미분이 필요한 것을 볼 수 있다. 즉, 식 (2-39)을 통해 고유쌍의 1 차 미분을 구한 후 식 (2-42)을 이용해 2 차 미분값을 구할 수 있다는 것이다.

위와 마찬가지로 고유치 문제와 정규화 조건의 3 차 미분식을 하나의 선형

대수방정식으로 합치면 고유쌍의 3 차 미분을 구할 수 있고, 그 이상 고차 미분식에 대해서도 같은 방법으로 적용할 수 있다.

하나의 설계 변수로 고유쌍의 2 차 미분을 구하는 경우 ($\alpha = \beta$), 제안식 (2-42)는 다음과 같이 간단해 진다.

$$\begin{bmatrix} \lambda_m^2 \mathbf{M} + \lambda_m \mathbf{C} + \mathbf{K} & (2\lambda_m \mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{X}_m \\ \mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}(2\lambda_m \mathbf{M} + \mathbf{C}) & \mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_{m,\alpha\alpha} \\ \mathbf{\Lambda}_{m,\alpha\alpha} \end{Bmatrix}$$
$$= -\begin{Bmatrix} 2(\tilde{\mathbf{F}}_{m,\alpha} + \mathbf{G}_m \mathbf{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_{m,\alpha} + (\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{m,\alpha\alpha} + 2\tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha}\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha} + 2\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}^2_{m,\alpha})\mathbf{X}_m \\ \mathbf{X}_{m,\alpha}^{\mathbf{T}}\mathbf{G}_m\mathbf{X}_{m,\alpha} + \mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}(2\tilde{\mathbf{G}}_{m,\alpha} + 4\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_{m,\alpha} + 0.5\mathbf{X}_m^{\mathbf{T}}(\tilde{\tilde{\mathbf{G}}}_{m,\alpha\alpha} + 4\mathbf{M}_{,\alpha}\mathbf{\Lambda}_{m,\alpha})\mathbf{X}_m \end{Bmatrix}$$

(2-43)

2.2.3 수치적 안정성 증명

제안 방법의 수치적 안정성은 제안식 (2-39)의 계수 행렬 $\mathbf{A}^*$의 정칙성(non-singularity)을 증명함으로 보장이 된다. 계수 행렬 $\mathbf{A}^*$가 정칙 행렬(non-singular matrix)임을 증명하기 위해 다음의 성질을 도입한다.

$$\mathbf{det}(\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{*}\mathbf{Y}) = \mathbf{det}(\mathbf{Y}^{\mathrm{T}})\,\mathbf{det}(\mathbf{A}^{*})\,\mathbf{det}(\mathbf{Y}) \tag{2-44}$$

즉, $\mathbf{det}(\mathbf{Y}) \neq \mathbf{0}$ 인 행렬 $\mathbf{Y}$ 에 대해 $\mathbf{det}(\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{*}\mathbf{Y}) \neq \mathbf{0}$ 임을 증명하면, $\mathbf{det}(\mathbf{A}^{*}) \neq \mathbf{0}$ 이므로 행렬 $\mathbf{A}^*$는 정칙 행렬이다. 여기서, $\mathbf{A}^*$는 식 (2-39)의 계수 행렬로 다음과 같다.

$$\mathbf{A}^{*} = \begin{bmatrix} \lambda_m^2\mathbf{M} + \lambda_m\mathbf{C} + \mathbf{K} & (\mathbf{2}\lambda_m\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{X}_m \\ \mathbf{X}_m^{\mathrm{T}}(\mathbf{2}\lambda_m\mathbf{M} + \mathbf{C}) & \mathbf{X}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_m \end{bmatrix} \tag{2-45}$$

정칙 행렬인 임의의 행렬 $\mathbf{Y}$ 를 다음과 같이 정하자.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \tag{2-46}$$

여기서, $\boldsymbol{\Psi} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_{n\text{-}m} \ \ x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_m]$, x_j 는 j 번째 고유벡터이고, $\phi'\mathbf{s}$ 는 x_j 와 서로 독립인 임의의 벡터이다. 따라서, 행렬 $\mathbf{Y}$ 의 모든 행 벡터들은 서로 독립이므로 행렬 $\mathbf{Y}$ 는 정칙 행렬이다. 계수 행렬 식 (2-45)의 앞뒤에 $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}$ 와 $\mathbf{Y}$ 를 곱해 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{*}\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\lambda_m^2\mathbf{M}+\lambda_m\mathbf{C}+\mathbf{K} & (2\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{X}_m\\ \mathbf{X}_m^{\mathrm{T}}(2\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C}) & \mathbf{X}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(\lambda_m^2\mathbf{M}+\lambda_m\mathbf{C}+\mathbf{K})\boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(2\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{X}_m\\ \mathbf{X}_m(2\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\boldsymbol{\Psi} & \mathbf{X}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_m\end{bmatrix} \quad (2\text{-}47)$$

여기서, 행렬 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(\lambda_m^2\mathbf{M}+\lambda_m\mathbf{C}+\mathbf{K})\boldsymbol{\Psi}$ 의 마지막 m 번째 행과 열은 $\boldsymbol{\Psi}$ 의 마지막 열이 고유벡터 x_j 이기 때문에 일반적인 고유치 문제를 통해 0 으로 구성된다. 따라서 행렬 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(\lambda_m^2\mathbf{M}+\lambda_m\mathbf{C}+\mathbf{K})\boldsymbol{\Psi}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(\lambda_m^2\mathbf{M}+\lambda_m\mathbf{C}+\mathbf{K})\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix} \quad (2\text{-}48)$$

여기서, $\tilde{\mathbf{A}}$ 는 non-zero 요소들로 구성된 $(n\text{-}m)\times(n\text{-}m)$ 행렬이고, 랭크도 $(n\text{-}m)$이다. 그리고 행렬 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(\lambda_m^2\mathbf{M}+\lambda_m\mathbf{C}+\mathbf{K})\boldsymbol{\Psi}$ 의 차수는 n 이고 랭크는 $(n\text{-}m)$이므로 $\tilde{\mathbf{A}}$ 는 정칙 행렬이다. 즉, $\mathbf{det}(\tilde{\mathbf{A}})\neq\mathbf{0}$.

식 (2-47)의 행 벡터와 열 벡터 마지막 항은 정규화 조건에 의해 다음과 같이 된다.

$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(2\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\mathbf{X}_m=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{B}}\\ \mathbf{I}_m\end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_m^{\mathrm{T}}(2\lambda_m\mathbf{M}+\mathbf{C})\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{B}}\\ \mathbf{I}_m\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad (2\text{-}49)$$

여기서, $\tilde{\mathbf{B}}$ 는 일반적으로 non-zero 요소들로 구성된 행렬이다.

식 (2-48)와 식 (2-49)를 사용하여 식 (2-47)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{*}\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{B}}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m\\ \tilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{I}_m & \mathbf{X}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_m\end{bmatrix} \quad (2\text{-}50)$$

이 행렬의 행렬식(determinant)을 구하기 위해 다음의 분할된 행렬의 행렬식 성질을 이용한다.

$$\mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}\right) = \mathbf{det\,A} \times \mathbf{det(D - CA^{-1}B)} \tag{2-51}$$

이를 이용해 식 (2-50)의 행렬식을 구하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{det(Y^T A^* Y)} &= \mathbf{det(\tilde{A})} \times \mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{X}_m^T \mathbf{M} \mathbf{X}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \end{bmatrix} [\tilde{\mathbf{A}}]^{-1} [\mathbf{0} \quad \tilde{\mathbf{B}}]\right) \\ &= -\,\mathbf{det(A)} \neq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2-52}$$

따라서 식 (2-52)에 의해 $\mathbf{det(A^*)} \neq \mathbf{0}$, 즉 행렬 $\mathbf{A}^*$는 정칙 행렬(non-singular matrix)임이 증명된다.

제 3 장 수치 예제

제안 방법의 효율성과 적용성을 검증하기 위하여 수치 예제를 수행하였다. 중복된 고유치를 갖는 시스템 예제로써 비례 감쇠 시스템과 비비례 감쇠 시스템 두 가지를 고려하자. 첫 번째 예제로는 비례 감쇠 시스템으로 정사각형 단면을 갖는 외팔보(cantilever beam)의 유한요소모델이다. 두 번째 예제로는 비비례 감쇠 시스템으로 5 자유도 평판 기계 시스템을 사용한다.

우선 고유치 해석을 통해 시스템의 고유치와 고유벡터를 구하여 중복된 고유치를 갖는 경우임을 확인하였다. 중복된 고유치의 경우와 서로 다른 고유치를 갖는 경우를 구별하는 방법으로 다음과 같은 식으로 정하였다.

$$\begin{aligned} &\textbf{중복된 고유치} \quad : \left| 1 - \frac{\lambda(i+1)}{\lambda(i)} \right| < 0.0001 \\ &\textbf{서로 다른 고유치} : \left| 1 - \frac{\lambda(i+1)}{\lambda(i)} \right| \geq 0.0001 \end{aligned} \qquad (3\text{-}1)$$

다음으로는 제안 방법을 이용해 고유치와 고유벡터의 1, 2 차 미분값을 구했다.

제안 방법의 민감도 해석을 통해 구한 바뀐 시스템의 고유치와 고유벡터의 결과를 검증하기 위해 다음과 같은 식을 사용하여 제안 방법의 적용성을 검증하였다.

$$\begin{aligned} \text{Error of } \lambda &= \left| \frac{\lambda_{changed} - \bar{\lambda}_{changed}}{\lambda_{changed}} \right| \\ \text{Error of } \phi &= \left\| \frac{\phi_{changed} - \bar{\phi}_{changed}}{\phi_{changed}} \right\| \end{aligned} \qquad (3\text{-}2)$$

여기서, $\lambda_{changed}$ 는 설계 변수의 변화로 인해 바뀐 시스템을 고유치 해석을 통해 구한 실제 고유치이고, $\phi_{changed}$ 는 설계 변수의 변화로 인해 바뀐 시스템을 고유치 해석을 통해 구한 실제 고유벡터이다. $\bar{\lambda}_{changed}$ 는 민감도 해석을 통해 구한 바뀐 시스템의 고유치의 근사값이고, $\bar{\phi}_{changed}$ 는 민감도 해석을 통해 구한 바뀐 시스템의 고유벡터의 근사값이다. $\bar{\lambda}_{changed}$ 과 $\bar{\phi}_{changed}$ 는 Taylor 급수에 의해 1 차 미분까지만 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{changed} &= \lambda_{initial} + \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\Delta\alpha \\ \bar{\phi}_{changed} &= \phi_{initial} + \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}\Delta\alpha \end{aligned} \tag{3-3}$$

여기서, α 는 시스템의 설계 변수이다.

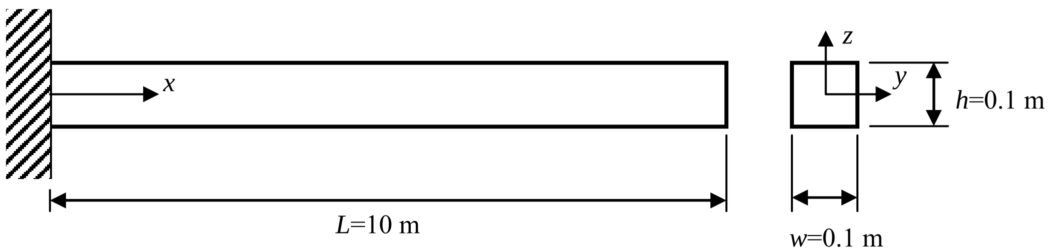
3.1 정사각형 단면을 갖는 외팔보(Cantilever beam with square section)[8]

비례 감쇠 시스템으로 정사각형 단면을 갖는 그림 3.1 과 같은 외팔보를 생각해 보자. 이 시스템은 21 개의 절점을 가지고 절점당 4 자유도(y-변위, z-변위, y-각변위, z-각변위)를 가진다. 탄성 계수는 2.10×10^{11} N/m^2 이고, 질량 밀도는 7.85×10^3 kg/m^3 이다. 외팔보의 높이와 폭은 모두 0.1 m 로 동일하고, 길이는 10 m 이다.

감쇠 행렬은 다음과 같이 강성 행렬과 질량 행렬의 합으로 정의되는 Rayleigh damping 으로 가정한다.

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M} \qquad (3\text{-}4)$$

여기서, α 와 β 는 Rayleigh coefficients 이다.



System Data	**Material Properties**
Number of nodes: 21	Young's Modulus: E=2.10×10^{11}
Number of elements: 20	Mass density: ρ=7.85×10^3 kg/m^3
Number of DOF: 80	Design parameter: width of beam (w)

그림 3.1 정사각형 단면을 갖는 외팔보

시스템의 고유치 해석과 제안 방법에 의한 민감도 해석 결과 일부를 표 3.1, 표 3.2 그리고 표 3.3 에 나타내었다. 표 3.1 에서는 원래 시스템의 고유치와 고유치의 1, 2 차 미분값을 나타냈으며, 표 3.2 에서는 원래 시스템의 첫 번째 고유벡터와 고유벡터의 1, 2 차 미분값을 나타냈으며, 마지막으로 표 3.3 에서는 설계 변수의 변화로 인해 바뀐 시스템을 고유치 해석을 통해 구한 고유치와 제안 방법의 민감도 해석을 통해 구한 고유치의 근사값, 그리고 고유쌍 근사값의 오차를 나타내었다.

표 3.1 의 두 번째 열에서 보다시피 첫 번째, 두 번째 고유치가 서로 켤레복소수 형태로 나타나고 이는 세 번째, 네 번째 고유치와 동일한 값을 가짐을 볼 수 있다. 이는 본 예제로 사용한 정사각형 단면을 갖는 외팔보는 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템임을 확인할 수 있다. 그리고 세 번째 열에서 보다시피 중복된 고유치에 해당되는 1 차 미분값 중 하나는 0 에 가깝고, 나머지는 그렇지 않음으로 서로 다름을 알 수 있다. 마지막 열에는 2 차 민감도 해석을 수행한 뒤, 고유치의 2 차 미분값을 나타내었다.

표 3.3 의 두 번째 열과 세 번째 열에는 설계 변수 w 를 Δw=0.01w 만큼 변화시켰을 때 바뀐 시스템의 고유치를 나타내고 있다. 민감도 해석의 적용성을 검증하기 위해 설계 변수의 변화로 인해 바뀐 시스템의 실제 고유치와 고유치의 미분값을 사용하여 구한 고유치의 근사값을 각각 두 번째 열과 세 번째 열에 나타내었다. 설계 변수로 사용한 외팔보의 폭(w)이 변함으로 인해 중복된 고유치는 외팔보의 단면이 더 이상 정사각형을 이루지 않음으로 인해 서로 다른 고유치로 갈라지게 되는 것을 알 수 있다. 마지막 두 열은 바뀐 시스템의 실제 고유쌍과 민감도 해석을 통해 구한 고유쌍 근사값과의 오차를 나타내고 있다. 오차값들이 상당히 작음을 살펴볼 수 있고, 이는 곧 제안 방법이 중복된 고유치를 갖는 비례 감쇠 시스템의 경우 아주 좋은 결과를 보여줌을 확인할 수 있다.

표 3.1 원래 시스템의 고유치와 고유치의 1, 2 차 민감도

Mode number	Eigenvalues	Eigenvalue first derivatives	Eigenvalue second derivatives
1	-1.4279e-03 +5.2496e+00i	-2.8057e-10 -3.5347e-10i	4.3916e-09 +1.0285e-08i
2	-1.4279e-03 -5.2496e+00i	-2.8057e-10 +3.5347e-10i	4.3916e-09 -1.0285e-08i
3	-1.4279e-03 +5.2496e+00i	-2.2756e-02 +5.2494e+01i	-2.7553e-01 -6.1102e-02i
4	-1.4279e-03 -5.2496e+00i	-2.2756e-02 -5.2494e+01i	-2.7553e-01 +6.1102e-02i
5	-5.4154e-02 +3.2895e+01i	-6.6265e-10 +2.3445e-10i	1.0084e-08 -2.4918e-09i
6	-5.4154e-02 -3.2895e+01i	-6.6265e-10 -2.3445e-10i	1.0084e-08 +2.4918e-09i
7	-5.4154e-02 +3.2895e+01i	-1.0818e+00 +3.2886e+02i	-1.0806e+01 -2.6913e+00i
8	-5.4154e-02 -3.2895e+01i	-1.0818e+00 -3.2886e+02i	-1.0806e+01 +2.6913e+00i
9	-4.2409e-01 +9.2090e+01i	6.9247e-10 -6.9600e-10i	-1.0391e-08 +1.1514e-08i
10	-4.2409e-01 -9.2090e+01i	6.9247e-10 +6.9600e-10i	-1.0391e-08 -1.1514e-08i
11	-4.2409e-01 +9.2090e+01i	-8.4753e+00 +9.2029e+02i	-8.4535e+01 -1.8358e+01i
12	-4.2409e-01 -9.2090e+01i	-8.4753e+00 -9.2029e+02i	-8.4535e+01 +1.8358e+01i

표 3.2 원래 시스템의 첫 번째 고유벡터와 고유벡터의 1, 2 차 민감도

DOF Number	Eigenvector	Eigenvector first derivatives	Eigenvector second derivatives
1	0	0	0
2	0	0	0
3	-6.6892e+05 -6.6892e+05i	3.3446e-04 +3.3446e-04i	-5.0169e+03 -5.0169e+03i
4	-2.6442e+04 -2.6442e+04i	1.3221e-03 +1.3221e-03i	-1.9596e+02 -1.9596e+02i
5	0	0	0
6	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮
75	-1.4505e+02 -1.4505e+02i	7.2527e-02 +7.2527e-02i	-1.0879e+00 -1.0879e+00i
76	-2.1439e+03 -2.1439e+03i	1.0721e-02 +1.0721e-02i	-1.6079e+01 -1.6079e+01i
77	0	0	0
78	0	0	0
79	-1.5577e+02 -1.5577e+02i	7.7887e-02 +7.7887e-02i	-1.1683e+00 -1.1683e+00i
80	-2.1442e+03 -2.1442e+03i	1.0721e-02 +1.0721e-02i	-1.6082e+01 -1.6082e+01i

표 3.3 바퀸 시스템의 고유치와 고유치의 근사값, 고유쌍 근사값의 오차

Mode number	Eigenvalues	Approximated eigenvalues	Error of approximation	
			Eigenvalue	Eigenvector
1	-1.4279e-03 +5.2496e+00i	-1.4279e-03 +5.2496e+00i	2.2283e-11	3.7376e-05
2	-1.4279e-03 -5.2496e+00i	-1.4279e-03 -5.2496e+00i	2.2283e-11	3.7376e-05
3	-1.4556e-03 +5.3021e+00i	-1.4555e-03 +5.3021e+00i	2.6622e-08	1.0000e-04
4	-1.4556e-03 -5.3021e+00i	-1.4555e-03 -5.3021e+00i	2.6622e-08	1.0000e-04
5	-5.4154e-02 +3.2895e+01i	-5.4154e-02 +3.2895e+01i	3.6899e-12	3.7376e-05
6	-5.4154e-02 -3.2895e+01i	-5.4154e-02 -3.2895e+01i	3.6899e-12	3.7376e-05
7	-5.5241e-02 +3.3224e+01i	-5.5236e-02 +3.3224e+01i	1.6763e-07	1.0001e-04
8	-5.5241e-02 -3.3224e+01i	-5.5236e-02 -3.3224e+01i	1.6763e-07	1.0001e-04
9	-4.2409e-01 +9.2090e+01i	-4.2409e-01 +9.2090e+01i	9.1432e-12	3.7376e-05
10	-4.2409e-01 -9.2090e+01i	-4.2409e-01 -9.2090e+01i	9.1432e-12	3.7376e-05
11	-4.3261e-01 +9.3010e+01i	-4.3256e-01 +9.3010e+01i	4.6508e-07	1.0002e-04
12	-4.3261e-01 -9.3010e+01i	-4.3256e-01 -9.3010e+01i	4.6508e-07	1.0002e-04

3.2   5 자유도 평판 기계 시스템

(Primary and secondary systems equipped on the rigid square plate)[8]

중복된 고유치를 갖는 비비례 감쇠 시스템의 경우 제안 방법을 적용성을 검증하기 위하여 그림 3.2 와 같은 5 자유도 평판 기계 시스템을 생각해 보자. 수직 방향 진동만 있다고 가정하자. 그리고 설계 변수로는 스프링 k_5 로 선정하였다.

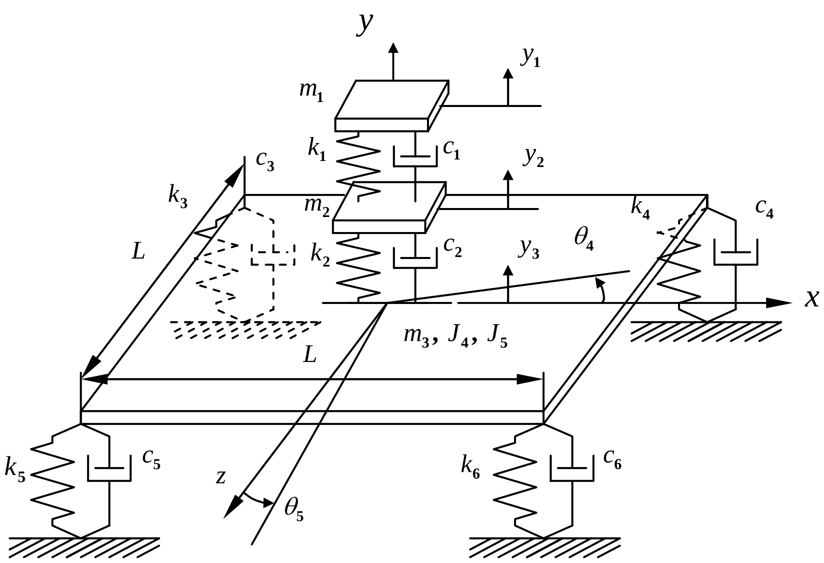


그림 3.2   5 자유도 평판 기계 시스템

m_1=200 kg, m_2=500 kg, m_3=1000 kg, k_1=10000 N/m, k_2=20000 N/m,

k_3= k_4= k_5= k_6=1000 N/m, c_1=4 Ns/m, c_2=6 Ns/m, c_3= c_4= c_5= c_6=40 Ns/m

질량 행렬 **M** 의 각각의 요소들은 다음과 같다.

$$m_{11}=m_1,\ m_{23}=m_2,\ m_{33}=m_3,\ m_{44}=J_4,\ m_{55}=J_5, \quad \text{and}\ \ m_{ij}=0\ \text{ if }\ i\neq j \tag{3-5}$$

강성 행렬 **K** 의 각각의 요소들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &k_{11}=k_1,\ k_{12}=-k_1,\ k_{13}=k_{14}=k_{15}=0,\\ &k_{22}=k_1+k_2,\ k_{23}=-k_2,\ k_{24}=k_{25}=0,\\ &k_{33}=k_2+k_3+k_4+k_5+k_6,\ k_{34}=-L/2(k_3-k_4+k_5-k_6),\\ &k_{35}=-L/2(k_3+k_4-k_5-k_6),\\ &k_{44}=(L/2)^2(k_3+k_4+k_5+k_6),\ k_{45}=(L/2)^2(k_3-k_4-k_5+k_6),\\ &k_{55}=(L/2)^2(k_3+k_4+k_5+k_6). \end{aligned} \tag{3-6}$$

감쇠 행렬 **C** 의 각각의 요소들은 강성 행렬과 유사한 형태를 가진다.

$$c_{11}=c_1,\ c_{12}=-c_1,\ c_{13}=c_{14}=c_{15}=0,\ c_{22}=c_1+c_2,\ \text{etc.} \tag{3-7}$$

시스템의 고유치 해석과 제안 방법에 의한 민감도 해석 결과 일부를 표 3.4, 표 3.5 그리고 표 3.6 에 나타내었다.

표 3.4 의 두 번째 열에서 보다시피 세 번째, 네 번째 고유치가 다섯 번째, 여섯 번째 고유치와 동일한 값을 가짐을 볼 수 있으며, 이는 비비례 감쇠 시스템의 예제로 사용된 5 자유도 평판 기계 시스템은 중복된 고유치를 갖는 시스템임을 확인할 수 있다. 그리고 중복된 고유치의 1 차 미분값은 각각 서로 다름을 알 수 있다. 마지막 열에는 2 차 민감도 해석을 통한 결과를 나타내었다.

첫 번째 수치 예제와 마찬가지로 표 3.6 의 두 번째 열과 세 번째 열에는 설계 변수 k_5 를 $\Delta k_5=0.01k_5$ 만큼 변화시켰을 때 바뀐 시스템의 고유치를 나타내고 있다. 민감도 해석의 적용성을 검증하기 위해 설계 변수의 변화로 인해 바뀐 시스템의 실제 고유치와 고유치의 미분값을 사용하여 구한 고유치의 근사값을 각각 두 번째 열과 세 번째 열에 나타내었다. 설계 변수가 변함으로 인해 중복된 고유치는 구조적인 대칭성이 파괴됨으로 인해 서로 다른 고유치로 갈라지게 되는 것을 확인할 수 있다. 마지막 두 열은 바뀐 시스템의 실제 고유쌍과 민감도 해석을 통해 구한 고유쌍 근사값과의 오차를 나타내고 있다. 오차값들이 상당히 작음을 살펴볼 수 있고, 이는 곧 제안 방법이 중복된 고유치를 갖는 비비례 감쇠 시스템의 경우 아주 좋은 결과를 보여줌을 확인할 수 있다.

제안 방법이 두 가지 예제를 통해 검증되었다. 본 제안 방법은 중복된 고유치를 갖는 비례 감쇠 시스템과 비비례 감쇠 시스템에 모두 적용 가능한 아주 효율적인 방법이다.

표 3.4 원래 시스템의 고유치와 고유치의 1, 2 차 민감도

Mode number	Eigenvalues	Eigenvalue first derivatives	Eigenvalue second derivatives
1	-4.3262e-02 +1.5023e+00i	9.6943e-07 +1.7995e-04i	-1.4634e-08 -2.4680e-07i
2	-4.3262e-02 -1.5023e+00i	9.6943e-07 -1.7995e-04i	-1.4634e-08 +2.4680e-07i
3	-2.4000e-01 +3.4558e+00i	0.0000e+00 +0.0000e+00i	0.0000e+00 +0.0000e+00i
4	-2.4000e-01 -3.4558e+00i	0.0000e+00 +0.0000e+00i	0.0000e+00 +0.0000e+00i
5	-2.4000e-01 +3.4558e+00i	0.0000e+00 +8.6811e-04i	1.6409e-08 -1.4913e-07i
6	-2.4000e-01 -3.4558e+00i	0.0000e+00 -8.6811e-04i	1.6409e-08 +1.4913e-07i
7	-3.5202e-02 +6.1354e+00i	-7.8926e-07 +2.9526e-05i	-1.7067e-09 +1.4301e-08i
8	-3.5202e-02 -6.1354e+00i	-7.8926e-07 -2.9526e-05i	-1.7067e-09 -1.4301e-08i
9	-2.4535e-02 +9.7000e+00i	-1.8017e-07 +5.0001e-06i	-6.8945e-11 +8.4803e-10i
10	-2.4535e-02 -9.7000e+00i	-1.8017e-07 -5.0001e-06i	-6.8945e-11 -8.4803e-10i

표 3.5 원래 시스템의 첫번째 고유벡터와 고유벡터의 1, 2 차 민감도

DOF Number	Eigenvector	Eigenvector first derivatives	Eigenvector second derivatives
1	1.0851e-02 -1.0743e-02i	-4.1482e-07 +4.2149e-07i	3.9185e-10 -2.7842e-10i
2	1.0334e-02 -1.0286e-02i	-5.1501e-07 +5.1709e-07i	5.2496e-10 -4.2633e-10i
3	9.4601e-03 -9.5112e-03i	-6.7729e-07 +6.7328e-07i	7.4423e-10 -6.7172e-10i
4	0.0000e+00 +0.0000e+00i	5.4601e-06 -6.2004e-06i	-6.5680e-09 +8.1097e-09i
5	0.0000e+00 +0.0000e+00i	-5.4601e-06 +6.2004e-06i	6.5680e-09 -8.1097e-09i

표 3.6 바퀸 시스템의 고유치와 고유치의 근사값, 고유쌍 근사값의 오차

Mode number	Eigenvalues	Approximated eigenvalue	Error of approximation	
			Eigenvalue	Eigenvector
1	-4.3243e-02 +1.5040e+00i	-4.3253e-02 +1.5041e+00i	8.1631e-07	2.9463e-05
2	-4.3243e-02 -1.5040e+00i	-4.3253e-02 -1.5041e+00i	8.1631e-07	2.9463e-05
3	-2.4000e-01 +3.4558e+00i	-2.4000e-01 +3.4558e+00i	0.0000e+00	0.0000e+00
4	-2.4000e-01 -3.4558e+00i	-2.4000e-01 -3.4558e+00i	0.0000e+00	0.0000e+00
5	-2.4000e-01 +3.4645e+00i	-2.4000e-01 +3.4645e+00i	2.1632e-06	5.2014e-06
6	-2.4000e-01 -3.4645e+00i	-2.4000e-01 -3.4645e+00i	2.1632e-06	5.2014e-06
7	-3.5210e-02 +6.1357e+00i	-3.5210e-02 +6.1357e+00i	1.1763e-07	2.5394e-06
8	-3.5210e-02 -6.1357e+00i	-3.5210e-02 -6.1357e+00i	1.1763e-07	2.5394e-06
9	-2.4537e-02 +9.7000e+00i	-2.4537e-02 +9.7000e+00i	4.3893e-09	1.6332e-07
10	-2.4537e-02 -9.7000e+00i	-2.4537e-02 -9.7000e+00i	4.3893e-09	1.6332e-07

제 4 장 결론

본 연구에서는 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 고유치와 고유벡터의 민감도를 구하기 위한 대수적인 방법을 제안하였으며, 수치 예제를 통해 제안 방법의 효율성과 적용성을 검증하였다. 본 연구의 결과는 다음과 같이 정리할 수 있다.

첫째, 수치적으로 안정된 선형대수방정식을 통해 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 고유치와 고유벡터의 미분값의 정확한 해를 구할 수 있게 되었다.

둘째, 본 연구의 제안 방법을 확장하여 고유치와 고유벡터의 2 차 민감도를 구할 수 있게 되어 설계 변수로 변화로 인해 바뀐 시스템의 고유쌍을 근사화하는 데 더 정확한 결과를 줄 수 있게 되었다. 그리고 동일한 방법을 사용하여 고차 민감도까지 확장할 수 있게 되었다.

셋째, 본 연구의 제안 방법은 'N-space'에 바탕을 둔 방법이며, 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 제안식의 계수 행렬이 대칭이므로 계산 시간 및 저장 용량에 있어 매우 효율적인 방법이다.

결론적으로 본 연구의 제안 방법은 중복된 고유치를 갖는 감쇠 시스템의 고유치와 고유벡터의 민감도의 정확한 해를 구할 수 있는 수치적 안정성이 보장된 아주 효율적인 방법으로, 이를 확장하여 고유쌍의 2 차 민감도 및 고차 민감도의 정확한 해를 구할 수 있게 하였다.

참고문헌

[1] I. U. Ojalvo, "Efficient Computation of Modal Sensitivities for Systems with Repeated Frequencies," *AIAA Journal*, **26**, 361-366 (1988).

[2] W. C. Mills-Curran, "Calculation of Derivatives for Structures with Repeat Eigenvalues," *AIAA Journal*, **26**, 867-871 (1988).

[3] R. L. Dailey, "Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues," *AIAA Journal*, **27**, 486-491 (1989).

[4] W. Zhong and G. Cheng, "Second-order Sensitivity Analysis of Multimodal Eigenvalues and Related Optimization Techniques," *Journal of Structural Mechanics*, **14**, 421-436 (1986).

[5] M. L. Bernard and A. J. Bronowicki, "Modal Expansion Method for Eigensensitivity with Repeated Roots," *AIAA Journal*, **32**, 1500-1506 (1994).

[6] K. B. Lim, J. N. Juang and P. Ghaemmaghami, "Eigenvector Derivatives of Repeated Eigenvalues using Singular Value Decomposition," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **12**, 282-283 (1989).

[7] I. W. Lee and G. H. Jung, "An Efficient Algebraic Method for Computation of Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities: Part I, Distinct Natural Frequencies," *Computers and Structures*, **62**, 429-435 (1997).

[8] I. W. Lee and G. H. Jung, "An Efficient Algebraic Method for Computation of Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities: Part II, Multiple Natural Frequencies," *Computers and Structures*, **62**, 437-443 (1997).

[9] I. W. Lee and D. O. Kim, "Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities of Damped Systems: Part I, Distinct Natural Frequencies," *Journal of Sound and Vibration*, **223**, 399-412 (1999).

[10] I. W. Lee and D. O. Kim, "Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities of

Damped Systems: Part II, Multiple Natural Frequencies," *Journal of Sound and Vibration*, **223**, 413-424 (1999).

[11] R. B. Nelson, "Simplified Calculations of Eigenvector Derivatives," *AIAA Journal*, **14**, 1201-1205 (1976).

[12] H. M. Adelman and R. T. Haftka, "Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems," *AIAA Journal*, **24**, 823-832 (1986).

[13] M. I. Friswell, "Calculation of Second and Higher Order Eigenvector Derivatives," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **18**, 919-921 (1995).

[14] 조홍기, "감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 민감도, " 석사학위 논문, 한국과학기술원 (2001).

감사의 글

나의 하나님! 당신께 모든 영광과 기쁨을 올려드립니다.

젊은 청년의 날, 저에게 주어진 2년이라는 시간을 마무리하며 끝이 아닌 새로운 출발을 맞이하게 되었습니다. 어디로 가야 할지 어느 길이 올바른 길인지 고민하고 홀로 방황하고 있을 때, 항상 저를 도와 주시고 격려해 주시는 많은 분들로 인해 이제는 새로운 출발이 두려움과 걱정으로 시작하는 것이 아니라 기쁨과 기대감으로 시작하게 되었습니다. 바로 저의 옆에서 제가 힘들어 할 때 함께 힘들어 하고 제가 기쁠 때 함께 기뻐해 주신 여러분 모두에게 감사 드리고자 합니다.

먼저 저에게 학문의 방향과 인생에 있어서 올바른 가르침으로 관심과 사랑으로 이끌어 주시고 어떤 연구라도 할 수 있을 것 같은 자신감을 부어주신 이인원 교수님께 감사 드립니다. 부족한 논문에 대해 관심과 조언을 주신 윤정방 교수님과 곽효경 교수님께 감사 드립니다. 그리고 지난 6년간 훌륭하고 성실한 강의로 많은 가르침을 주신 토목공학과 교수님들께 감사 드립니다. 바쁘신 가운데에서도 세미나를 함께 해 주신 한남대학교 오주원 교수님, 경일대학교 이종헌 교수님, 한경대학교 김운학 교수님, 성균관대학교 박선규 교수님 그리고 제가 바로 이곳 한국과학기술원에서 학문을 연구할 수 있도록 그 터를 허락해 준 한국과학기술원에도 감사 드립니다.

2년 동안 한 방에서 그 누구보다도 자주 만나며 오랜 시간을 보낸 한 가족, 구조동역학 및 진동제어 연구실 식구들 모두에게 깊은 감사를 드립니다. 형조 형(만물 박사), 지성이 형(실험실의 영원한 보스), 병완이 형(자상한 아버지이자 실험실의 웃음꽃), 상원이 형(항상 신선하고 새로움), 규식이 형(후배들을 친구처럼 자상하면서도 엄격한 선배), Thanh (나라를 사랑하고 항상 웃는 얼굴의 사나이) 선배님께 감사의 마음을 전합니다. 함께 dica 파워유저로의 길로 나아가며 앞으로도 같이 걸어갈 동기 영종이와 동두(최고의 손가락을 보유), 준식(항상 우리를 시원케 함), 헌재(어색해 보이지만 실험실 귀염둥이)후배님께도 깊은 우정을 표합니다. 지금 함께 실험실에서 생활하고 있지는 않지만 작년까지 같이 생활했던 심규홍 박사님 그리고 동현, 현택, 현우, 홍기, 혜린 선배님께도 깊은 감사를 드립니다.

제 삶의 기쁨이자 저에게는 축복의 선물인 대덕한빛교회 여러분! 전진한 목사님(영원한 우리의 보스), 정병진 간사님(자상하신 시인), 엄요시야 간사님(항상 흘러 나오는 칭찬과 격려), 주현주 간사님(줄 잘 설께요), 헬퍼 대훈이 형(청년 시인), 박옥현 전도사님(친누나 같은 친밀함), 이용재 집사님(성실하신 중등2부 최고의 선생님) 외 여러분들, 지면 관계상 청년부 모두의 이름을 적지 못함을 용서하기 바랍니다. 대신 여러분께 드리는 논문에 감사의 글을 따로 적어서 보냅니다.

KAIST 토목공학과 석사 동기들의 졸업을 축하하며 같은 길을 걸어가며 서로 협력하며 서로에게 힘이 되어주는 동기들의 모습을 기대합니다. 과대 준보형을 비롯해서 상훈이, 세택이, 준희, 종호, 형일이, 희준이, 민종이, 지훈이, 승오, 상준이, 광영이, 종현이, 지현이, 윤기에게 대학원 생활 동안 베풀어 준 관심과 사랑에 고마움을 전하고 앞으로도 어디서든 건강하고 계획하는 모든 일들이 잘 이루어지길 바랍니다. 자주 만나지는 못하지만 경남과고 11기 여러분들 모두에게도 고마움과 함께 최고의 동문이 되길 바랍니다.

기쁠 때 함께 기뻐해 주고 슬플 때 함께 슬퍼해 준 사랑하는 미은이와 그 가족, 이병주 장로님, 김난희 권사님, 그리고 정은이 누나네 가족 모두에게도 감사과 사랑을 전합니다. 그리고 사랑하는 우리 동생 강혜, 홀로 멀리 떨어져서 오빠가 잘 챙겨주지 못하지만, 지금까지 오빠의 생각을 존중하고 믿고 잘 성장하여 참 고맙고, 항상 건강하게 그리고 꿈을 소유한 자로 이전에도 그러했듯이 순수함과 아름다움이 가득 차 많은 사람들에게 사랑과 기쁨을 전하는 그런 이쁜 우리 동생이 되길 바랍니다.

끝으로 무한한 사랑으로 멀리 떨어져 있는 아들을 걱정하고 격려해 주시는 저의 사랑하는 부모님! 옳고 그름에 대해서 명확하시고 정직하시고 항상 아들을 위해 기도하시는 아버지, 주는 것을 아주 기뻐하시고 저를 향한 큰 사랑으로 지금까지 키워주신 어머니께 두 분의 사랑에 조그마한 보답으로 이 작은 결실을 바칩니다.

이 력 서

성　　명 :　　최 강 민
생년월일 :　　1978 년 6 월 19 일
출 생 지 :　　경상남도 진주시
본　　적 :　　경상남도 진주시 칠암동 524-2

학　　력

1996.3 – 2000.2　한국과학기술원 토목공학과 학사과정 (B. S.)
2000.3 – 2002.2　한국과학기술원 토목공학과 석사과정 (M. S.)

연 구 논 문

학위논문

1. 최강민, (2002), “중복된 고유진동수를 갖는 감쇠 시스템의 고유진동수와 고유모드의 민감도,” 석사학위 논문, 한국과학기술원.

학술회의 발표 논문

1. Kang-Min Choi, Woon-Hak Kim and In-Won Lee, (2001), "Algebraic Method for Sensicitivy Analysis of Eigensystems with Repeated Eigenvalues," *The 14th KKNN Symposium on Civil Engineering*, Kyoto, Japan, November 5-7, 2001, pp. 59-64.
2. 최강민, 고만기, 이인원, (2001), "중복근을 갖는 감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 민감도," 2001 년도 추계 한국지진공학회 학술발표회 논문집, 2001. 9. 22, pp. 117-124.
3. 최강민, 이종헌, 이인원, (2001), "중복근을 갖는 감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 민감도," 2001 년도 가을 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 2001. 10. 13, pp. 515-522.
4. 최강민, 이종헌, 이인원, (2001), "중복근을 갖는 감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 민감도," 2001 년도 대한토목학회 학술발표회 논문집, 2001. 11. 2-3.